Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1917.

Berlin,
Weidmannsche Buchhandlung.
1917.

Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner) in Göttingen.

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1917.

Über Koagulation und Teilchenattraktion.

Von

Richard Zsigmondy.

Vorgelegt in der Sitzung vom 25. November 1916.

I. Einleitung.

Verschiedene Gründe veranlaßten mich zu der schon mehrfach ausgesprochenen Annahme, daß zwischen den Ultramikronen der elektrolytempfindlichen Hydrosole Anziehungskräfte bestehen, die als die eigentliche Ursache der Koagulation anzusehen sind und das Zusammentreten der Teilchen herbeiführen, sobald dieselben entladen sind. Da diese Auffassung nicht von allen Autoren geteilt wird, so schien mir eine eingehendere Begründung derselben wünschenswert.

Seit den grundlegenden Arbeiten Einsteins und insbesondere von Smoluchowskis über Brownsche Bewegung und Diffusion sowie über Konzentrationsschwankungen ist die Möglichkeit gegeben, über das Vorhandensein derartiger anziehender oder abstoßender Kräfte Aufklärung zu erhalten.

Die experimentellen Untersuchungen von The Svedberg sowie von Perrin und ihren Schülern haben zu dem bedeutungsvollen Resultate geführt, daß die ultramikroskopischen Teilchen einer Kolloidlösung gerade dieselben Erscheinungen im sichtbaren Gebiete zeigen, die die kinetische Theorie bezüglich der Moleküle angenommen hat, ja, daß einem im Ultramikroskop sichtbaren Teilchen die gleiche kinetische Energie zukommt wie einer Gasmolekel bei gleicher Temperatur. In guter Übereinstimmung mit Berechnungen, die auf ganz anderen Gebieten liegen, konnte aus der räumlichen Zerteilung bewegter Ultramikronen und ihrer Ortsveränderung mit der Zeit die universelle Avogadrosche Konstante N berechnet werden.

Man darf also annehmen, daß das Boyle-Mariottsche Gesetz sich auf kolloide Lösungen mit normal elektrisch geladenen Teilchen übertragen läßt, und daß eine Bedingung seiner Gültigkeit, daß die Radien der Wirkungssphären klein sind gegen die mittleren Abstände, auch bei ihnen erfüllt ist[1]).

Es hat nicht an Versuchen gefehlt, nach Abweichungen von dem Boyleschen Gesetz zu suchen und damit Anhaltspunkte für eventuell abstoßende und anziehende Kräfte zu erhalten. Einen Weg in dieser Richtung hat The Svedberg zuerst eingeschlagen.

Die Zahl der Teilchen innerhalb eines optisch abgegrenzten Volumens ist geradeso wie bei den Gasmolekülen fortwährenden Schwankungen unterworfen. Im Falle der Gültigkeit des Boyleschen Gesetzes sind diese Schwankungen den Gesetzen der Wahrscheinlichkeits-Rechnung unterworfen. Für diesen Fall gilt die v. Smoluchowskische Formel

$$\bar{\delta} = \sqrt{\frac{2}{\pi \nu}},$$

wenn ν eine große Zahl, und

$$\bar{\delta} = \frac{2\nu^k e^{-\nu}}{k!},$$

wenn ν eine kleine Zahl ist[2]).

Diese Formeln sind von Richard Lorenz und W. Eitel[3]) ausführlich abgeleitet worden.

Wenn das Sol nicht mit einem idealen Gase verglichen werden kann, sondern mit einem unvollkommenen, so müssen obige Ausdrücke mit $\sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}}$[4]) multipliziert werden, um den tatsächlich beobachteten Abweichungsgrad zu erhalten. Ist $\frac{\beta}{\beta_0} > 1$, so deutet das auf Anziehung der Ultramikronen, ist $\frac{\beta}{\beta_0} < 1$, so kann auf Abstoßung geschlossen werden.

1) Eine übersichtliche Darstellung dieses Gebietes nebst Literaturangaben findet man bei A. Westgren, Arkiv för Math., Astr. och Fisik Bd. 11, Nr. 8 u. v. Smoluchowski, Physikalische Zeitschrift **17**, Heft 22 und 23, 1916.

2) Darin bedeutet $\bar{\delta}$ den Mittelwert der relativen momentanen Abweichung des Momentanwertes n vom Mittelwert ν und k die größte ganze Zahl, welche gleich oder kleiner ist als ν.

3) Z. f. physik. Chem. **87**, 1914, 293 u. 294.

4) Hierin bedeutet bei einem Gase β_0 die Kompressibilität des idealen Gases, β die Kompressibilität des unvollkommenen Gases.

Die bisherigen Untersuchungen haben Folgendes ergeben.

Bei verdünnten Hydrosolen, Rauchteilchen und Mastixsolen etc. wurden von The Svedberg und anderen Forschern keine Anziehungs- oder Abstoßungskräfte beobachtet; bei konzentrierteren zeigten sich Abweichungen. Lorenz und Eitel fanden $\frac{\beta}{\beta_0} < 1$ für Rauchteilchen, dasselbe fand Costantin für konzentrierte Gummiguttemulsionen[1]).

Bei großen wie kleinen Submikronen in Goldhydrosolen und Suspensionen sind nach A. Westgren[2]) keine wesentlichen Abweichungen vom theoretischen δ-Wert zu beobachten.

Wir haben demnach in Solen und Suspensionen mit normal elektrisch geladenen Teilchen bei genügender Verdünnung keine Abweichungen vom normalen Zustand zu erwarten, und erst bei hohen Konzentrationen sind Wirkungen zu erkennen, die auf Abstoßung schließen lassen.

Ganz anders verhalten sich entladene Teilchen. Unmittelbar nach Elektrolytzusatz beginnt die Koagulation und erfolgt oft mit überraschender Schnelligkeit. Teilchenreiche Goldlösungen färben sich beinahe momentan violett oder blau, und ehe man Zeit hat, die Flüssigkeit in die Küvette des Ultramikroskops zu bringen, ist bereits ein großer Teil der grünen Primärteilchen zu flockenartigen braunen Sekundärteilchen vereinigt.

Beruht dieser Vorgang nur auf Teilchendiffusion und „Zusammenkleben" der sich berührenden Teilchen, oder ziehen sich die Teilchen in gewissen Abständen schon an, noch ehe Berührung erfolgt, und wie groß sind diese Abstände?

Auf diese Frage werden wir gleich zurückkommen. Zuvor sei aber noch eine Betrachtung eingeschaltet, aus welcher hervorgeht, daß die normal elektrisch geladenen Kolloidteilchen bei ihren Bewegungen in der Flüssigkeit nicht zur Berührung kommen, sondern sich auf kleine Distanzen gegenseitig abstoßen[3]).

Es lehrt die Erfahrung beim Eindampfen, Ausfrieren, auch bei der Ultrafiltration von elektrolytfreien Goldhydrosolen, daß schutzkolloidfreie Goldteilchen, die bis zur Berührung gebracht werden, selbst wenn sie nicht entladen sind, stets eine irreversible

1) Die von The Svedberg und Schülern beobachtete Abweichung ist nach ausführlichen Untersuchungen von A. Westgren auf eine Unvollkommenheit der optischen Abgrenzung im älteren Spalt-Ultramikroskop zurückzuführen.

2) loc. cit.

3) Diese Betrachtung steht nicht in Widerspruch mit obigen Ausführungen, denn die Abstoßung kommt erst bei sehr großer Annäherung der Teilchen zustande.

Teilchenvereinigung erleiden und aneinander haften. Wir können also mit einiger Sicherheit annehmen, daß die bis zur Berührung zusammenstoßenden Teilchen auch aneinander haften bleiben, und das Schicksal einer jeden kolloiden Goldlösung würde, wenn keine Abstoßung bestände, trotz der geringen Zahl der Momentstöße baldige Koagulation sein müssen, da die Brownsche Bewegung in sehr kleinen Bruchteilen einer Sekunde wieder völlige Durchmischung der Lösung herbeiführt, so daß die Gelegenheit zu Zusammenstößen sich fortwährend rasch erneuert.

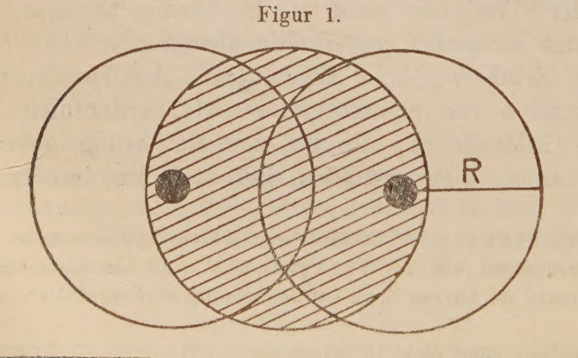
Die Tatsache, daß hochrote kolloide Goldlösungen, auch wenn sie kein Schutzkolloid enthalten, jahrelang haltbar sein können, beweist, daß deren Ultramikronen eben nicht zur Berührung kommen, solange sie nicht durch äußere Einflüsse, wie Ultrafiltration u. dgl., gewaltsam einander genähert werden und normale elektrische Ladung tragen. Diese letztere verhindert die Berührung der Teilchen, sei es durch elektrostatische Abstoßung bei sehr großer Annäherung oder durch Ausbildung der elektrischen Doppelschicht[1]).

Bei entladenen Teilchen entfällt dieses Hindernis der Teilchenvereinigung, und das Spiel der Koagulation beginnt unmittelbar nach Elektrolytzusatz.

Hier ergibt sich die Möglichkeit, aus der Koagulationsgeschwindigkeit Schlußfolgerungen auf vorhandene Anziehungskräfte zu ziehen. Voraussetzung ist allerdings, daß die Entladungsgeschwindigkeit sehr groß ist, daß sie also bei der Koagulation gegenüber der langsameren Teilchendiffusion nicht in Betracht kommt. Daß dies bei genügendem Elektrolytzusatz der Fall ist, ergibt sich aus den Ausführungen des Abschnitts II.

Macht man die Annahme, daß die elektrisch neutralen Einzelteilchen von Anziehungssphären vom Radius R umgeben sind, derart,

Figur 1.



Figur 2.



1) Vergl. v. Smoluchowski, Z. phys. Chem. 1917.

daß je zwei Teilchen, deren Sphären sich schneiden, infolge der Attraktion sich momentan vereinigen und aneinander haften bleiben, so muß die Größe dieser Sphären von Einfluß auf die Koagulationsgeschwindigkeit sein. (Vgl. Fig. 1 und 2.)

Denn die Wahrscheinlichkeit, daß zwei oder mehr Teilchen in einem gegebenen Moment in dem schraffierten Volumen $v = \frac{4}{3} R^3 \pi$ zusammentreffen, muß umso größer sein, je größer v ist. In diesem Moment wird also ein berechenbarer Bruchteil der Gesamtzahl der Teilchen N sich vereinigen; ebenso muß infolge der durch die Brownsche Bewegung herbeigeführten Durchmischung der Flüssigkeit in den folgenden Zeitabschnitten ein umso größerer Bruchteil verschwinden, je größer der Radius R ist.

Gelingt es, die Teilchen momentan zu entladen, so wird die Geschwindigkeit der Koagulation bestimmt sein durch die infolge des Zusammentreffens innerhalb der Wirkungssphäre erfolgende Momentkoagulation und in der Folge durch die Zeit, welche die Einzelteilchen benötigen, durch Brownsche Bewegung in jene Sphäre zu gelangen. Man darf also erwarten, daß die Koagulationsgeschwindigkeit abhängig ist von der Größe der Attraktionsradien wie von der Geschwindigkeitskonstante D der Brownschen Bewegung.

Ich habe mich im Februar 1916 schriftlich an v. Smoluchowski gewandt mit der Bitte, auf Grund einer derartigen Annahme die Abnahme der Zahl der ursprünglichen Primärteilchen mit der Zeit zu berechnen, nachdem ich mich vorher überzeugt hatte, daß bei der schnellen Koagulation genügend gleichartiger Goldlösungen reproduzierbare Resultate zu erhalten waren, und daß eine annähernde Bestimmung der Abnahme der Teilchenzahl mit der Zeit durchaus möglich ist.

v. Smoluchowski ist diesem Wunsche nicht nur in bereitwilligster Weise nachgekommen[1]), sondern hat noch weit darüber hinaus eine Theorie der Koagulation entwickelt, die wohl als eine der wichtigsten Grundlagen der künftigen Forschung auf diesem Gebiete der Kolloidphysik und -chemie gelten darf.

Die hier beschriebenen Versuche enthalten eine erste Bestätigung seiner Theorie.

---

1) Abweichend von obiger Annahme hat v. Smoluchowski seinen Rechnungen die Voraussetzung zugrundegelegt, daß zwei Teilchen sich dann vereinigen, wenn der Mittelpunkt des einen in die Attraktionssphäre des anderen gelangt. Wenn $\frac{R}{r} = 2$, tritt also Vereinigung bei Teilchenberührung ein.

II. Versuche, bei welchen die Farbenänderung als Indikator diente.

A. Die schnelle Koagulation.

Es war mir zunächst darum zu tun, die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten des zeitlichen Verlaufs der Koagulation kolloider Goldlösungen festzustellen, ohne allzuviel Zeit auf Auszählung der Einzelteilchen verwenden zu müssen.

Bekannt war die Wertigkeitsregel ferner insbesondere durch die Versuche von Burton und The Svedberg, daß die Kolloidteilchen sich allmählich entladen lassen und daß nahe dem isoelektrischen Punkt Teilchenvereinigung stattfindet; dann durch Versuche von Galecki, Ellis und Powis, daß bei der Elektrolytkoagulation die Ultramikronen sich bereits langsam vereinigen, lange bevor sie vollständig entladen sind. Auch sind zuweilen Umladungen der Teilchen beobachtet worden, die der Koagulation unter Umständen hinderlich sein müssen.

Andererseits mußte man erwarten, daß bei Anwendung von wohl definierten kolloiden Goldlösungen bestimmter Goldkonzentration das Maximum der Koagulations-Geschwindigkeit mit verschiedenen Elektrolyten zu erreichen sein müßte und zwar bei genügend hohen Elektrolytkonzentrationen, weil bei hoher Konzentration eine möglichst momentane und weitgehende Entladung zu erzielen ist und dann das Hindernis, das sonst der Teilchenvereinigung entgegensteht, unmittelbar nach Elektrolytzusatz beseitigt wird. Dies ließ sich tatsächlich erreichen.

Als Maß für die bis zu einem gewissen Grade vorgeschrittene Koagulation wählte ich die Farbenänderung, welche hochrote, schutzkolloidfreie kolloide Goldlösungen bei Elektrolytzusatz erleiden und werde in Folgendem als Koagulationszeit $t_{(VR)}$ die in Sekunden gemessene Zeit bezeichnen, welche vom Moment des Elektrolytzusatzes bis zum Eintritt einer bestimmten, leicht zu erkennenden Farbenänderung in Violettrot verfließt[1]). Vorversuche zeigten, daß die gewählte Farbe dem Verschwinden von $^2/_3$—$^3/_4$ der vorhandenen Primärteilchen entspricht, daß dann also die Koagulution schon ziemlich weit vorgeschritten ist. Große Genauigkeit darf man von diesen Versuchen nicht erwarten, aber sie lassen die wichtigsten Gesetze schon recht gut erkennen.

---

1) Bei einiger Übung ist die gewählte Nüance — Eintritt des ersten Stichs in Blau — leicht zu erkennen, namentlich wenn man sich Standards durch Unterbrechung der Koagulation z. B. mit Gummi arabicum herstellt.

B. Verfahren und Versuchsresultate.

Variation der Elekektrolytkonzentration.

Je 10 CC einer bestimmten hochroten kolloiden Goldlösung wurden mit 40 CC Wasser in einen weithalsigen Titrierkolben gebracht, hierzu wurden 50 CC einer verdünnten Elektrolytlösung bestehend aus { a CC Normallösung / (50—a) CC H_2O } möglichst plötzlich unter heftigem Umschwenken des Kolbens hinzugefügt. Man wartete dann, bis die Nüance Violettrot eingetreten war und notierte die zugehörige Zeit $t_{(VR)}$. Variiert wurde also nur der Elektrolytgehalt, alle anderen Verhältnisse blieben konstant.

1. Koagulation mit Kochsalz.

{ 10 CC AuF_{19} / 40 „ H_2O } { a CC n-NaCl / (50—a) CC H_2O }

Tabelle 1.

Na Cl a	$t_{(VR)}$ in Sekunden
0,5	Purpur nach 2,5 Minuten
1,0	12 Sekunden
2,0	7,2 „
5	7 „
5	7 „
7,5	6,5 „
10	7 „
10	7 „
15	6 „
20	6—7 „
30	7,5 „
50	7 „
50 CC einer 10-prozentigen Lösung	12,5 „

2. *Koagulation mit $SrCl_2$.*

{ 10 CC AuF_8 / 40 „ H_2O } { a CC n-$SrCl_2$ / (50—a) CC H_2O }

Tabelle 2.

	I	II	III
$SrCl_2$ a CC	$t_{(VR)}$ Sekunden für AuF_8	$t_{(VR)}$ Sekunden für AuF_8	$t_{(VR)}$ für F_{31}
0,075	—	Nach 1 St. keine Veränderung	
0,1	> 135 ?	> 40 Minuten	77
0,125	—	1020 Sekunden	
0,166	—	20,5	10
0,20	—	10—15	—
0,25	8	—	4,5
0,5	6	4	2,5
0,75	5—7	—	—
1,0	6	6	2,5
2,5	—	—	2,5
5,0	4	—	2,25
7,5	5	—	—
10,0	5—7	—	—
25,0	6	—	—
50,0	15	—	—

Die Versuchsreihe II war 3 Tage später als I mit derselben Goldlösung AuF_8 ausgeführt worden wie I, aber mit n/10-Strontiumchlorid als Stammlösung. Die beiden Reihen gehören also zusammen.

Der erste Wert der Spalte I fällt stark aus der Versuchsserie heraus und ist daher mit einem Fragezeichen bezeichnet worden. Die übrigen schließen sich der Koagulationskurve gut an.

Die Versuchsreihe der Spalte III war mit einem beträchtlich feineren Goldhydrosol F_{31} durchgeführt worden und hatte dementsprechend viel kürzere Koagulationszeiten.

3. *Koagulation mit Chlorwasserstoff.*

Die Versuche der Serie I wurden mit einem hochroten, etwas grobteiligen Goldsol Au_H ausgeführt, das keine sehr schönen Farbübergänge zeigte; die Koagulation mit 1—10 CC Normal-Strontiumchloridlösung verlief hier langsamer als vorher, in 9—14 Sekunden. Zu ähnlichen Werten gelangte man auch mit Salzsäure höherer Konzentration.

Serie II wurde mit dem feinteiligeren $Au_{F_{30}}$ ausgeführt, einer Lösung, deren schnelle Koagulation mit Strontiumchlorid annähernd 6 Sekunden betrug in Übereinstimmung mit den Werten der Spalte II $t_{(RV)}$ für Salzsäure (bei a = 1 bis 50 CC).

A $\begin{cases} 10 \text{ CC } Au_H \\ 40 \text{ „ } H_2O \end{cases}$ B $\begin{cases} a \text{ CC n HCl} \\ (50-a) \text{ CC } H_2O \end{cases}$

Tabelle 3.

	I	II
aCC	$t_{(VE)}$ für Au_H	$t_{(VE)}$ für $Au_{F_{30}}$
0,1	—	nach 3 Minuten unverändert.
0,5	65 40—45	—
1,0	20 26	6
5,0	12 13—15	5
10	9 10	5,7
25	10 12	5,5
50	8—10	
50 CC conc. HCl	13—15	5

4. *Versuche mit Aluminiumnitrat und Thoriumnitrat.*

Die Lösungen dieser Salze enthalten die mehrwertigen Kationen Al··· und Th···· und sind daher durch sehr kleine Schwellen-

werte ausgezeichnet, besitzen auch die Eigentümlichkeit, in mäßigen Konzentrationen negative Kolloide umzuladen, unterliegen ferner der Hydrolyse, die zur Bildung schützender basischer Salze und kolloider Oxyde führen kann. Bei ihrer Verwendung zur Bestimmung der Koagulationszeiten sind daher allerlei Komplikationen zu erwarten, die auch anfangs tatsächlich eingetreten sind.

Man muß die Anwendung alkalihaltiger Goldhydrosole vermeiden, welche infolge der Bildung kolloider Oxyde zur Entstehung von purpurnen Niederschlägen (Analoga zum Cassiusschen Purpur) führen können und hat womöglich für einen kleinen Säureüberschuß in der Goldlösung Sorge zu tragen. Die Lösungen der Salze müssen aus reinen Substanzen ganz frisch bereitet und am besten möglichst konzentriert zur Verwendung kommen. Namentlich bei Thoriumnitrat zeigte sich die Neigung zur Bildung sehr wirksamer Schutzkolloide, die die Koagulation ganz oder teilweise verhinderten.

Nach Überwindung einiger Schwierigkeiten dieser Art hat Herr J. Reitstötter, den ich zur Ausführung dieser Versuche veranlaßte, recht gute Resultate erhalten. J. Reitstötter stellte eine größere Menge einer schwach sauren kolloiden Goldlösung $Au_{HS_{180}}$ nach einer neuen Modifikation des Keimverfahrens her [1]) und verwandte dieselbe zu Koagulationsversuchen mit verschiedenen Elektrolyten (Chlornatrium, Strontiumchlorid, Aluminium- und Thoriumnitrat) [2]); seine zuletzt erhaltenen Resultate sind hier in Fig. 3 als Kurven wiedergegeben, gemeinsam mit den Resultaten der Tabellen 1 u. 2.

Stets wurde verwendet

A { 10 CC $Au_{HS_{180}}$, 40 „ H_2O } B { a CC Elektrolytlösung, (50—a) CC H_2O }

Das Wasser war zweimal destilliert, das zweite Mal über Kaliumpermanganat unter Kondensation im Goldkühler. Als Koagulationszeit $t_{(VR)}$ wurde für die in die Kurventafel nicht oder nur teilweise aufgenommenen höheren Konzentrationen von Kochsalz, Strontiumchlorid etc. stets annähernd 4 Sekunden gefunden [3]).

---

1) Göttinger Nachrichten 22. Juli 1916 und J. Reitstötter, Inaug.-Diss. Göttingen. (Noch nicht gedruckt.)

2) Bei $Na^{\cdot}$, $Sr^{\cdot\cdot}$, $Th^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$ wurden Äquivalent-Normallösungen, bei $Al^{\cdot\cdot\cdot}$ solche und n/100 Lösungen verwendet.

3) Für die Konzentrationen { a = 5 —50 CC n bei $SrCl_2$ u. $NaCl$; 0,3—30 „ „ „ $Al(NO_3)_3$; 10 —20 „ „ „ $Th(NO_3)_4$ }

Figur 3.


$t_{(VB)}$ Zeit in Sekunden →
n-NaCl
n SrCl₂
n/100 Al(NO₃)₃
n-Th(NO₃)₄
a CC Elektrolyt →

C. Zusammenfassung.

1. Als wichtigstes Resultat dieser Versuche ergibt sich die Erkenntnis, daß jede reine kolloide Goldlösung, die in bestimmter Konzentration (Teilchenzahl) zur Verwendung kommt, ein Gebiet kleinster Koagulationszeit besitzt, das schon bei mäßigen Elektrolytkonzentrationen erreicht wird und sich über weite Bereiche derselben erstreckt. Die kleinen Abweichungen von diesem Gesetze liegen durchaus innerhalb der Beobachtungsfehler.

2. Die kleinste Koagulationszeit ist unabhängig von der Art des koagulierenden Elektrolyten. Das ergibt sich aus den bei der Koagulation mit Salzsäure angeführten Versuchen, insbesondere aber aus den Versuchen von Reitstötter. Obgleich also Elektrolyte mit verschiedenstem Schwellenwert zur Anwendung kamen, wurde annähernd dasselbe Minimum der Koagulationszeit erreicht. (Vergl. Fig. 3.)

3. Es ist schon längst bekannt, daß kleine „unter dem Schwellenwert“ liegende Elektrolytkonzentrationen in absehbarer Zeit keine Koagulation bewirken.

Allmähliche Erhöhung der Elektrolytkonzentration führt in das Gebiet der langsamen Koagulation durch eine bezüglich der Elektrolytkonzentration ziemlich eng begrenzte Zone, in der kleine Änderungen der Konzentration sehr große Änderungen der Koagulationszeit bewirken. In diesem Gebiet (Schwellenzone) liegt der Schwellenwert (an verschiedenen Stellen, je nach der Beobachtungsdauer[1]).

Man kann also zwei Gebiete unterscheiden, in welchen eine Änderung der Elektrolytkonzentration keinen merklichen Einfluß auf die Beständigkeit resp. Koagulationszeit der Goldsole ausüben: das Gebiet unter der Schwellenzone und das der großen Koagulationsgeschwindigkeit. Beide sind durch Übergänge miteinander verknüpft, in denen die Koagulationszeit von der Elektrolytkonzentration anfangs sehr stark beeinflußt wird.

1) Ob man (wie manche Forscher wohl wollen) bei beliebig langer Beobachtungsdauer die Schwellenzone beliebig weit in ein Gebiet noch langsamerer Koagulation ausdehnen kann, läßt sich wohl kaum entscheiden, da bei sehr ausgedehnter Beobachtungszeit unbekannte Faktoren die Stabilität eines Hydrosols viel mehr beeinflussen als die Konzentration einer kleinen Menge hinzugefügten Salzes; obige Betrachtung bezieht sich auf die gewöhnliche Versuchsanordnung, wo die Beobachtungszeit kaum über einige Tage ausgedehnt wird.

1. Isoelektrischer Punkt und kritisches Potential.

Diese Resultate erscheinen vielleicht überraschend, wenn man bedenkt, daß einige der verwendeten Elektrolyte die Fähigkeit besitzen, bei gewissen Konzentrationen die Goldteilchen umzuladen; man sollte erwarten, daß das Minimum der Koagulationszeit sich nur über solche Konzentrationsgebiete erstreckt, bei welchen der isoelektrische Punkt Hardys erreicht wird, während beiderseits desselben mit zunehmender Potentialdifferenz zwischen Teilchen und Medium die Koagulationszeit wieder ansteigen müßte. Nun hat Fr. Powis[1]) gezeigt, daß Ähnliches wie bei meinen Versuchen auch bei Ölemulsionen eintritt: auch bei diesen ist die Koagulationsgeschwindigkeit innerhalb weiter Bereiche dieselbe, obgleich die Potentialdifferenz der Teilchen gegen das Medium zwischen gewissen kleinen Werten schwanken kann. Nach Powis ist demnach die Koagulationsgeschwindigkeit beinahe unabhängig von der Ladung der Teilchen, sobald dieselbe unter ein gewisses kritisches Potential (bei Öl und Wasser ± 0,03 Volt) sinkt.

Sehr kleine elektrische Ladungen beeinflussen also nicht mehr bemerkenswert die Koagulationsgeschwindigkeit. So merkwürdig dieses Ergebnis auch zunächst erscheinen mag, so steht es in gutem Einklang mit Powis Versuchen und mit zahlreichen anderen Erscheinungen, die er auf Grund der von ihm betonten Auffassung erklären konnte, während sie nach der Hardy'schen Lehre vom isoelektrischen Punkt kaum zu deuten waren, so die Existenz einer breiten Fällungszone bei der gegenseitigen Ausfällung entgegengesetzt geladener Kolloide.

Meine Versuchsresultate wären dann nach Powis so zu deuten, daß die Koagulationsgeschwindigkeit dann die größten Werte erreicht, wenn die Potentialdifferenz Gold-Wasser unter das kritische Potential gesunken ist, gleichgültig ob die Teilchen dann noch eine kleine Restladung tragen oder nicht, und es ist von Interesse, die einer bestimmten Elektrolytkonzentration entsprechende Potentialdifferenz mit den zugehörigen Koagulationszeiten zu vergleichen.

Geeignetes Versuchsmaterial findet sich in einer Publikation von A. Galecki[2]), und da er mit Goldhydrosolen gearbeitet hat, die genau nach dem gleichen Verfahren hergestellt waren wie die von mir benutzten Au_F, so scheint mir ein Vergleich mit seinen

1) Z. physik. Chem. **89**, 179; 1915. Über Potentialdifferenzen ib. p. 91.
2) Z. anorg. Chem. **74**, S. 199—203.

Versuchen erlaubt, umsomehr als es sich hier nur um eine vorläufige Orientierung handelt.

A. Galecki hat die elektrische Überführung von Goldteilchen nach Zusatz von Elektrolyten in einer U-Röhre gemessen, die Geschwindigkeit u der anodischen Überführung festgestellt und diese Werte in Tabellen eingetragen. Da nach der Formel

$$\varepsilon = \frac{4\pi\eta u}{\varkappa \cdot \chi}$$

bei sonst gleichbleibenden Verhältnissen die Potentialdifferenz ε dem u proportional ist, so geben die Versuche ein gutes Bild für die Abnahme der letzteren mit steigendem Elektrolytgehalt.

Ich gebe hier einen Auszug aus Tabelle 15 [1]), die die Koagulation des Goldhydrosols Au_{IIF} mit Strontiumchlorid betreffen.

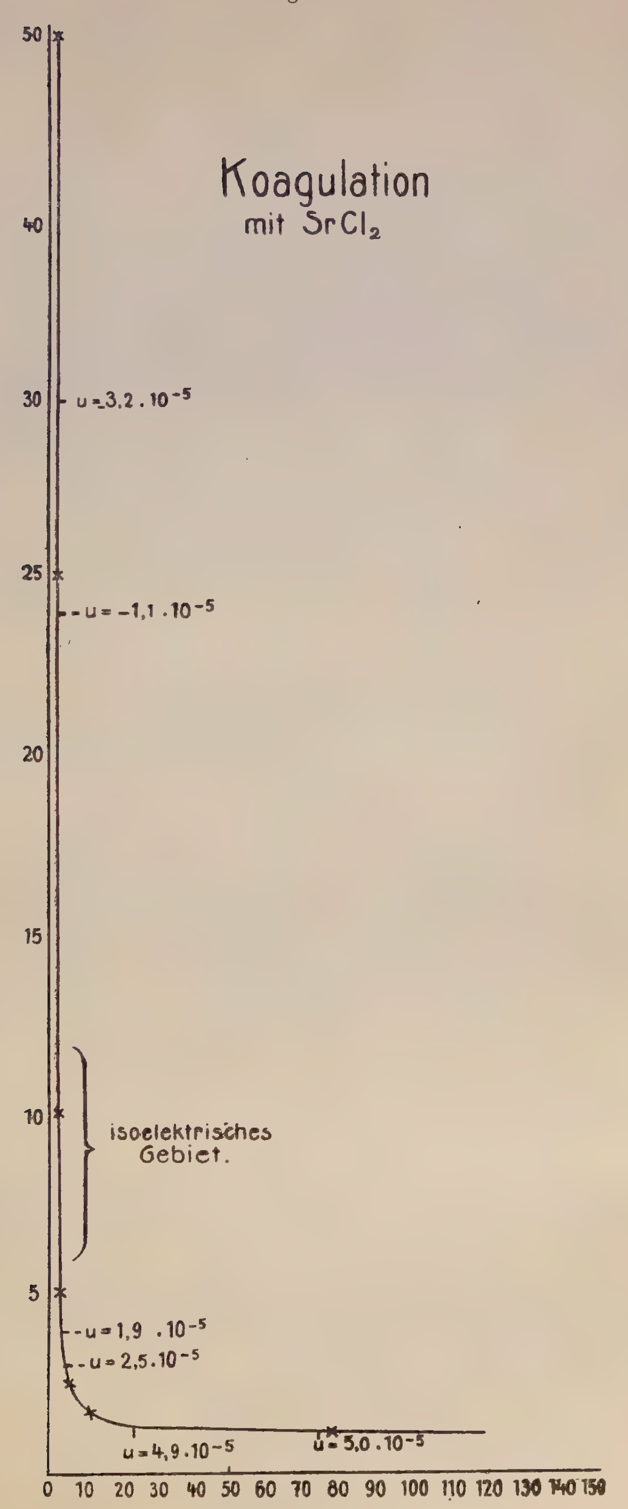
Tabelle 4.

I	II	III	IV
Millimol. 10^3 $^1/_2$ $SrCl_2$ pro 25 CC Au_{IIF}	CC Normallösung $SrCl_2$ auf 1000 CC	$u \cdot 10^5$	Färbung nach 15 Min. (Galecki p. 181)
0,00	0	+ 13,5	rot
2,99	0,12	+ 10,5	rot
12,49	0,5	+ 5,4	rot
24,98	1,0	+ 5,0	viol.-blau
28,93	1,15	+ 4,9	blau
31,50	1,26	+ 4,9	blau
74,94	3,0	+ 2,5	
99,9	4,0	+ 1,9	
149,88	6,0	?	isolelektr. Gebiet
299,76	12	?	
599,52	24	— 1,07	
749,09		— 3,20	

Einen bequemen Vergleich dieser Resultate mit den meinen ermöglicht Figur 4, in der der Koagulationsverlauf der Lösung $Au_{F_{31}}$ mit Strontiumchlorid graphisch dargestellt ist (vergl. Tabelle 2 Spalte III mit Einfügung der von Galecki beobachteten u-Werte.

1) Z. anorg. Chem. **74**, S. 201.

Figur 4.


Koagulation
mit $SrCl_2$
$u = 3,2 \cdot 10^{-5}$
$u = -1,1 \cdot 10^{-5}$
isoelektrisches
Gebiet.
$u = 1,9 \cdot 10^{-5}$
$u = 2,5 \cdot 10^{-5}$
$u = 4,9 \cdot 10^{-5}$
$u = 5,0 \cdot 10^{-5}$
50
40
30
25
20
15
10
5
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150

In Übereinstimmung mit Powis zeigt sich, daß das Gebiet schneller Koagulation schon erreicht ist, wenn die Teilchen noch schwach elektrisch geladen sind. Die Verhältnisse liegen aber doch etwas anders als bei Ölemulsionen, insofern als dort die Erniedrigung von 0,04 auf 0,03 Volt genügt, um dieses Gebiet zu erreichen, während bei kolloidem Gold dazu eine viel weitgehendere Entladung der Ultramikronen erforderlich ist, entsprechend einer Erniedrigung der Potentialdifferenz auf etwa den fünften Teil des ursprünglichen Werts. Diese kleine Restladung, sei sie nun positiv oder negativ, stört den Koagulationsverlauf in keiner Weise.

Es ist wohl möglich, daß die Primärteilchen im Moment der Durchmischung auch bei höheren Elektrolytkonzentrationen entladen werden und daß die gebildeten Sekundärteilchen sich erst nachträglich aufladen, etwa durch Adsorption von positiven Wasserkolloiden. Die Überführungsversuche erfordern viel Zeit, und die Koagulation ist dann schon weit vorgeschritten.

Es wäre vielleicht zweckmäßig, als kritisches Potential nicht das zu bezeichnen, bei welchem die langsame Koagulation in eine schnelle übergeht, sondern das dem Schwellenwert entsprechende, bei welchem die langsame Koagulation eben einsetzt. Die Bedeutung des Punktes wäre dann die, daß die abstoßenden Kräfte in ihrer Wirkung soweit herabgesetzt sind, daß ein wenn auch kleiner Bruchteil der Gesamtmomentstöße zur Wirkung kommt, d. h. daß Teilchenvereinigung in ihm eintritt[1]).

Derartige Untersuchungen werden vielleicht zu einer wichtigen Charakterisierung der Beständigkeitsbedingungen der Hydrosole gegen Elektrolyte führen; denn je höher das so charakterisierte kritische Potential liegt, um so geringere Widerstände andrer Art stellen sich der Koagulation entgegen, während andrerseits bei Kolloiden, welche auch im isoelektrischen Punkt stabil sind (einige hydrophile Kolloide), andere Stabilitäts-Ursachen (Wasserhüllen etc.) maßgebend sind als die der elektrischen Ladung, indem

---

1) Die allmählich erfolgende Koagulation der Hydrosole über dem Schwellenwert macht es wahrscheinlich, daß die Teilchenladungen nicht ganz konstant sind, sondern gewissen, wenn auch kleinen Schwankungen unterworfen. Diejenigen Teilchen, welche bei ihrem Zusammenstoß, wenn auch vorübergehend, unter ein bestimmtes Potential entladen sind, das also tiefer liegt als das durchschnittliche, werden sich dann irreversibel vereinigen. Daß diese Schwankungen nicht groß sind, geht daraus hervor, daß die normal geladenen Teilchen keinerlei Koagulation unterworfen sind, während doch stets langsame Koagulation eintreten müßte, wenn ein Bruchteil der Gesamtzahl auch nur vorübergehend beträchtlich unter das kritische Potential entladen wäre.

auch im unelektrischen Zustand keinerlei nachweisbare Anziehung zwischen ihnen besteht.

Als Schutzkolloide haben sie die Fähigkeit, die erwähnte Eigenschaft auch auf elektrolytempfindliche Ultramikronen zu übertragen.

Man wird demnach [ähnlich wie späterhin aus der maximalen Koagulationsgeschwindigkeit bei weitgehender Entladung (resp. den daraus berechneten R, vergl. Abschnitt III), wenn jene für reine Metallkolloide genügend charakterisiert sein wird] aus der Lage des kritischen Potentials eines kolloiden Metalls auf das Vorhandensein derartiger Schutzstoffe oder „Schutzhüllen“ schließen können.

Die Teilchenattraktion der Metalle kann also in zweierlei Weise aufgehoben oder herabgesetzt werden: einmal durch elektrische Ladung, dann auch durch Schutzhüllen, und das ist bei Bestimmung der Koagulationsgeschwindigkeit sehr wohl zu beachten; denn nur bei reinen Teilchen der Metallkolloide wird man aus der Abnahme der Teilchenzahl mit der Zeit nicht zu kleine Werte für $\frac{R}{r}$ erhalten. (Vergl. Abschnitt III.)

Andrerseits darf man erwarten, daß bei vollkommen reinen kolloiden Metallen durch Bestimmung des kritischen Potentials und des Radius der Attraktionssphäre neue charakteristische Merkmale für die betreffenden Kolloide aufgefunden werden können oder daß sich wichtige Beziehungen zwischen beiden werden finden lassen.

D. Änderung der Goldkonzentration.

Eine Anzahl Versuche bezweckten den Einfluß der Goldkonzentration auf die Koagulationszeit zu ermitteln. Es wurden die Elektrolytkonzentrationen konstant gehalten, die Goldkonzentrationen variiert (Tab. 5) und die Zeit bestimmt, in welcher die Farbenänderung in Violettrot eintrat. Diese Versuche ergaben keine sehr befriedigenden Resultate, da die Farbennüancen verschieden konzentrierter Goldhydrosole schlecht mit einander vergleichbar sind und die Qualität des Verdünnungswassers großen Einfluß auf die Koagulationszeit ausübt. Immerhin läßt sich erkennen, daß die Koagulationszeit annähernd proportional der Verdünnung wächst.

Tabelle 5. Mischungsverhältnisse.

Verdünnungsgrad der Goldlösung	CC Au	CC H_2O	CC Elektrolyt (a)	Volumen der Flüssigkeit
I	10	0	2	12
III	10	20	6	36
V	10	40	10	60
X	10	90	20	120
XX	10	190	40	240

Figur 5 [1]) erhält einige der erhaltenen Werte für $t_{(VR)}$. Exaktere Ergebnisse sind von der Teilchenzählung zu erwarten. In der Tat wurde durch eine später zu erwähnende Untersuchung von A. Westgren und J. Reitstötter die oben erwähnte Gesetzmäßigkeit bestätigt.

In wenigen vorläufigen Experimenten wurde versucht, den Einfluß der Temperatur (18° und 80° C.) auf die Koagulationszeit t_{VR} kennen zu lernen. Es zeigte sich eine Änderung annähernd entsprechend der Zähigkeitsänderung des Mediums, also durchaus nicht vergleichbar mit dem Temperatureinfluß auf chemische Reaktionen.

E. Einfluß des Zerteilungsgrades.

Eine Keimflüssigkeit Au_{P50}, sowie drei nach dem Keimverfahren hergestellte hochrote kolloide Goldlösungen (Au_{Hyx}) verschiedenen Zerteilungsgrades wurden, ähnlich wie im Abschnitt II B beschrieben, mit Strontiumchlorid (0,05 n Endgehalt) koaguliert. Alle Flüssigkeiten enthielten gleichviel Gold, aber sehr verschiedenen Zerteilungsgrades. Au_P enthielt weitaus die meisten, Au_{Hyx_7} weniger, die anderen noch weniger Teilchen entsprechend der geringeren Menge der zu ihrer Herstellung zugesetzten Keimflüssigkeit Au_P.

1) Alle Hydrosole waren hochrot mit Ausnahme von R_2, dessen Farbe unrein rot erschien, daher die Veränderung namentlich in starker Verdünnung schwer erkennbar; darauf ist wohl die starke Krümmung der Kurve zurückzuführen.

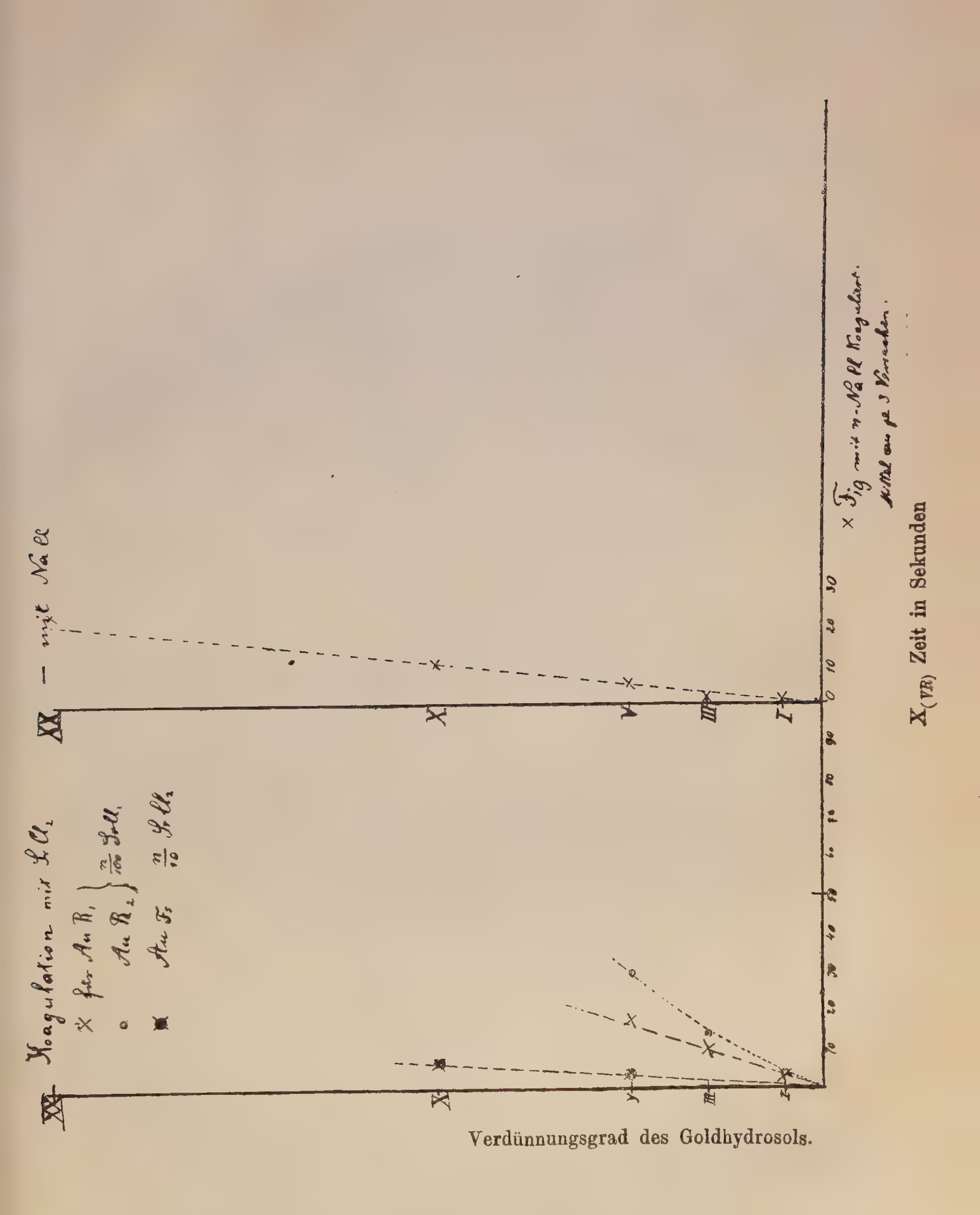

Verdünnungsgrad des Goldhydrosols.
$X_{(VR)}$ Zeit in Sekunden

Tabelle 6.

Bezeichnung	CC Au_P bei der Herstellung zugefügt	$t_{(VR)}$[1]) in Sekunden
$Au_{P_{80}}$	—	< 1
Au_{Hyx_7}	7	2,5
Au_{Hyx_3}	3	4,5
Au_{Hyx_1}	1	20,0
		1) Mittelwert aus 2—3 Versuchen

Man ersieht aus diesen Versuchen den großen Einfluß des Zerteilungsgrades auf die Koagulationszeit, und deren Bestimmung kann bei reinen kolloiden Goldlösungen als vorläufiges Mittel zur Prüfung auf Vorhandensein von Amikronen angewandt werden.

F. Zusammenfassung der bisherigen Versuchsergebnisse.

Die auf Farbänderung bei der Koagulation beruhenden Versuche haben zu dem wichtigen Ergebnis geführt, daß die Koagulationszeit $t_{(VR)}$ bei genügender Elektrolytkonzentration ein Minimum erreicht, das innerhalb der Versuchsfehler in weiten Grenzen unabhängig ist von der Konzentration und Art des fällenden Elektrolyten. Sie ist dann nur abhängig von der Zahl und Größe der vorhandenen Goldteilchen und von der Zähigkeit des Mediums, aber unabhängig von chemischen Wirkungen der Elektrolyte[1]).

Es sind demnach Einflüsse der Natur der fällenden Salze, die bei der langsamen Koagulation (z. B. bei der Bestimmung des Schwellenwerts) so sehr zur Geltung kommen, hier ausgeschaltet und nur solche rein physikalischer Natur bestimmend für den Koagulationsverlauf.

Man darf annehmen, daß bei ausreichender Elektrolytkonzentration eine genügende Entladung gleich nach Durchmischung der Flüssigkeit erreicht wird und daß die Teilchendiffusion dann das Tempo der Koagulation bestimmt.

Die Ergebnisse dieses Abschnittes ermutigten zu einem eingehenden Studium der Koagulation unter Anwendung des Ultra-

1) Es ist hier abgesehen von dem Einfluß etwa vorhandener Verunreinigungen, die, wenn sie den Charakter von Schutzkolloiden besitzen, die Gesetzmäßigkeit verdecken würden.

mikroskops zur Ermittelung der Änderung der Teilchenzahlen mit der Zeit. Diese bilden den Inhalt des Abschnitts III der vorliegenden Abhandlung.

III. Ultramikroskopische Untersuchung der Abnahme der Teilchenzahlen bei der Koagulation.

Entsprechend dem in Abschnitt II entwickelten Programm wandte ich mich der Anfgabe zu, die Abnahme der Primärteilchen mit der Zeit festzustellen. Erst nach Abschluß dieser Arbeit wurde mir die endgültige Theorie von Smoluchowskis bekannt nach welcher nicht nur die Abnahme der Primärteilchen mit der Zeit, sondern auch die Änderung der Gesamtteilchenzahl zur Berechnung der Attraktionsradien herangezogen werden kann. Die Bestimmung der Gesamtteilchenzahl ist aber gegenüber der ersten Aufgabe verhältnismäßig einfach, und ich hätte mir bei Beschränkung auf die letztere viel Zeit und Mühe ersparen können. Immerhin erscheint dieser Arbeitsaufwand nicht vergeblich, da wir jetzt über zwei von einander unabhängige Methoden verfügen, nach welchen die Theorie von Smoluchowskis einer experimentellen Prüfung unterzogen werden kann. Der letzteren Methode haben sich auf meinen Vorschlag später Arne Westgren und J. Reitstötter bedient und sind verhältnismäßig rasch zu recht schönen Resultaten gelangt.

Meine Aufgabe bestand also zunächst darin, in einer gegebenen Goldlösung möglichst genau die Zahl der vorhandenen Primärteilchen festzustellen, diese Lösung mit genügendem Elektrolytüberschuß zu koagulieren, die Koagulation in bestimmten Zeitabschnitten zu unterbrechen und die Zahl der noch vorhandenen Primärteilchen neben den entstandenen Sekundärteilchen festzustellen.

Gerade diese letztere Aufgabe ist besonders schwierig, da die Doppelteilchen und die mehrfachen heller leuchten als die ursprünglichen Primärteilchen und dann, wenn sie außerhalb der hellerleuchteten Schicht des Ultramikroskops liegen, Primärteilchen vortäuschen können. Auch ist zur korrekten Unterscheidung einige Übung erforderlich und genügende Zeit, um sie wenigstens 2—3 Sekunden beobachten zu können, ehe sie das Gesichtsfeld verlassen.

Ich habe daher die bisherigen ultramikroskopischen Einrichtungen im Laufe meiner Untersuchung etwas abgeändert: der Beobachtungsraum im Spaltultramikroskop wurde bedeutend ver-

größert (von 300 μ^3 auf 30—40000 μ^3) und der erleuchtete Raum scharf gegen den dunkeln abgegrenzt.

Weitere Vorbedingungen für die erfolgreiche Durchführung der Aufgabe waren:

1. Anwendung von gleichteiligen, von Amikronen freien Goldhydrosolen;

2. Koagulation mit einer genügenden Menge Elektrolyt, um das Minimum der Koagulationszeit zu erreichen;

3. Unterbrechung der Koagulation durch ein wirksames Schutzkolloid.

A.

1. Die Goldlösungen und deren Koagulation.

Die Goldlösung mußte, wie erwähnt, möglichst gleichteilig und frei von Amikronen sein. Frühere Koagulationsversuche haben öfter ergeben, daß anfangs eine scheinbare Teilchenvermehrung statt der erwarteten -verminderung eintrat, oder daß die Teilchenzahl zunächst konstant blieb.

Wie G. Wiegner und A. Galecki[1]) feststellten, ist dies auf Vorhandensein von Amikronen zurückzuführen, deren Vereinigung zum Auftreten von sichtbaren Submikronen Veranlassung gibt, oder die sich an größere Teilchen anlagern. Derartige Komplikationen treten bei Anwesenheit von Amikronen auf.

Eine neue in Gemeinschaft mit J. Reitstötter ausgearbeitete Modifikation des Keimverfahrens[2]) liefert aber hochrote Goldlösungen, die in Bezug auf Gleichteiligkeit hohen Anforderungen genügen und frei von unsichtbaren Teilchen sind, so daß sie ein gutes Ausgangsmaterial für die vorliegende Untersuchung bildeten.

Zur Verwendung gelangten drei Hydrosole vom Teilchenradius r_1 = 16,8 (Serie A, B, C), r_2 = 13,4 (Serie D) und r_3 = 24,2 $\mu\mu$ (Serie E und F).

Koagulation. Je 50 CC einer 0,2 normalen Kochsalzlösung wurden, wie in Kap. II. B beschrieben, möglichst plötzlich unter starkem Umrühren in je 50 CC der auf das 10—20fache verdünnten Goldlösung geschüttet. Nach Verlauf von 2, 5, 10, 20, 40 und 80 Sekunden wurde nun zur Unterbrechung der Koagulation zu jeder Portion der Flüssigkeit je 10 CC einer 1%igen Lösung von

1) A. Galecki, Z. anorg. Chem., Bd. **74**, S. 177. Wiegner, Koll. Z. 8. 227. 1911.

2) Zsigmondy, Gött. Nachr. v. 22. Juli 1916 und Reitstötter Inaug.-Diss. Göttingen (noch nicht gedruckt).

Gummi arabicum unter lebhaftem Umschwenken gegossen. Diese Menge übertrifft die zur Schutzwirkung erforderliche um das Hundertfache; daß sie zur schnellen und vollständigen Unterbrechung der Koagulation ausreicht, davon habe ich mich durch mehrfache Untersuchung überzeugt. Sowohl die Farbennüance wie die Teilchenzahlen erlitten nach Gummizusatz keine Änderung, auch wenn man die Hydrosole durch mehrere Tage stehen ließ [1]).

Bei späteren Versuchen der Serien E und F wurde auch so verfahren, daß man von den 100 CC koagulierender Flüssigkeit eine kleine Menge, z. B. 10 CC abfüllte und diese in eine größere Menge z. B. 200 CC gummihaltiges Wasser goß, um gleichzeitig mit eintretender Schutzwirkung die Kochsalzlösung bis nahe an den Schwellenwert zu verdünnen und so eine doppelte Gewähr für wirksame Unterbrechung der Teilchenvereinigung zu erreichen.

Die Primärteilchen der so erhaltenen Flüssigkeiten wurden nach entsprechender Verdünnung sofort oder zur Kontrolle nach ein- bis mehrtägigem Stehen ausgezählt. In der Regel ergaben sich bei den zweiten Zählungen keine die Fehlergrenzen der Methode überschreitenden Abweichungen.

2. *Ultramikroskopie der koagulierten Goldsole.*

Einrichtung des Ultramikroskops. Mit gutem Grunde wurde bisher meist in der Ultramikroskopie die Verwendung von möglichst vollkommenen Objektiven hoher Apertur angestrebt: wächst ja die Helligkeit der Beugungsscheibchen proportional dem Quadrat der numerischen Apertur, gleichzeitig wird eine bessere Auflösung der Teilchenabstände erreicht. Leider ist mit Objektiven hoher Apertur und starker Vergrößerung ein Übelstand verknüpft, der bei vorliegender Untersuchung sehr ins Gewicht fällt. Die vollkommeneren Beobachtungmikroskope mit Objektiven hoher Apertur und starker Vergrößerung besitzen eine sehr kleine Sehtiefe (meist wenige μ Tiefe), und der Beleuchtungskegel muß dementsprechend im Raum engster Einschnürung auf eine noch kleinere Tiefe abgegrenzt werden.

Dies bedingt aber Fehlerquellen, die zwar nicht bei der gewöhnlichen Teilchenzählung kleinerer Submikronen zum Zwecke der Größenbestimmung, wohl aber bei Koagulationsversuchen wegen der Anwesenheit hellerer Teilchen sehr ins Gewicht fallen, da

1) Ob das Gummi schon in der ersten Sekunde seine volle Wirkung entfaltet, kann ich allerdings nicht mit Bestimmtheit sagen. Ist der Schutz eingetreten, so ist er ein dauernder.

diese auch außerhalb der hellsten Schicht noch sichtbar werden und kleinere Submikronen vortäuschen können.

Beim Kardioid-Ultramikroskop fällt diese Fehlerquelle zwar weg, seine Anwendung schien aber aus anderen Gründen nicht ratsam [1]).

Ich entschloß mich daher, von der Anwendung der Objektive starker Vergrößerung und Apertur zur Beobachtung abzusehen und zu schwächeren überzugehen. Nach zahlreichen Versuchen wurde als vorläufig zweckentsprechend das Vertauschen der beiden Objektive des Spalt-Ultramikroskops erkannt und zur Anwendung gebracht. Als Beleuchtungsobjektiv diente also für die Untersuchung bei Serie F das Objektiv D^*, welches samt der daran befestigten Küvette zur Anwendung kam, als Beobachtungsobjektiv das System *AA* der Firma Zeiß in Kombination mit dem gewöhnlich verwendeten Meßokular 4 mit Netzteilung.

Als Spalt diente der Bilateralspalt der Firma Winkel, der eine genügende Breite besitzt. Derselbe wurde unmittelbar vor das Beleuchtungsobjektiv D^* gestellt. Die richtige Einstellung desselben erfordert einige Vorsichtsmaßregeln. Um den Beobachtungsraum möglichst scharf vom dunkeln Raum optisch abzugrenzen, wurden mittels eines in den Tubus des Beleuchtungs-Objektivs eingeschobenen zweiten Spalts von ca. 1 mm Breite die von oben und unten kommenden Strahlen abgeblendet; dementsprechend war der Raum engster Einschnürung von zwei nahezu parallelen Horizontalebenen begrenzt. Der dadurch bedingte Lichtverlust wurde durch Anwendung entsprechend grobteiliger Goldhydrosole ausgeglichen. Zur Durchführung der geeigneten Tiefenbegrenzung wurden beide Spalte vorübergehend vertikal gestellt und der Bilateralspalt solange verengt oder erweitert, bis das scharf abgegrenzte Lichtbündel im Raume engster Einschnürung die Innenseiten des Quadrats der Netzteilung oben berührte. Nach Horizontalstellung der beiden Spalte konnte dann gezählt werden. Der zur Beobachtung dienende Raum war dann würfelförmig und sein Volumen $= L^3$, wo L die Länge der Innenseite des Beobachtungsquadrats darstellt. Dieser Raum hatte eine Größe von 39,300 μ^3, und die Hydrosole mußten entsprechend stark, z. B. auf

1) Es wird daselbst ein Raum von ca. 3—6 μ Dicke durch Quarzplatten abgegrenzt. Die Tiefe dieses Raumes ist nicht konstant, da man das Einklemmen von Staubteilchen zwischen Deckglas und Objektträger nicht ganz vermeiden kann; sie müßte also bei jedem Versuch neu bestimmt werden und zwar mit Hilfe der Mikrometerschraube, deren Einteilung zur genauen Tiefenermittelung nicht fein genug ist.

das Tausendfache verdünnt worden. Das relativ große Volumen, das zur Beobachtung gelangt, und die schwache Vergrößerung des Beobachtungs-Mikroskops ermöglichen eine genügend lange Betrachtung der Teilchen, um entscheiden zu können, ob Primär- oder Sekundärteilchen vorliegen.

Ich unterlasse hier die Beschreibung aller Einzelheiten bezüglich Zentrierung und Justierung des Apparats, da die vorliegende Anordnung als provisorisch angesehen werden kann und später durch eine vollkommenere ersetzt werden wird.

3. *Teilchenzählung.*

Um einen guten Mittelwert zu erhalten, wurde bei jedem Einzelwert der Zählung die Flüssigkeit stets um eine kleine Strecke von rechts nach links oder umgekehrt verschoben. Eine auf Stativ befindliche Schraubenklammer, in die der Abflußschlauch der Küvette oberhalb des Quetschhahns eingeklemmt war, diente diesem Zwecke. Nach je 10 Einzelwerten wurde der Quetschhahn geöffnet, um neue Flüssigkeit in den Beobachtungsraum treten zu lassen. Je 200 bis 300 Einzelwerte wurden zur Bestimmung der Teilchenzahl verwendet.

Zunächst wurde allerdings aus 1000—2000 Einzelwerten die Gesamtteilchenzahl n_0 der ursprünglichen Goldlösung bestimmt, hierauf die Zahl der stets in geringer Menge vorhandenen gelben und braunen; durch Subtraktion erhielt man die Zahl der grünen Teilchen.

Bei der Koagulation vermindert sich die Gesamtzahl der Primärteilchen proportional der Verminderung der in der Hauptmenge vorhandenen grünen; da diese viel leichter von den vorhandenen Sekundärteilchen zu unterscheiden sind als die andersfarbigen Primärteilchen, so wurde die Abnahme der grünen Teilchen allein berücksichtigt. Es ist sehr unwahrscheinlich, daß dadurch irgend eine in Betracht kommende Fehlerquelle entsteht, da die braunen und gelben Teilchen annähernd die gleiche Größe (Helligkeit) und Beweglichkeit besaßen wie die grünen. Sie werden sich also an der Koagulation in gleichem Maße beteiligen wie die letzteren und müssen demnach bei der Feststellung der relativen Abnahme der Teilchenzahlen nicht berücksichtigt werden, wohl aber bei der Feststellung der Gesamtteilchenzahl.

B. Serienversuche.

Die Versuche der Koagulationsserien A), B), C) dienten nur zur vorläufigen Orientierung und zur Erlangung der nötigen Übung in der Unterscheidung von Primär- und Sekundärteilchen.

Serie D) wurde noch größtenteils mit dem Spaltultramikroskop in seiner ursprünglichen Anordnung durchgeführt. Als Versuchsobjekt diente Goldhydrosol Au_{HS} mit Teilchen vom Radius $r = 13{,}4\ \mu\mu$. Zur Bestimmung der Teilchenzahl n_0 wurde nicht nur die gewöhnliche Anordnung verwendet, sondern auch eine Anzahl Kombinationen von anderen Objektiven und Okularen. Man erhielt trotz der sehr verschieden großen Räume, in welchen die Teilchen gezählt wurden und bei verschiedenen Graden der Verdünnung recht gute Übereinstimmung der auf gleiche Räume berechneten Teilchenzahlen. Vergl. Tabelle 7.

Tabelle 7.

Beleuchtungsobjektiv	Beob.-Objektiv u. Okular	Verdünnung	Teilchenzahl bei gleichen Räumen u. Verdünnung	Anzahl der Einzelwerte	Raum μ^3
AA	*D** Ok. 4	1/2	2,35 2,20 2,24	100 100 100	299
AA	*D** Ok. 1	1/10	2,32	100	900
AA	*C* Ok. 1	1/20	2,19 1,98	200 200	3300

Die Abweichungen vom Mittelwert sind nicht größer, als sie infolge der zufälligen Unregelmäßigkeit der räumlichen Verteilung in der Regel auftreten. Größer sind die Fehler bei den Koagulationsversuchen, weil mit zu kleinen Räumen gearbeitet wurde.

Bei Serie E) und F) wurde die im Abschnitt III A 2 beschriebene Einrichtung und ein Raum von 39 300 μ^3 verwendet. Bei der starken Verdünnung kommen hier die Staubteilchen des Wassers, resp. der Gummilösung schon erheblich in Betracht, und es gehört einige Übung dazu, sie immer von Primärteilchen zu unterscheiden. Die Möglichkeit aber, die Einzelteilchen länger beobachten zu können, schützt schon erheblich vor Täuschungen. Diese Vervollkommnung der Methode führte auch zu einer recht interessanten Entdeckung, daß nämlich die grünen Primärteilchen zunächst zu

gleichfalls grünen, aber viel helleren Sekundärteilchen sich vereinigen; erst nach einiger Zeit ändern sie ihre Farbe in Braun. Ob die grüne Farbe den Doppelteilchen im allgemeinen zukommt und die braune erst durch Anlagerung eines dritten oder vierten Teilchens zustande kommt, habe ich noch nicht näher untersucht. Ich halte es für viel wahrscheinlicher, daß die grünen Sekundärteilchen dadurch entstehen, daß die Primärteilchen zunächst noch durch eine ganz dünne Wasserhaut oder durch Spuren fremder Kolloidstoffe von einander getrennt sind, und daß erst ihre allmählich erfolgende ganz dichte Aneinanderlagerung die Farbänderung bewirkt. Das Gummi arabicum verhindert diese während der Koagulation eintretende Verdichtung, und so kommt es, daß man die grünen Sekundärteilchen nachher im Ultramikroskop zu sehen bekommt. So waren beim 3-Sekunden-Versuch von 197 grünen Primärteilchen 41 verschwunden und dafür 18 hellgrüne aufgetreten, während die Zahl der gelben und roten sich von 22 auf 18,5 vermindert hatte. Bei einem anderen Versuch waren nach 80 Sekunden von 197 grünen Primärteilchen noch 48 vorhanden, außerdem 5 hellgrüne Sekundärteilchen, während die Hauptmenge der letzteren braun gefärbt war.

Für die Serien E und F wurde ein hochrotes Hydrosol H mit ziemlich großen Teilchen verwendet.

$$\text{Teilchenradius } r = 24{,}2\ \mu\mu, \qquad n_0 \begin{cases} \text{für } E = 0{,}55 \,.\, 10^{10} \\ \text{„} \quad F = 0{,}27 \,.\, 10^{10}. \end{cases}$$

Auf 197 grüne Teilchen waren 22 gelbe und rote Primärteilchen vorhanden.

Die Resultate der Koagulationsversuche finden sich in der folgenden Tabelle.

Zeit in Sekunden von Beginn der Koagulation an	Zahl der grünen Primärteilchen für die Serien		
	D	*E*	*F*
0	1,93	1,97	1,97
2	1,42	1,35	—
3	—	—	1,56
5		1,19	—
10	1,17	0,89	—
20	0,75	0,52	1,12
30	0,52	—	—
40	—	0,29	{ 0,66 / 0,76 (?)
60	—		0,44
80	—		0,49 (?)

Man erkennt gewisse Unregelmäßigkeiten, namentlich bei den Werten für kurze Koagulation und bei Serie *F* für 40, 60 und 80 Sekunden. Ich vermute, daß diese letzteren auf kolloide Verunreinigungen des destillierten Verdünnungswassers zurückzuführen sind, deren Wirkung umsomehr in Betracht kommt, je stärker die Verdünnung ist und je länger die Koagulation dauert.

In der Tat geben die über eine halbe bis mehrere Stunden ausgedehnten Versuche ganz unmögliche, viel zu kleine β-Werte.

Einen direkten Beweis für die Wirkungen der Verunreinigungen des Wassers geben folgende Versuche: AuH_1 wurde in üblicher Weise mit Wasser verdünnt und zwar *A*) mit Wasser, das für die Versuchsserie gedient hatte; *B*) mit besonders gereinigtem Wasser. Nach sechs Stunden wurde die Koagulation unterbrochen.

Die Zählung ergab:

	Noch vorhandene grüne Primärteilchen	Gelbe und braune Teilchen
A)	36	134
B)	3,2	20

Sowohl die Zahl der Primär- wie der Sekundärteilchen war im Falle *B* viel kleiner als im Falle *A*, also die Koagulation in derselben Zeit viel weiter vorgeschritten. Man darf annehmen, daß der Salzzusatz, geradeso wie die Abscheidung der Farbstoffe bei der Abfärbung der Fasern in der Färberei hier auch die Abscheidung der spurenweise überall vorhandenen Wasserkolloide (Silikate aus dem Glase, organische Kolloide aus Staubteilchen entstanden etc.) begünstigt und daß eine so entstandene Schutzhülle der Vereinigung der Goldsubmikronen hinderlich ist, eine länger dauernde Koagulation mehr beeinträchtigt, ja vielleicht vollkommenen Schutz auf einzelne Teilchen ausübt. Die Wirkung dieser Verunreinigungen kommt bei der kurzen Koagulation weniger in Betracht, bei der lange dauernden aber um so mehr. Ich vermute, daß dieser Einfluß bei allen Koagulationsversuchen mit reinen Goldteilchen zur Geltung kommt, sobald man die Versuchsdauer über mehrere Minuten hinaus ausdehnt; denn auch bei den Versuchen von Westgren und Reitstötter zeigt sich eine Abnahme der β-Werte bei höheren Koagulationszeiten und stärkerer Verdünnung. Bei den Versuchen waren mir die Herren Dr. Bachmann, Dr. J. Gann und Herr J. Reitstötter be-

hilflich, denen ich für ihre Mitwirkung meinen besten Dank ausspreche.

C. Vergleich mit der Theorie.

Nach v. Smoluchowski[1]) ist die Gesamtzahl der in einem Volum v zur Zeit t nach Koagulationsbeginn noch existierenden Teilchen

$$\Sigma\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \cdots = \frac{\nu_0}{1+\beta t} \tag{1}$$

worin ν_0 die ursprünglich im Volumen v enthaltene Zahl der Primärteilchen bedeutet, ν_1, ν_2, ν_3 die Zahlen der zur Zeit t vorhandenen einfachen, doppelten, dreifachen bedeuten und $\beta = 4\pi n_0 DR$[2]). — Die Anzahl der einfachen Primärteilchen ist zur Zeit t

$$\nu_1 = \frac{\nu_0}{(1+\beta t)^2} \tag{2}$$

auf diese Formel beziehen sich die vorliegenden Messungen; Westgren und Reitstötter haben die Abnahme der Gesamtteilchenzahl festgestellt, bei ihrer Arbeit ist Formel (1) anzuwenden.

v. Smoluchowski hat für meine Versuchsresultate die β-Werte nach der Formel (2) $\left(\beta = \frac{1}{t}\left[\sqrt{\frac{\nu_0}{\nu_1}} - 1\right]\right)$ berechnet; sie finden sich in den drei folgenden Tabellen zusammengestellt.

Serie *D*.

t	ν_1	β
0	1,93	
2	1,42	(0,083)
10	1,17	0,028
20	0,75	0,0302
30	0,52	0,0309

$\beta = 0{,}0299$

Serie *E*.

t	ν_1	β
0	1,97	
2	1,35	(0,105)
5	1,19	(0,058)
10	0,89	0,049
20	0,52	0,0475
40	0,29	0,0403

$\beta = 0{,}0456$

Serie *F*.

t	ν_1	β
0	1,97	
3	1,56	(0,040)
20	1,02	0,0195
40	0,66	0,0183
	0,76	(0.0153)
60	0,44	0,0187
80	0,49	(0,0126)

$\beta = 0{,}0188$

Das aus der Teilchenzählung berechnete β sollte für jede Versuchsserie konstant sein; sieht man von den unzuverlässigen Werten

1) v. Smoluchowski Z. f. physikal. Chem. 1917 und phys. Zeitschrift **17**, 23. 1916.

2) Hierin bedeuten n_0 die Anzahl der ursprünglichen Primärteilchen in 1 CC, D den Diffusionskoeffizienten der Teilchen, R den Radius der Anziehungssphäre.

ab, so zeigt sich in der Tat annähernde Konstanz, soweit das bei den beträchtlichen experimentellen Schwierigkeiten zu erwarten ist. Die geklammerten Werte für 2—3 Sekunden und ebenso die von mir mit Fragezeichen versehenen sind von v. Smoluchowski mit Recht bei der Bestimmung des Mittelwerts von β unberücksichtigt gelassen worden.

Aus

$$\frac{R}{r} = \frac{\beta}{\frac{2}{3}\frac{H\Theta}{N}\frac{1}{\eta}n_0}\ ^{1)}$$

wurde noch das Verhältnis der Radien der Attraktionssphären zum Teilchenradius berechnet.

Es ergab sich für die Serie D): $\frac{R}{r} = 1{,}40$, für die Serie E) $\frac{R}{r} = 3{,}12$, für die Serie F) $\frac{R}{r} = 2{,}63$. Die Werte für D) können wir mit Bezug auf das früher Gesagte unberücksichtigt lassen, da wegen Anwendung der alten Einrichtung des Spaltultramikroskops die β-Werte in dieser Serie sicher zu klein sind.

Aus E) und F) ergibt sich, daß das Verhältnis von $\frac{R}{r}$ ca. 2, 6 bis 3 beträgt, daß also die Radien der Wirkungssphäre mehr als doppelt so groß sind wie die Teilchenradien, was auch der Fall sein muß, wenn sie sich auf eine gewisse Entfernung anziehen, da $\frac{R}{r} = 2$ für den Fall des Haftens bei unmittelbarer Berührung gilt. (Vergl. Anm. [1]) p. 5.)

Eine sehr beachtenswerte Ergänzung und Erweiterung des experimentellen Materials ist in jüngster Zeit von Westgren und Reitstötter geschaffen worden, welche die Verminderung der Gesamtteilchenzahlen festgestellt haben und zwar nicht im Spaltultramikroskop, sondern nach der schon von Westgren früher ausgearbeiteten Zählmethode in einer Pizein-Kammer zwischen Deckglas und Objektträger. Sowohl die Formel zur Berechnung von β resp. $\frac{R}{r}$, wie auch die Methode waren also andere, als die von mir benützten; trotzdem zeigte sich eine recht gute Übereinstim-

1) $H = 8{,}31 \,.\, 10^7$
$N = 6{,}2 \,.\, 10^{23}$
$\eta = 0{,}01$
$\Theta = 290$

mung in den $\frac{R}{r}$-Werten. Im folgenden gebe ich einige Resultate aus dieser Arbeit wieder. Der Teilchenradius war hier stets 96 $\mu\mu$.

I

$\nu_0 = 2,69 . 10^8$ pro CC
$\eta = 1073 . 10^{-5}$
$\Theta = 290,4$

Zeit in Sekunden	$(\Sigma\nu) 10^{-8}$	$\frac{R}{r}$
0	2,69	—
60	2,34	3,74
120	2,25	2,47
240	2,02	2,07
420	1,69	2,10
600	1,47	2,09
900	1,36	1,62
1320	1,20	1,41

II

$\nu_0 = 5,22 . 10^8$ pro CC
$\eta = 1060 . 10^{-5}$
$\Theta = 291,0$

Zeit in Sekunden	$(\Sigma\nu) 10^{-8}$	$\frac{R}{r}$
0	5,22	—
60	4,35	2,56
120	3,63	2,81
180	3,38	2,33
300	2,75	2,33
420	2,31	2,31
600	1,95	2,16
900	1,48	2,19

III

$\nu_0 = 10,07 . 10^8$ pro CC
$\eta = 1045 . 10^{-5}$
$\Theta = 291,8$

Zeit in Sekunden	$(\Sigma\nu) 10^{-8}$	$\frac{R}{r}$
0	10,07	—
60	7,08	2,75
120	5,54	2,60
180	4,96	2,17
240	4,05	2,40
300	3,82	2,12
360	3,39	2,15

IV

$\nu_0 = 20,22 . 10^8$ pro CC
$\eta = 1082 . 10^{-5}$
$\Theta = 290,2$

Zeit in Sekunden	$(\Sigma\nu) 10^{-8}$	$\frac{R}{r}$
0	20,22	—
30	13,40	3,41
60	11,00	2,80
120	7,92	2,60
180	6,30	2,48
300	4,82	2,14
420	3,73	2,15
600	2,86	2,05

Man sieht, daß die Koagulationszeiten annähernd proportional der Verdünnung zunehmen und daß $\frac{R}{r}$ im Mittel fast durchaus größer als 2, 2 ist, im Mittel der drei ersten Versuche meist größer als 2, 5, in guter Übereinstimmung mit den Resultaten meiner

Serien E) und F). Auch bei anderen Teilchenradien (76, 120 und 182 $\mu\mu$) wurde das Verhältnis $\frac{R}{r}$ bei den ersten drei Versuchen im Mittel 2,2 bis 2,4 gefunden. Ausführlicheres darüber wird von den beiden Forschern demnächst selbst berichtet werden. —

Die allmähliche Abnahme von $\frac{R}{r}$ kann nicht wundernehmen; denn sowohl die oben erwähnte Wirkung der Wasserkolloide wie auch eine vereinfachende Annahme bei der Ableitung der Formel müssen die Resultate in diesem Sinne beeinflussen[1]).

Der Einfluß der Wasserkolloide ist hier allerdings durch Anwendung von sorgfältig gereinigtem Wasser stark herabgesetzt; dafür wurde aber in stärkerer Verdünnung gearbeitet, wodurch das Verhältnis $\frac{\text{Wasserkolloide}}{\text{Goldoberfläche}}$ ungünstig beeinflußt wird[2]). —

Auch bei meinen Versuchen macht sich, falls man alle Beobachtungen heranzieht, eine Abnahme von β, resp. von $\frac{R}{r}$ bemerkbar; hier aber sind die ersten Werte als unzuverlässig zu bezeichnen, da sie sich nur auf wenige Sekunden beziehen. Bei Westgren und Reitstötter sind aber die ersten Koagulationsversuche schon auf eine Minute und darüber ausgedehnt, und die Unterbrechung geschah mit einem ganz ungewöhnlichen Überschuß des wirksamsten Schutzkolloids, der Gelatine, beinahe momentan.

Durch alle diese Versuche erscheint auf Grund der v. Smoluchowskischen Koagulationstheorie die schon lange gemachte Annahme, daß die Koagulation eines irreversiblen Hydrosols auf Anziehungskräfte zwischen den Ultramikronen zurückzuführen ist, weitgehend begründet. Die Stabilität der Hydrosole mit normaler Teilchenladung ist auf die elektrische Ladung der Teilchen zurückzuführen, und dieses Hindernis der Teilchenvereinigung wird durch Entladung, welche der Elektrolytzusatz bewirkt, beseitigt. Die Theorie von v. Smoluchowski gestattet auch ein ungefähres Urteil über die Radien der Attraktionssphäre; diese er-

---

1) Die Ableitung der Formel enthält die Annahme, daß $D \cdot R$ oder $\frac{R}{r}$ auch für Doppelteilchen und mehrfache Teilchen konstant ist. Diese vereinfachende Annahme ist bei Doppelteilchen sicher nicht ganz erfüllt und wird um so weniger zutreffen, je weniger dicht sich die Teilchen bei der Koagulation zusammenlagern, je mehr sie also von der gleichfalls vorausgesetzten Kugelgestalt abweichen. Es ist wohl anzunehmen, daß dieser Einfluß zur Geltung kommt; aber obige Resultate sprechen mehr für den Einfluß der Wasserkolloide.

2) Die Kolloide können aus dem Glase stammen.

weisen sich als nicht viel größer als der doppelte Teilchenradius. Das Gesetz der Abnahme dieser Anziehungskräfte mit der Entfernung ist vorläufig noch nicht feststellbar. Es ist aber anzunehmen, daß die Attraktion sehr stark mit der Entfernung abnimmt, wie überhaupt bei Kräften, die in der Kapillaritätslehre in Betracht kommen.

Dafür sprechen viele Tatsachen in der Kolloidchemie, so die irreversible Koagulation der Metallhydrosole, die bekanntlich einen sehr dichten, wasserarmen Niederschlag geben. Auf keinerlei Weise gelingt es, die einmal dicht vereinigten Metallteilchen wieder voneinander zu trennen, weder durch Wegwaschen der fällenden Elektrolyte, noch durch nachträgliche Aufladung der Teilchen, noch auf andere Weise. Sobald zwei Goldteilchen mit reiner Oberfläche vereinigt sind, lassen sie sich nicht mehr trennen; verhindert man aber die innige Berührung der einzelnen Metallteilchen, z. B. durch zwischengelagerte Kolloide (z. B. kolloide Kieselsäure, Zinnsäure, bei Cassiusschem Purpur), so läßt sich durch nachträgliche Aufladung die Trennung trotz eingetretener Koagulation wieder durchführen.

In solchen Fällen, wenn also die Metallteilchen in einiger Entfernung voneinander gehalten werden, vermag die elektrische Ladung die Teilchenattraktion noch zu überwinden.

D. Einfluß der Teilchenabstände.

Das Gleiche gilt von allen peptisierbaren Gelen, wie vom Gel der Zinnsäure, des Eisenoxyds, des Arsensulfids etc. Dieselben sind meist sehr wasserreich, und man darf annehmen, daß ihre Amikronen in diesem Zustande durch Wasserhüllen von einander getrennt sind. Ladet man die Gelteilchen genügend auf (z. B. bei Zinnsäure durch Spuren von Alkali, bei kolloidem Eisenoxyd durch kleine Mengen von Säure oder Ferrichlorid etc.), so tritt Zerfall des Gels ein und zwar in einer später näher zu beschreibenden Weise, indem der flockenartige Verband zunächst an den Stellen gelöst wird, wo er an sich schon gelockert war. Die sehr interessanten Beobachtungen werde ich bei anderer Gelegenheit beschreiben.

Trocknet man das Gel aber ein, so daß die Einzelteilchen zur Berührung kommen, dann ist die Peptisation mit verdünnten Lösungen von Alkali oder Säure überhaupt nicht mehr möglich [1]), und man muß zu energischem chemischen Eingriff mit konzen-

1) Vergl. Zur Erkenntnis der Kolloide p. 177 u. 178. Jena 1905.

trierten Reagentien schreiten, um auf dem Umwege über eine chemische Verbindung das Sol zurückzugewinnen.

In überraschender Weise dokumentiert sich der Einfluß des Teilchenabstands bei sehr lockeren, leicht peptisierbaren Hydrogelen der Zinnsäure, z. B. bei dem von Heinz[1]) untersuchten Gel, das sich mit Alkali noch peptisieren ließ bei einem Molekularverhältnis 200 SnO_2 zu 1 K_2O. Heinz fand, daß nach einmaligem Absaugen dieses Gels (wobei es einen Teil seines Wassergehalts verlor) nicht mehr mit stark verdünnter Kalilauge peptisierbar war. Näher ist dies Verhalten von Glixelli untersucht worden[2]).

Es zeigte sich, daß um so mehr konzentrierte Lauge und um so größere Mengen derselben zur Peptisation gebraucht wurden, je mehr Wasser beim Filtrieren aus dem Gel entfernt worden war, je näher die Teilchen also an einander rücken, und zwar ist, wie aus der Tabelle in Anmerkung [2]) ersichtlich, ein so enormer Unterschied in der Peptisierbarkeit, zu erkennen, daß man an chemische Veränderung des Niederschlags denken möchte, etwa an Dehydratation, die aber bei Gegenwart von überschüssigem Wasser und wegen des angewandten niederen Druckes sicher nicht eingetreten ist.

Alle diese Versuche, ferner auch die Tatsache, daß die Gele beim Eintrocknen immer fester werden u. a. m. geben Belege, für die von vornherein plausible Annahme, daß die Attraktionskräfte mit abnehmendem Radius stark zunehmen.

---

1) E. Heinz, Inaugural-Diss. Göttingen 1914 u. Referat: Zsigmondy Z. f. anorg. Chemie. **89**, 213; 1914.

2) Aus den noch nicht publizierten Versuchen sei Folgendes mitgeteilt: das Gel der Zinnsäure war so leicht peptisierbar, daß das Molarverhältnis 1 Mol KHO : 500 Mol SnO_2 bereits vollständige Peptisation bewirkte. Nach Abfiltrieren desselben in der in A) bezeichneten Weise, waren die in B) gegebenen Molarverhältnisse KHO : SnO_2 noch nicht ausreichend, vollständige Peptisation bei einstündigem Kochen zu bewirken.

A)	B)
1) Auf dem Papierfilter gesammelt	1 : 20
2) Auf dem Kollodiumfilter abgesaugt	1 : 10
3) Auf dem Kollodiumfilter so stark wie möglich abgesaugt (Gel pulvrig)	1 : 5

Gel 3) brauchte mehr als viermal soviel KHO als Gel 1) und hundertmal soviel als das frische Gel, um wieder in ein Sol zurückverwandelt zu werden. Glixelli hat auch gefunden, daß das Gel selbst eine schwache negative Ladung trägt, die aber nicht ausreicht, um Peptisation herbeizuführen. (Koll. Z. 1395; 1913.)

E. Beziehungen zu anderen Erscheinungen.

Die Attraktionsradien R geben demnach nicht die größte Distanz an, in welcher zwei Teilchen überhaupt auf einander anziehend wirken, sondern sind jedenfalls kleiner als die Sphären einer bereits vorhandenen schwachen Anziehung, und es ist anzunehmen, daß schnell bewegte Teilchen die Sphären R durcheilen ohne sich zu vereinigen, während langsam bewegte auf größere Distanz als R zum Zusammentreten gezwungen werden.

Noch größer würden die Anziehungsbereiche sein, wenn die Anziehung polar auf bestimmte Stellen verteilt wäre wie bei Magneten. Es ist nicht unmöglich, daß derartiges den Tatsachen entspricht, und ich möchte auf einige Erscheinungen hinweisen, die damit vereinbar sein könnten. Häufig tritt der Fall ein, daß Kolloide kristallisieren. Besonders ausgesprochen zeigt sich dies beim kolloiden Silber[1]. Nicht nur Hydrosole desselben, sondern auch pulvrige Niederschläge verwandeln sich nach Wochen oder Monaten in ein Haufwerk von Kristallen

In der Regel wird diese Kristallisation erklärt unter der Annahme, daß größere Teilchen auf Kosten der kleineren heranwachsen, indem diese sich zu einer gegenüber den größeren Kriställchen übersättigten, aber gegenüber den kleineren Teilchen ungesättigten Lösung auflösen, in der die erstgenannten Teilchen fortwährend weiterwachsen, bis alle kleineren aufgezehrt sind. v. Weimarn nimmt aber an, daß die Teilchen selber zu größeren Kristallen zusammentreten.

Sollte ein solches Zusammenwachsen der Ultramikronen zu wohlausgebildeten mikroskopischen Kristallen tatsächlich stattfinden, so würde das auf bevorzugte Richtungen schließen lassen, mit denen die Teilchen sich anziehen. Allerdings müßten erst Beweise für den tatsächlich erfolgenden Zusammenschluß der Submikronen zu mikroskopischen Kristallen erbracht werden, und bei kolloidem Gold ist ein Heranwachsen der Niederschläge zu solchen Kriställchen noch nicht beobachtet worden.

F. Attraktion zwischen verschiedenartigen Teilchen. Schutzwirkung.

Teilchenvereinigung zwischen verschiedenartigen, wenn auch gleichsinnig geladenen Teilchen ist schon lange beobachtet worden,

---

1) C. Lea, v. Weimarn, Zsigmondy, vergl. des Verfassers Kolloid-Chemie, 1912. S. 131.

sie gehört zu den alltäglichen Erscheinungen der Kolloidchemie, und wir treffen sie an bei der Schutzwirkung. Hier aber ist der Vorgang von dem der Koagulation insofern verschieden, als er nicht zu einer vollständigen Ausflockung führt, sondern zum Stillstand kommt, wenn die Teilchen des einen Kolloids genügend von denjenigen des anderen aufgenommen haben[1]). Die Ultramikronen der elektrolytempfindlichen Kolloide bleiben isoliert und werden geradezu gegen Koagulation durch Elektrolyte geschützt. Zuweilen, wenn die Teilchen des Schutzkolloids groß sind, vereinigen sich auch mehrere Goldteilchen mit einem des Schutzkolloids, und dieser Vorgang kann ultramikroskopisch verfolgt werden[1]).

Wir haben hier also Attraktion zwischen verschiedenartigen Teilchen, selbst wenn dieselben gleichsinnig und stark elektrisch geladen sind wie bei ammoniakalischen Caseinlösungen und kolloidem Gold. Bei den enormen Unterschieden der Schutzwirkung zwischen verschiedenen Kolloiden müssen wir spezifische Anziehung annehmen, die ähnlich der chemischen Affinität von der Natur der in Betracht kommenden Substanzen abhängig ist. W. Biltz hat seiner Zeit, um dieser Ähnlichkeit Ausdruck zu verleihen, für die Ursachen derartiger Wirkungen den Namen Zustandsaffinität vorgeschlagen.

G. Beziehungen zu bisherigen Theorien der Koagulation.

Es ist nicht meine Absicht, eine eingehende Kritik der früheren Koagulationstheorien zu geben, und ich verweise diesbezüglich auf die Ausführungen von Fr. Powis[2]) und v. Smoluchowski[3]). Nur einige Bemerkungen, die Problemstellung betreffend, mögen hier gestattet sein.

Die meisten Koagulationstheorien sind zurückzuführen auf zwei von Hardy aufgestellte Fundamentalsätze, deren wesentlichsten Inhalt ich hier wiedergeben möchte[4]).

1. Der isoelektrische Punkt stellt sich als ein solcher von großer Bedeutung heraus, da mit Annäherung an diesen die Sta-

1) Näheres über Schutzwirkung siehe des Verf. Kolloidchemie p. 112. Nur wenn die beiden reagierenden Kolloide entgegengesetzte Ladung tragen, tritt bei gewissen Mengenverhältnissen vollkommene Koagulation ein (W. Biltz, Neißer u. Friedemann).

2) Z. Phys. Ch. **89**. S. 186—212; 1914.

3) v. Smoluchowski, ib. 1917.

4) Z. Phys. Ch. **33**, S. 385; 1900.

bilität des Hydrosols abnimmt und im isoelektrischen Punkt verschwindet, indem Koagulation oder Fällung eintritt [1]).

2. Das Koagulationsvermögen eines Salzes ist durch die Wertigkeit eines seiner Ionen bestimmt; das koagulierende Ion hat immer das entgegengesetzte elektrische Zeichen wie das Teilchen [2]).

Diese Sätze sind (neben einigen anderen) von Hardy näher begründet worden. Gegen den ersten wurden aber Einwände erhoben, auf deren wichtigsten schon weiter oben eingegangen worden ist [3]).

Die Betrachtung der Kurve Fig. 4 (Abschn. II C) lehrt, daß Hardy in der Tat recht hat, wenn er sagt, daß die Stabilität des Hydrosols mit Annäherung an den isoelektrischen Punkt abnimmt, daß aber andrerseits Powis nicht mit Unrecht betont, daß das Gebiet der schnellen Koagulation bereits vor der vollständigen Entladung der Teilchen erreicht wird. Bei kolloidem Gold hat diese Feststellung allerdings nur die Bedeutnng einer kleinen Korrektur, da im Gebiet der schnellen Koagulation die Teilchen schon recht weitgehend entladen sind, man also dem isoelektrischen Punkt schon nahe steht.

Diese beiden Sätze Hardys waren, wie erwähnt, grundlegend für die meisten Theorien der Koagulation und enthalten zwei Fundamentalprobleme, die von den Autoren und Referenten, welche sich mit Koagulationstheorien befaßten, nicht immer genügend auseinander gehalten wurden.

Die erste Frage könnte etwa so formuliert werden:

Warum treten die Teilchen der elektrolytempfindlichen Hydrosole zusammen, wenn sie bis zum isoelektrischen Punkt (oder unter das kritische Potential) entladen werden?

---

1) Vergl. S. 388 der Hardyschen Arbeit (der Satz ist leider durch die Übersetzung entstellt und in fehlerhaftem Deutsch wiedergegeben).

2) Vergl. S. 391 der Hardyschen Arbeit.

3) Ich brauche hier nicht auf Billitzers Einwand einzugehen, nach welchem Hydrosole gerade im isoelektrischen Punkte besonders stabil sein sollen, da derselbe nicht auf einwandfreier experimenteller Grundlage ruht. Dagegen haben Picton und Linder schon 1905 (Journ. Chem. Soc. 87, 1934) aus Adsorptionsversuchen von kolloidem Ferrioxyd und Arsensulfid gegenüber sauren und basischen Farbstoffen geschlossen, daß die körnigen Aggregate in diesen Hydrogelen noch einige Ladung behalten, daß also die zwischen Teilchen und Flüssigkeit bestehende Potentialdifferenz nicht vollkommen aufgehoben, sondern nur soweit vermindert wird, daß Kohäsionskräfte die abstoßenden Kräfte, die durch die Potentialdifferenz hervorgerufen werden, gerade zu überwinden vermögen. Dieser Gedanke ist, wie erwähnt, von Powis, der sich auf ganz anderes Versuchsmaterial stützt, näher begründet worden.

Die zweite Frage: Welche Prozesse spielen sich bei der Entladung der Teilchen ab, wie erklärt sich die Wertigkeitsregel? ist viel verwickelter und kann wohl erst dann präzise beantwortet werden, wenn wir über die Natur der Teilchenladung genauer unterrichtet sind.

Hieran schließen sich noch einige Fragen über das Wesen, die Lage und Dicke der elektrischen Doppelschicht, schließlich über den Gültigkeitsbereich der Wertigkeitsregel, ihre Ausnahmen u. a. m.

Speziell Probleme dieser Art sind gewöhnlich in den Vordergrund des Interesses gestellt und dabei das erste Fundamentalproblem nicht immer genügend beachtet worden.

Bezüglich der ersten Frage sind Ansichten geäußert worden, die zunächst unser Interesse beanspruchen.

Bredig[1]) stellte 1901 die Theorie auf, daß es sich bei der Koagulation um eine „kapillarelektrische Oberflächenverkleinerung" handle, welche um so schneller verläuft, je größer die Verminderung der Potentialdifferenz gegen das Medium ist. Wie die Oberflächenspannung des Quecksilbers im isoelektrischen Punkt ein Maximum aufweist, so sollen auch die Kolloidteilchen ein Maximum der Oberflächenspannung gegen das Wasser besitzen, und darauf beruhe die schnelle Koagulation.

Es soll also eine stets bestehende Oberflächenspannung zwischen Teilchen und umgebendem Medium geradeso wie beim Lippmann-Phänomen im isoelektrischen Punkt ein Maximum haben, und die Teilchen zusammenführen.

Wenn die Analogie mit dem Lippmann-Phänomen soweit zutreffend wäre, so müßte die Oberflächenspannung in allen Fällen also auch bei normal geladenen Kolloidteilchen Koagulation bedingen, nur etwas langsamer. Dies widerspricht der Tatsache, daß kolloide Lösungen unter Umständen jahrelang unverändert bleiben, aber sofort koagulieren, wenn man Elektrolyte hinzufügt[2]). Auch ist nicht recht ersichtlich, wie die Oberflächenspannung der Kolloidteilchen gegen Wasser zwei Teilchen zusammenführen soll, die garnicht in einer Oberfläche liegen, sondern getrennt voneinander in ihr schweben[3]). Nimmt man aber an, daß

---

1) Anorganische Fermente, S. 15. Leipzig 1901.

2) Vergl. auch Freundlichs Bemerkungen in d. Ztschr. f. physik. Chem. Bd. **80**, 141. 142; 1903, ferner Ellis ib. **80**, 597; 1912.

3) Man kann unter Aufrechterhaltung der Oberflächenspannung als wirksame Ursache ein solches Aneinanderschieben — auch fester Teilchen — ohne Verschmelzung, wie v. Smoluchowski in Graetz Handb. d. Elektr. u. Magnet.

die Oberflächenspannung im Moment der durch die Brownsche Bewegung herbeigeführten Berührung zweier Teilchen zur Geltung kommt, so würde nur dann eine wirksame Verkleinerung der Oberfläche herbeigeführt werden können, wenn die beiden Teilchen gleich Tröpfchen einer vollkommenen Flüssigkeit miteinander verschmelzen würden[1]). Daß dies nicht der Fall ist, daß die Teilchen sich vielmehr flockenartig zusammenlagern, habe ich bei kolloidem Gold an anderer Stelle[2]) aus optischen Gründen gefolgert. Powis ist bei Emulsionen zu demselben Resultat gekommen[3]). Auch aus anderen Erscheinungen kann man schließen, daß eine derartige Verkleinerung der Gesamtoberfläche bei der Koagulation in der Regel nicht eintritt. — Diese Dinge waren allerdings zur Zeit der Aufstellung der Bredigschen Theorie noch nicht bekannt.

Billitzer nahm an, daß die fällenden Ionen als Koagulationszentren wirken, indem ein Ion zahlreiche Teilchen entladet und so sammelnd auf die Primärteilchen einwirkt. Diese Annahme steht aber in Widerspruch mit der Elektronentheorie, nach welcher ein Teichen keine kleinere Ladung aufweisen kann als ein einwertiges Ion, und mit den Tatsachen, da die Ladung der Ultramikronen in der Regel viel größer ist als die der Elektrolytionen, was schon aus der Möglichkeit hervorgeht, sie allmählich zu entladen. (Versuche von Burton, The Svedberg, A. Galecki u. a.)

Freundlich hat in früheren Arbeiten angenommen, daß Asymmetrien der elektrischen Ladung die Teilchen — während des Elektrolytzusatzes — zusammenführen; auch diese Auffassung hat sich nicht bewährt[4]), und Freundlich hat sie selbst zum Teil verlassen[5]).

Es bleibt, wenn man von unbegründeten Hypothesen (z. B. über Oberflächenspannung zwischen Wasserhüllen und dem umge-

---

München 1914, Bd. II, p. 421 bemerkt, durch bestimmte Annahmen über die Kapillarkräfte erklären; dann erscheint es aber einfacher, diese Kräfte als Ursache der Teilchenvereinigung anzusehen, als die Oberflächenspannung, deren Begriff hypothesenfrei durch den Ausdruck $\frac{\text{Oberflächenenergie}}{\text{Fläche}}$ gegeben ist.

1) Bei Tröpfchen, die einander berühren, ohne zusammenzufließen, kommt die Oberflächenspannung im Sinne der eben wiedergegebenen Definition gar nicht zur Geltung (vergl. die vorhergehende Anm.).

2) Kolloidchemie p. 107, Leipzig 1912.

3) Z. phys. Chem. **89**. p. 194 unten. 1915.

4) Vgl. Powis ib. p. 207, v. Smoluchowski ib.

5) Freundlich u. Ishizaka ib. **83**. 125 u. Koll. Zeitschrift XII, 235; 1913. Freundlich u. Schlucht, Z. phys. Chem. **85**. 658; 1913.

benden Wasser u. dgl.) absehen will, noch die einfache Annahme, die schon früher öfter ausgesprochen wurde[1]), aber in der Regel wenig Beachtung gefunden hat, daß zwischen den entladenen Teilchen Anziehungskräfte bestehen, die die Teilchenvereinigung herbeiführen. In vorliegender Arbeit hat diese Auffassung auf Basis der Theorie von v. Smoluchowski eine eingehende Begründung erhalten.

Wir können damit also den Satz aussprechen, daß die Koagulation elektrolytempfindlicher Hydrosole auf Anziehungskräfte zwischen den Teilchen zurückgeführt werden kann, deren Wirkung bei genügender elektrischer Teilchenladung durch diese kompensiert wird. Der Elektrolytzusatz vermindert oder neutralisiert die Ladung, und dann tritt die Attraktion in Wirkung.

Die zweite Frage: Welche Vorgänge spielen sich bei der elektrischen Entladung ab, kann, wie erwähnt, wohl erst dann präzise beantwortet werden, wenn man über die Ursachen der Teilchenladung vollkommen orientiert ist.

Da zwei Körper, die sich berühren aber fast immer Kontaktpotentiale annehmen, andrerseits in wässriger Lösung Ionen vorhanden sind, so werden mannigfache Ursachen zu berücksichtigen sein.

Bei Berührung von Isolatoren tritt, wie Coehn gezeigt hat, Ladung nach Maßgabe der Dielektrizitätskonstante ein, und man wird hier wohl Elektronenladung annehmen. Auch bei kolloiden Lösungen, z. B. von Metallen, können sie eine Rolle spielen. So laden sich die meisten Substanzen in reinem Wasser negativ in Übereinstimmung mit der sehr hohen Dielektrizitätskonstante des Wassers. Bei dem enormen Einfluß der Elektrolyte auf diese Teilchenladung, sogar auf das Vorzeichen derselben wird man aber den Flüssigkeitsionen einen wesentlichen Einfluß zuschreiben müssen. In der Tat nehmen die meisten Forscher Ionenwirkungen an, Aufnahme oder Abgabe von Ionen, Ionenabsorption oder Ionisierung der Oberflächenmoleküle.

Alle diese Faktoren können sich an der Teilchenladung beteiligen, und es ist sehr schwer, zwischen ihnen zu entscheiden. So wird die Teilchenladung, welche Schwefel in Benzol oder Terpentinöl annimmt, sicher eine andere Ursache haben als die von Proteïnteilchen in Wasser, die sich in schwach alkalischer oder neutraler Lösung negativ, in schwach saurer aber positiv aufladen; oder

1) Vergl. z. B. Barus u. Schneider ib. **8**. 289; 1891. Picton u. Linder loc. cit. III. G. Anm. 6. Zsigmondy, Zur Erkenntnis der Kolloide, Jena 1905, d 178; Kolloidchemie p. 92, Leipzig 1912.

von kolloidem Platin in Wasserstoff oder Sauerstoff enthaltendem Wasser, worin sich die Platinteilchen nach Billitzer wie Elektroden verhalten.

Die Art der aufladenden Ionen muß aber von wesentlichem Einfluß sein auf die Reaktionen des betreffenden Kolloids, also auch auf die Schwellenwerte bei der langsamen Elektrolytkoagulation. Kolloide wie die reinen Metallhydrosole, einige kolloide Sulfide und Salze zeigen allerdings noch ein ziemlich übereinstimmendes Verhalten, indem hier die Wertigkeitsregel gilt, und Freundlich hat gezeigt, daß bei ihrer Fällung Ionenadsorption maßgebend ist, indem die stärker adsorbierbaren Ionen auch in kleineren Konzentrationen fällen als die weniger adsorbierbaren.

Bei kolloidem Eisenoxyd dagegen hat Duclaux dargetan, und bei der kolloiden Zinnsäure konnte Heinz[1]) nachweisen, daß die Wertigkeitsregel nicht gilt, und in letzterem Falle, daß auch die Adsorbierbarkeit der Ionen nicht maßgebend ist, daß vielmehr chemische Einflüsse für diese Fällungswerte bestimmend sind, derart, daß bei der kolloiden Zinnsäure äquivalente Mengen derjenigen Kationen zur Koagulation eben ausreichen, die mit den Stannationen unlösliche Salze bilden, ganz unabhängig von der Wertigkeit der betreffenden Ionen und übereinstimmend mit des Verfassers Theorie der Peptisation[2]).

Von Ionen, die lösliche Stannate bilden, ist viel mehr erforderlich als von ersteren. Hier kann Ionenabsorption die Entladung herbeiführen oder auch Zurückdrängung der Dissoziation des adsorbierten, die Ladung bedingenden Ions.

Überblickt man noch das individuelle Verhalten der kolloiden Oxyde und der organischen Kolloide, so wird leicht verständlich, daß die chemische Seite des Problems nicht vernachlässigt werden darf, wenn man einen Einblick in die Vorgänge, welche der Entladung der Kolloidteilchen zu Grunde liegen, erhalten will, und die künftige Kolloidchemie wird festzustellen haben, welche Ionen bei der Aufladung der Kolloidteilchen in den einzelnen Fällen in Betracht kommen: denn sie sind zweifellos mitbestimmend für deren Reaktionen, wenn nicht sogar ausschlaggebend.

Sieht man aber von den Detailfragen, die mehr chemisches Interesse besitzen, ab, so ist die Antwort auf die vorliegende zweite Frage verhältnismäßig einfach. Schon in den Versuchen von

---

1) E. Heinz Inaugural-Diss. Göttingen 1914. Zs. Zeitschr. f. anorgan. Chem.

2) Kolloidchemie p. 79.

Pikton und Linder, die inzwischen vielfach bestätigt worden sind, liegt ein Teil der Antwort: bei der Elektrolytkoagulation werden von den Ultramikronen Ionen aufgenommen, die die Teilchenladung soweit erniedrigen, daß Zusammentritt der Primär- zu Sekundärteilchen auf Grund der zwischen ihnen bestehenden Anziehungskräfte erfolgen kann. Die fällenden Ionen bleiben bei den Ultramikronen und gehen in den Niederschlag.

Die Ionenaufnahme bei der Koagulation kann verschiedene Ursachen haben: Ionenadsorption, Verschiedenheit der Teilungskoeffizienten zwischen zwei verschiedenen Phasen, Bildung einer unlöslichen Verbindung mit den die Ladung bewirkenden Ionen, Zurückdrängung der Ionisation von Oberflächenmolekülen.

Da auch mehrere dieser Vorgänge nebeneinander sich abspielen können, so wird eine korrekte Beantwortung der Frage ungemein erschwert, und, da bei der Koagulation verschiedener Kolloide mit verschiedenen Koagulationsmitteln einmal der eine, ein andermal der andere Prozeß vorherrschen kann, so ergibt sich, daß eine allgemeine Theorie der Koagulation nicht möglich ist, sobald man auf derartige spezialisierte Fragen eingeht, die sich nicht allgemein, sondern nur von Fall zu Fall entscheiden lassen.

Faßt man diese Probleme jedoch als Gegenstand der speziellen und nicht der allgemeinen Kolloidchemie auf, so wird ihre Bearbeitung in Zukunft zweifellos reiche Früchte tragen, und man darf von Untersuchungen dieser Art eine wertvolle Bereicherung nicht nur der Chemie, sondern auch der Industrie der Kolloide erwarten. Der allgemeine Teil des Problems wird aber durch diese Auffassung wesentlich vereinfacht. —

Zusammenfassung.

1. In der Einleitung wird die Frage erörtert, ob es möglich ist, aus der Koagulationsgeschwindigkeit auf etwa vorhandene Anziehungskräfte zwischen den entladenen Kolloidteilchen schließen zu können.

2. Versuche, bei welchen die Farbänderungen der Goldhydrosole als Indikator für die bis zu einem gewissen bestimmten Grade vorgeschrittene Koagulation verwendet wurde, ergaben, daß jede reine kolloide Goldlösung bestimmter Beschaffenheit und Konzentration ein bestimmtes Minimum der Koagulationszeit ($t_{(VR)}$) besitzt, unabhängig von der Natur und in weiten Grenzen unabhängig von der Konzentration der fällenden Elektrolyte. (Näheres II. C.)

3. Das Gebiet der schnellen Koagulation wird schon erreicht, ehe die Teilchen vollständig entladen sind, immerhin tragen sie dann nur mehr kleine elektrische Ladungen. Die Beziehungen zu den Ergebnissen von Hardy und Powis werden im Abschnitt II. C eingehend auseinandergesetzt.

4. Die Koagulationszeit $t_{(VR)}$ ist annähernd proportional der Goldkonzentration (II. D).

5. Es wurde eine Methode zur ultramikroskopischen Verfolgung des Koagulationsverlaufs gegeben (III. A) und die Abnahme der Zahl der Primärteilchen mit der Zeit (neben den sich bildenden heller leuchtenden Sekundärteilchen) festgestellt (III. B).

6. Die Berechnung des Radius der Attraktionssphäre R nach einer von v. Smoluchowski gegebenen Formel aus der Abnahme der Primärteilchenzahl führte bei Serie E) und F) zu einem Verhältnis $\frac{R}{\text{Teilchenradius}}$, das zwischen 2 und 3 lag, in guter Übereinstimmung mit den Werten, die Westgren und Reitstötter aus der Abnahme der Gesamtteilchenzahl an anderen Hydrosolen nach einer anderen gleichfalls von v. Smoluchowski gegebenen Formel berechnet hatten.

Es darf demnach als erwiesen gelten, daß die entladenen Teilchen, welche sich bis zu einer gewissen Distanz R nähern, aber sich noch nicht unmittelbar berühren, bereits zur Vereinigung kommen, oder anders ausgedrückt, auf kleine Entfernung sich gegenseitig anziehen (III. C).

7. Die Beziehungen zu anderen Tatsachen der Kolloidchemie werden in den Abschnitten III. D, III. E und F besprochen, die zu den bisherigen Theorien der Koagulation in III. G, woselbst auch die Problemstellung eingehend erörtert wurde.

Göttingen, im Oktober 1916.

Institut für anorganische Chemie.

Über Stringocephalus Burtini und verwandte Formen.

Von

R. Wedekind-Göttingen.

Vorgelegt durch Herrn H. Stille in der Sitzung vom 3. Februar 1917.

Eine der häufigsten und verbreitetsten Brachiopodengattungen des rheinischen Mitteldevons ist das Genus *Stringocephalus* Defr. Trotz der Bedeutung, die dieser Gattung von den verschiedensten Gesichtspunkten aus beigelegt wird, ist ihr genauer Bau und auch ihre systematische Stellung nur ungenügend bekannt. Noch 1904 mußte Pompeckj[1]) schreiben: „Vollkommen unvermittelt steht allen Ancylopegmaten die Gattung *Stringocephalus* .... gegenüber“. Auch Hall und Clarke haben in ihren „Genera of palaeozoic Brachiopoda“ keine weiteren Beiträge zur Kenntnis dieser Gattung bringen können.

Bevor eine weitere biologische Verarbeitung dieses Genus, die das eigenartige Auftreten und die in vieler Beziehung auffällige Variation geradezu herausfordert, in Angriff genommen werden kann, muß für eine richtige Bewertung der sich bietenden Charaktere der Bau im Einzelnen festgelegt sein.

Es wurde deshalb an ein und demselben Exemplare von Pfaffrath die Innenseite beider Klappen freigelegt und die Ventralklappe durch Fortpräparieren der Schloßzähne von der Dorsalklappe in sonst völlig unversehrtem Zustande abgetrennt. Das Bild, das die beiden Klappen so bieten, ist völlig klar und eindeutig und auch deshalb von Bedeutung, weil die einzelnen Elemente des inneren Aufbaues verglichen mit den übrigen Brachiopoden uns in geradezu riesenhaften Proportionen entgegentreten.

---

1) Handwörterbuch der Naturwissenschaften. Jena. Bd. II. S. 185.

2) Albany, N. Y. 1894.

Am Hinterrande zeigt die Dorsalschale (Fig. 1, 2) eine wohlentwickelte, aber innerlich gelegene Area (*a*), die durch zwei gegen den Wirbel konvergierende Linien in drei Teile geteilt wird. Die beiden seitlichen Abschnitte der Area (*as*, *ae*) liegen horizontal und sind längs gestreift. Der mittlere Abschnitt (*ai*) besteht wiederum aus zwei Flächen, die schräg zum horizontal gelegenen Teile der Area stehen und in der Mittellinie winklig zusammenstoßen.

Die beiden seitlichen im allgemeinen horizontalen Abschnitte der Area (*as*) sind wieder nach außen konkav, und in diese konkave Zone lagern sich die entsprechenden Teile des ventralen Schloßrandes.



Figur 1. *Stringocephalus Burtini* Defr. Dorsalschale. *as* = seitlicher Teil der Area; *zg* = Zahngruben; *zd* = Zahngrubenplatten; *sp* = Schloßplatte; *p* = Schloßfortsatz; *pb* = blattartige Enden von *p*; *c* = Crurae.

Vor der Area, und teilweise von den schräg ansteigenden Hälften der Area überdeckt, liegen die langen, tiefen und sich nach hinten verschmälernden Zahngruben (*zg*), die in den hier stark verdickten Schalenboden eingesenkt sind. Die inneren Begrenzungen der Zahngruben bilden senkrecht auf dem Schalenboden



Figur 2. *Stringocephalus Burtini* Defr. Dorsalschale von innen und oben. *ae* = seitliche Abschnitte, *ai* = zentrale Abschnitte der Area; *zg* = Zahngruben; *sp* = Schloßplatte; *p* = Schloßfortsatz; *c* = Crurae; *rv* = Primärlamellen.

stehende Platten (*zd*), die nach der Mittellinie zu senkrecht umbiegen und in die beiden — in der Ansicht von oben — dreieckigen Schloßplatten (*sp*) übergehen. Die Schloßplatten stoßen senkrecht

auf den kräftigen Schloßfortsatz (*p*), der sich direkt vom Schalenboden erhebt, auf, umfassen diesen vorn etwas und gehen dann in die schmalen, hier zunächst drehrunden Crurae über.

Von Bedeutung ist vom morphogenetischen Standpunkte, daß eine echte Area noch vorhanden, daß sie aber vollkommen nach innen verlagert ist. Es ist das ein Vorgang, der bei älteren Brachiopoden häufiger wiederkehrt, wie u. a. *Clitambonites* und auch die *Pentameniden* zeigen. Daher lag die Vermutung nahe, daß die Schloßplatte der jüngeren Brachiopoden nichts weiter als die in das Innere des Gehäuses hineinverlagerte Area sei. Bei *Stringocephalus* treten jedoch eine Schloßplatte und eine innerlich gelegene Area zusammen, aber scharf voneinander getrennt, auf. Es zeigt sich jetzt recht deutlich, daß die Schloßplatte aus der Leiste (*zd*) hervorgegangen ist, die die Zahngruben innen begrenzt.

Die kräftige Entwicklung des Schloßfortsatzes (*p*) ist bekannt. Er ist am distalen Teile in zwei Äste gespalten.

Namentlich bei großen Exemplaren verbreitern sich die beiden Enden des Schloßfortsatzes blattartig und zeigen eine rauhe Oberfläche, die Ansatzstelle der Divaricatores. In der Ventralklappe liegt die größere Ansatzfläche der Divaricatores in einiger Entfernung vom Wirbel, sodaß die Hebelwirkung des Schloßfortsatzes recht deutlich in Erscheinung tritt. Die beiden Divaricatores selbst waren äußerst kurze Muskeln.

Der Bau des Brachidiums von *Stringocephalus* ist durch Quenstedt[1]) u. a. bereits in den Grundzügen bekannt, aber meist gänzlich verkehrt zur Darstellung gebracht.

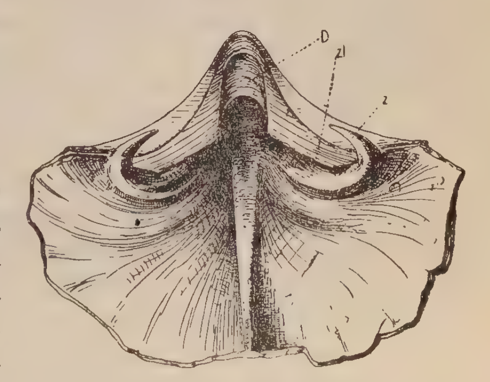
Wir unterscheiden am Brachidium zwei Abschnitte, die Crurae und die Primärlamellen. Mit den Crurae (*c*) ist das Brachidium am Schloßrande befestigt, während die Primärlamellen (*pv*) durch einen Knick von jenen abgesetzt, den Kiemenapparat stützen. Das Armgerüst der Terebrateln usw. — ancylopegmates Armgerüst — ist dann dadurch gekennzeichnet, daß die Primärlamellen in der Symmetrieebene des Gehäuses in irgend einer Weise direkt miteinander verwachsen, das der Spiriferen — helicopegmates Armgerüst — dadurch, daß eine derartige direkte Verwachsung der beiden Primärlamellen nicht zustande kommt, daß sie vielmehr von einander getrennt bleiben, und jede der beiden Primärlamellen hier in Form einer Spirale aufgerollt ist. Accessorische Lamellen können beide Typen der Primärlamellen noch außerdem in Form einer Brücke — Jugum — miteinander verbinden. In dieser Auf-

1) Quenstedt: Brachiopoden. Leipzig 1871.

fassung tritt der Unterschied zwischen dem ancylopegmaten und helicopegmaten Armgerüst weit schärfer als in der üblichen Art der Darstellung in Erscheinung.

Stringocephalus hat ein ancylopegmates Brachidium.

Die Ansatzstelle der Crurae ist in den mir bekannten Beschreibungen falsch und zwar in der Weise dargestellt, als ob sie seitlich am Schloßfortsatz entspringen[1]. Demgegenüber geben meine Präparate (Fig. 1, 2) folgenden Tatbestand: Die Schloßplatten (*sp*) umfassen vorn den Schloßfortsatz, deutlich von diesem abgesetzt, und gehen darauf vor, nicht seitlich des Schloßfortsatzes, in die zunächst drehrunden Crurae über. Diese formen sich in Lamellen um, deren breite Flächen parallel zu einander gestellt sind. Die Crurae (*c*) sind sehr lang und derart gekrümmt, daß die konvexe Seite dem dorsalen Schalenboden zugekehrt ist. Die Primärlamellen (*pv*) setzen unter spitzem Winkel an den Crurae an, laufen dann in rel. starker Krümmung — konvexe Seite der Ventralschale zugekehrt — zum Schloßrande, wo sie seitlich ausbiegen und den Schalenrändern folgen. In der Mitte des Stirnrandes sind die beiderseitigen Primärlamellen ohne Naht verwachsen. Durch Radiallamellen sind die Primärlamellen mit den Crurae verbunden. Die Primärlamellen laufen demnach nahezu horizontal. Sie laufen aber nicht, wie das z. B. Hall und Clarke (a. a. O.), Zittel u. a. noch abbilden, am Boden der Dorsalschale entlang.



Figur 3. *Stringocephalus Burtini* Defr. Ventralschale von innen. *z* = Schloßzähne; *zl* = leistenartige Verdickungen, welche die Zähne stützen; *D* = Deltaria.

Die Ventralschale (Fig. 3) hat ein offenes Delthyrium, da die Deltaria dem Schalenboden im Alter direkt aufliegen. An den Ecken, die Schloßrand und Delthyrium bilden, springen die Schloßzähne (*z*) als lange Haken vor. Zahnplatten fehlen, dagegen laufen auf der Innenseite der Schale an dem Rande des Delthyriums, leistenartige Verdickungen entlang (*zl*), die aber mit dem Schalenboden nicht verbunden sind. Die mäch-

---

1) Vergl. z. B. die Abbildung bei Hall u. Clarke, Genera of palaeozoic Brachiopoda. Bd. II, Seite 284, Figur 207.

tige Entwicklung eines ventralen Medianseptums das die Spaltäste des Schloßfortsatzes umfassen, ist bekannt.

Für eine Beurteilung der systematischen Stellung von *Stringocephalus* ist naturgemäß das Armgerüst in erster Linie heranzuziehen. Wenn man von den Radiallamellen und der Länge der Crurae, die zunächst von untergeordneter Bedeutung sind, absieht, so besteht der wesentliche Charakter darin, daß die Primärlamellen in der Mitte, ohne vorher zurückzubiegen, zusammenstoßen. Das ist nun ein Charakter, der die Familie der *Centronellidae* in hervorragender Weise auszeichnet. Indessen sind zwischen dem Armgerüst der bekannten *Centronellidae* und dem von *Stringocephalus* recht bedeutsame Unterschiede, wie zunächst scheinen muß, vorhanden. Bei *Centronella*[1]) sind die Primärlamellen relativ kurz und stoßen spitzwinklig in der Symmetrieebene zusammen, wo die Verwachsungsstelle durch eine Naht oder eine Querleiste gekennzeichnet ist. Bei *Stringocephalus* fehlt diese Naht und außerdem sind die Crurae ungewöhnlich lang. Eine Überbrückung dieser verschiedenen Ausbildungsweise war bisher nicht gelungen.

Bei einer kritischen Untersuchung der rheinischen Arten von *Newberria* Hall traf ich nun auf Formen, die in der Variabilität der Schalenform Züge zeigten, die mir bereits bei *Stringocephalus* aufgefallen waren und mehr als auf eine äußere Ähnlichkeit hinzuweisen schienen.

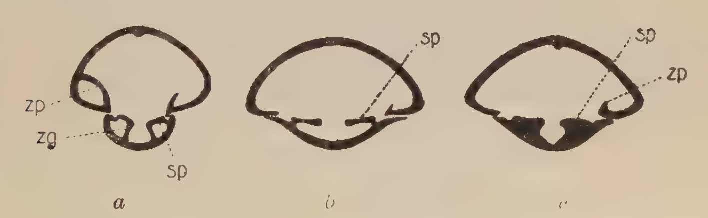
Die mitteldevonischen Newberrien treten zum ersten Male in sicher bestimmbaren Formen in der Cultrijugatusstufe der Eifel und zwar mit einer auf diese Zone beschränkten Art hervor, die ich als *Newberria granulosa* bezeichnen möchte, da die Schale unter der Lupe eine auffallende Granulierung resp. Punktierung zeigt, wie ich sie trotz meines glänzenden Materials bei jüngeren Newberrien nie wieder angetroffen habe. Die Gehäuseform entspricht der der Rensellarien. Sie ist also langoval, immer wesentlich länger als breit. Es liegt hier nun eine Gehäuseform vor, die sich als außergewöhnlich konstant erweist. Von *Newberria amygdalina* Stein. aus den unteren Stringocephalenschichten von Gerolstein liegt mir durch eigene Aufsammlung und dank dem Entgegenkommen des Herrn Dohm ein größeres Material vor. Die Untersuchung der Variabilität der Schalenform ergab keine Unterschiede gegenüber den älteren Newberrien. Indessen fehlt lediglich die für *Newberria granulosa* charakteristische Granulierung der Schale.

1) Vergl. Hall u. Clarke a. a. O. Bd. II. Seite 265 ff.

Außerdem hat Alexander Fuchs Newberrien in größerer Verbreitung im unteren Mitteldevon des Lennegebietes nachgewiesen. Diese Formen gehen in der Literatur unter dem Namen *Newberria amygdala* (Goldfuß). In der äußeren Gestalt weichen sie, soweit mir spärliches Material überhaupt ein Urteil erlaubt, nicht von *Newberria amygdalina* Stein. ab. Die Angabe Frechs[1], daß Unterschiede in der Ausbildung der Ansatzstelle der Muskeln zwischen *Newberria amygdala* und *amygdalina* vorhanden sind, kann ich nur bestätigen.

Bei *amygdalina* ist die Ansatzstelle der Muskeln in der Ventralklappe kurz, bei *Newberria amygdala* länger. Außerdem, und das dürfte das Wesentliche sein, ist die Ansatzstelle des Adductors der Ventralklappe von *Newberria amygdalina*, leistenförmig erhaben, — im Steinkern erscheint sie naturgemäß eingesenkt, — während sie umgekehrt bei *Newberria amygdala* in die Schale eingesenkt ist und auf dem Steinkern als kräftiger Wulst hervortritt. Dieser Wulst ist in der Regel durch eine schmale Rinne gespalten. Wie weit diese lediglich quantitativen, nicht alternativen Unterschiede durchgreifender Natur sind, werden hoffentlich bald die wohl von Seiten des Herrn Fuchs zu erwartenden Untersuchungen zeigen.

In einem höheren Niveau der Stringocephalenschichten erfahren nun die bisher so konstanten Verhältnisse der Newberrien mit *Newberria caiqua*, Arch. u. Vern., wie mir scheint, eine ziemlich plötzliche Veränderung. Die schlanke Form des Gehäuses



Figur 4. Vertikalschnitte durch die Wirbelregion von Newberrien. *a N. amygdalina*, *b* und *c N. caiqua*. — *zp* = Zahnplatten, *zg* = Zahngrubenplatten, *sp* = Schloßplatte.

verschwindet und breitovale Formen von z. T. recht beträchtlicher Größe treten in den Vordergrund. Gegenüber *Newberria amygdalina* von Gerolstein hat der Mittelwert eine vollständige Verschiebung erfahren, sodaß *Newberria caiqua* dicke breitovale Formen

1) Lethaea geognostica. I Teil. 2. Band. Seite 162.

umfaßt. Auch was den inneren Bau angeht, sind Unterschiede gegenüber *Newberria amygdalina*, wie Dünnschliffe (Fig. 4) zeigen, hervorgetreten, indem unter der Schloßplatte (*sp*) bei *Newberria caiqua* ein stärkerer Kalkabsatz stattgefunden hat, sodaß die seitlichen Teile derselben direkt mit dem Schalenboden in Verbindung treten. Auch in der Ventralklappe größerer Exemplare findet eine derartige kallöse Kalkablagerung statt, derart daß der mittlere Teil frei davon bleibt. Infolgedessen gibt das, wenn zufällig diese verdickte Schalenpartie, was häufig bei größeren Exemplaren der Fall ist, abspringt, ein äußerst charakteristisches Bild (Fig. 5). Wie Schliffe durch die Wirbel gezeigt haben, ist das aber bei *Newberria amygdalina* nicht der Fall. Hier bleiben die proximalen Teile der Schloßplatte getrennt und werden durch Vertikalplatten (Fig. 4*a*, *zg*) gestützt[1]).

Es gelang, an Exemplaren der so gekennzeichneten *Newberria caiqua*[2]) das Armgerüst zu präparieren, das bisher ganz ungenügend bekannt war (Fig. 6 auf folgender Seite).



Figur 5. *Newberria caiqua* Arch. Vern.

Die Crurae (*c*) entspringen ebenso wie bei *Stringocephalus* an den paarigen Schloßplatten, zwischen denen aber bei *Newberria caiqua* ein Schloßfortsatz fehlt. Sie sind kurz und durch einen weit weniger auffälligen Knick von den Primärlamellen (*pr*) abgesetzt. Diese folgen in nur geringem Abstande dem Schalenrande und stoßen vorn in der Mitte des Stirnrandes ebenfalls in einem kontinuierlichen Bogen zusammen. An der Vereinigungsstelle sind die Primärlamellen etwas eingebogen, eine Naht oder eine Querleiste fehlt hier aber vollkommen.

1) Diese bei *N. amygdalina* vorhandenen Vertikal- oder Zahngrubenplatten fehlen bei *N. caiqua*, wie unser Schliff 4*b* zeigt, in dem die kallöse Kalkablagerung auch in der Dorsalklappe noch fehlt.

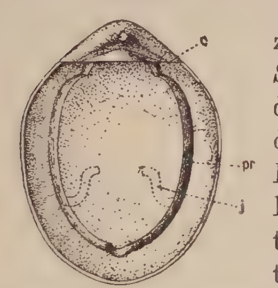
2) Die 1913 erschienene Abhandlung von E. Schulz: „Über einige Leit-

Es hat bei dem vorliegenden Präparate den Anschein, als ob etwa in der Schalenmitte die beiderseitigen Primärlamellen durch ein Jugum verbunden sind, das, soweit die allerdings noch zweifelhafte Beobachtung zeigt, in Figur 6 durch punktierte Linien zur Darstellung gebracht ist. Der Verlauf der Primärlamellen, das sei hier ausdrücklich betont, ist klar und völlig eindeutig zu beobachten.

Wenn man nunmehr die gesamten *Centronellidae* betrachtet, so ergibt sich folgender Zusammenhang in der Ausbildungsweise der Brachidien:

a. Bei den älteren *Centronellidae* (*Centronella Rensellaria*) ist das Brachidium relativ kurz und reicht etwa nur bis zur Mitte des Schalenhohlraumes. Die Primärlamellen stoßen spitzwinklig zusammen, bleiben aber durch eine Naht oder Querleiste getrennt.

b. Die Primärlamellen sind verlängert, folgen in geringer Entfernung dem Schalenrande und stoßen vorn, ohne eine Naht oder Leiste zu bilden, zusammen (*Newberria*).



Figur 6. *Newberria caiqua* Arch. Vern. *c* = crurae; *pr* = Primärlamellen *j* = (?) Jugum.

Nun ist lediglich eine Modifikation des zweiten Brachidiumtypus das Armgerüst von *Stringocephalus*. Die Modifikation findet lediglich ihren Ausdruck in der Verlängerung der Crurae bei *Stringocephalus*. Jugum und Radiallamellen sind für die Analyse dieser Brachidien von nur untergeordneter Bedeutung. Auch an dem einfachen Typus der älteren Centronellidae schließen Genera mit besonders modifiziertem Brachidium an, indem z. B. bei *Romingerina* Hall und Clarke die Querleiste an der Vereinigungsstelle zu einem hohen Vertikalseptum wird.

Faßt man, wie das bisher und mit vollem Recht geschehen ist, *Newberria* als einen Vertreter der *Centronellidae* auf, so muß

---

fossilien der Stringocephalenschichten der Eifel" bringt eine neue Verwirrung der Begriffe. Was Schulz als *Newberria caiqua* bezeichnet, ist, soweit die Abbildungen ein Urteil erlauben, wohl nur eine *Newberria amygdalina* Stein. *Rauffia pseudocaiqua* Schulz ist dagegen wahrscheinlich nichts weiter als ein großes Exemplar der Paffrather *Newberria caiqua*, die entfernt *Stringocephalus*-ähnlich werden kann. Hierfür sprechen außer den Angaben des Textes die von Schulz auf Tafel IX gegebenen Abbildungen. Der Steinkern Figur 6 zeigt das infolge der Schalenverdickung typische Hervortreten eines Zapfens, was ja gerade den größeren Exemplaren von *Newberria caiqua* eigen ist. Mit *Stringocephalus* hat *Newberria caiqua* (= *Rauffia pseudocaiqua*) nichts zu tun. Demnach ist die Gattung *Rauffia* hinfällig.

man auch *Stringocephalns* notwendigerweise in die gleiche Familie einordnen. Wir haben ja auch weiterhin bereits gezeigt, daß im Bau der Schloßplatte eine Übereinstimmung zwischen den *Centronellidae* und *Stringocephalus* vorhanden ist.

Was insgesamt die *Centronellidae* angeht, so sind sie, wie *Enantiosphen* Whidborne ein *Pentamerus* mit centronellidem Brachidium zeigt, Descendenten der *Pentameracea*.

Die Grundlagen der Physik.

(Zweite Mitteilung.)

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. Dezember 1916.

In meiner ersten Mitteilung[1]) habe ich ein System von Grundgleichungen der Physik aufgestellt. Ehe ich mich zur Theorie der Integration dieser Gleichungen wende, erscheint es nötig, einige allgemeinere Fragen sowohl logischer wie physikalischer Natur zu erörtern.

Zunächst führen wir an Stelle der Weltparameter w_s ($s = 1, 2, 3, 4$) die allgemeinsten reellen Raum-Zeit-Koordinaten x_s ($s = 1, 2, 3, 4$) ein, indem wir

$$w_1 = x_1, \quad w_2 = x_2, \quad w_3 = x_3, \quad w_4 = ix_4$$

setzen und entsprechend an Stelle von

$$ig_{14}, \quad ig_{24}, \quad ig_{34}, \quad -g_{44}$$

einfach

$$g_{14}, \quad g_{24}, \quad g_{34}, \quad g_{44}$$

schreiben. Die neuen $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$) — die Einsteinschen Gravitationspotentiale — sollen dann sämtlich reelle Funktionen der reellen Variabeln x_s($s = 1, 2, 3, 4$) sein von der Art, daß bei der Darstellung der quadratischen Form

$$G(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu \tag{28}$$

als Summe von vier Quadraten linearer Formen der X_s stets drei Quadrate mit positivem und ein Quadrat mit negativem Vor-

---

1) Diese Nachrichten 20. November 1915.

zeichen auftritt: die quadratische Form (28) liefert somit für unsere vierdimensionale Welt der x_s die Maßbestimmung einer Pseudogeometrie. Die Determinante g der $g_{\mu\nu}$ fällt negativ aus.

Ist in dieser Geometrie eine Kurve

$$x_s = x_s(p) \qquad (s = 1, 2, 3, 4)$$

gegeben, wo $x_s(p)$ irgend welche reelle Funktionen des Parameters p bedeuten, so kann diese in Teilstücke zerlegt werden, auf denen einzeln der Ausdruck

$$G\left(\frac{dx_1}{dp}, \frac{dx_2}{dp}, \frac{dx_3}{dp}, \frac{dx_4}{dp}\right)$$

nicht sein Vorzeichen ändert: ein Kurvenstück, für welches

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) > 0$$

ausfällt, heiße eine *Strecke* und das längs dieses Kurvenstücks genommene Integral

$$\lambda = \int \sqrt{G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}\, dp$$

heiße die *Länge der Strecke*; ein Kurvenstück, für welches

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) < 0$$

ausfällt, heiße eine *Zeitlinie* und das längs dieses Kurvenstückes genommene Integral

$$\tau = \int \sqrt{-G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)}\, dp$$

heiße die *Eigenzeit der Zeitlinie*; endlich heiße ein Kurvenstück, längs dessen

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = 0$$

wird, eine *Nullinie*.

Um diese Begriffe unserer Pseudogeometrie anschaulich zu machen, denken wir uns zwei ideale Maßinstrumente: den *Maßfaden*, mittelst dessen wir die Länge λ einer jeden Strecke zu messen im Stande sind und zweitens die *Lichtuhr*, mittelst derer wir die Eigenzeit einer jeden Zeitlinie bestimmen können. Der Maßfaden zeigt Null und die Lichtuhr hält an längs jeder Nulllinie, während ersterer längs einer Zeitlinie, letztere längs einer Strecke gänzlich versagt.

Zunächst zeigen wir, daß jedes der beiden Instrumente ausreicht, um mit seiner Hülfe die Werte der $g_{\mu\nu}$ als Funktionen von x_s zu berechnen, sobald nur ein bestimmtes Raum-Zeit-Koordinatensystem x_s eingeführt worden ist. In der Tat wählen wir irgend 10 Strecken aus, die sämtlich längs verschiedenen Richtungen in den nämlichen Weltpunkt x_s einlaufen, so daß diesem Endpunkt jedesmal der Parameterwert p zukommt, so ergibt sich für jede der 10 Strecken im Endpunkt die Gleichung

$$\left(\frac{d\lambda^{(h)}}{dp}\right)^2 = G\left(\frac{dx_s^{(h)}}{dp}\right), \qquad (h = 1, 2, \ldots, 10);$$

hier sind die linken Seiten bekannt, sobald wir die Längen $\lambda^{(h)}$ mittelst des Maßfadens bestimmt haben. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$D(u) = \begin{vmatrix} \left(\frac{dx_1^{(1)}}{dp}\right)^2, & \frac{dx_1^{(1)}}{dp}\,\frac{dx_2^{(1)}}{dp}, & \ldots, & \left(\frac{dx_4^{(1)}}{dp}\right)^2, & \left(\frac{d\lambda^{(1)}}{dp}\right)^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{dx_1^{(10)}}{dp}\right)^2, & \frac{dx_1^{(10)}}{dp}\,\frac{dx_2^{(10)}}{dp}, & \ldots, & \left(\frac{dx_4^{(10)}}{dp}\right)^2, & \left(\frac{d\lambda^{(10)}}{dp}\right)^2 \\ X_1^2, & X_1 X_2, & \ldots, & X_4^2, & u \end{vmatrix},$$

so wird offenbar

$$G(X_s) = -\frac{D(0)}{\dfrac{\partial D}{\partial u}}, \tag{29}$$

wodurch sich zugleich für die Richtungen der ausgewählten 10 Strecken im Punkte $x_s(p)$ die Bedingung

$$\frac{\partial D}{\partial u} \neq 0$$

als notwendig herausstellt.

Ist G nach (29) berechnet, so würde die Anwendung des Verfahrens auf irgend eine 11te Strecke, die in $x_s(p)$ endigt, die Gleichung

$$\left(\frac{d\lambda^{(11)}}{dp}\right)^2 = G\left(\frac{dx_s^{(11)}}{dp}\right)$$

liefern und diese Gleichung wäre dann sowohl eine Kontrolle für die Richtigkeit des Instrumentes als auch eine experimentelle Bestätigung dafür, daß die Voraussetzungen der Theorie für die wirkliche Welt zutreffen.

Für die Lichtuhr gilt die entsprechende Ueberlegung.

Der axiomatische Aufbau unserer Pseudogeometrie ließe sich ohne Schwierigkeit durchführen: erstens ist ein Axiom aufzustellen, auf Grund dessen folgt, daß Länge bez. Eigenzeit Integrale sein müssen, deren Integrand lediglich eine Funktion der x_s und ihrer ersten Ableitungen nach dem Parameter ist; als ein solches Axiom wäre etwa die Eigenschaft des Abrollens des Maßfaden oder der bekannte Enveloppensatz für geodätische Linien verwendbar. Zweitens ist ein Axiom erforderlich, wonach die Sätze der pseudo-Euklidischen Geometrie d. h. das alte Relativitätsprinzip im Unendlichkleinen gelten soll; hierzu wäre das von W. Blaschke[1]) aufgestellte Axiom besonders geeignet, welches aussagt, daß die Bedingung der Orthogonalität für irgend zwei Richtungen — sei es bei Strecken oder Zeitlinien — stets eine gegenseitige sein soll.

Es seien noch kurz die hauptsächlichsten Tatsachen zusammengestellt, die uns die Monge-Hamiltonsche Theorie der Differentialgleichungen für unsere Pseudogeometrie lehrt.

Jedem Weltpunkte x_s gehört ein Kegel zweiter Ordnung zu, der in x_s seine Spitze hat und in den laufenden Punktkoordinaten X_s durch die Gleichung

$$G(X_1 - x_1,\ X_2 - x_2,\ X_3 - x_3,\ X_4 - x_4) = 0$$

bestimmt ist; derselbe heiße der zum Punkte x_s zugehörige *Nullkegel.* Die sämtlichen Nullkegel bilden ein vierdimensionales Kegelfeld, zu dem einerseits die „Mongesche" Differentialgleichung

$$G\left(\frac{dx_1}{dp}, \frac{dx_2}{dp}, \frac{dx_3}{dp}, \frac{dx_4}{dp}\right) = 0$$

und andererseits die „Hamiltonsche" partielle Differentialgleichung

$$H\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial x_4}\right) = 0 \tag{30}$$

gehört, wo H die zu G reziproke quadratische Form

$$H(U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4) = \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} U_\mu U_\nu$$

bedeutet. Die Charakteristiken der Mongeschen und zugleich die der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung (30) sind die geodätischen Nullinien. Die sämtlichen von einem bestimmten Weltpunkt $a_s (s = 1, 2, 3, 4)$ ausgehenden geodätischen Nullinien erzeugen eine dreidimensionale Punktmannigfaltigkeit, die die zum

1) Räumliche Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung, Leipziger Berichte, Math.-phys. Kl. 68 (1916) S. 50.

Weltpunkt a_s gehörige *Zeitscheide* heißen möge. Diese Zeitscheide besitzt in a_s einen Knotenpunkt, dessen Tangentialkegel gerade der zu a_s gehörige Nullkegel ist. Bringen wir die Gleichung der Zeitscheide auf die Gestalt

$$x_4 = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

so ist

$$f = x_4 - \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

ein Integral der Hamiltonschen Differentialgleichung (30). Die sämtlichen vom Punkte a_s ausgehenden Zeitlinien verlaufen gänzlich innerhalb desjenigen vierdimensionalen Weltteiles, der die zu a_s gehörige Zeitscheide als Begrenzung hat.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns dem Problem der Kausalität in der neuen Physik zu.

Bisher haben wir alle Koordinatensysteme x_s, die aus irgend einem durch eine willkürliche Transformation hervorgehen, als gleichberechtigt angesehen. Diese Willkür muß eingeschränkt werden, sobald wir die Auffassung zur Geltung bringen wollen, daß zwei auf der nämlichen Zeitlinie gelegene Weltpunkte im Verhältnis von Ursache und Wirkung zu einander stehen können und daß es daher nicht möglich sein soll, solche Weltpunkte auf gleichzeitig zu transformieren. Indem wir x_4 als die *eigentliche* Zeitkoordinate auszeichnen, stellen wir folgende Definitionen auf:

Ein *eigentliches* Raum-Zeitkoordinatensystem ist ein solches, für welches außer $g < 0$ stets noch die folgenden vier Ungleichungen

$$(31) \qquad g_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad g_{44} < 0$$

erfüllt sind. Eine Transformation, die ein solches Raum-Zeitkoordinatensystem in ein anderes eigentliches Raum-Zeitkoordinatensystem überführt, heiße eine *eigentliche* Raum-Zeitkoordinatentransformation.

Die vier Ungleichungen drücken aus, daß in irgend einem Weltpunkte a_s der zugehörige Nullkegel den linearen Raum

$$x_4 = a_4$$

ganz außerhalb läßt, die Gerade

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = a_3$$

dagegen im Inneren enthält; die letztere Gerade ist daher stets eine Zeitlinie.

Es sei nunmehr irgend eine Zeitlinie $x_s = x_s(p)$ gegeben; wegen

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) < 0$$

folgt dann, daß in einem eigentlichen Raum-Zeitkoordinatensystem stets

$$\frac{dx_4}{dp} \neq 0$$

sein und folglich längs einer Zeitlinie die eigentliche Zeitkoordinate x_4 stets wachsen bez. abnehmen muß. Da eine Zeitlinie bei jeder Koordinatentransformation Zeitlinie bleibt, so können zwei Weltpunkte einer Zeitlinie durch eine eigentliche Raum-Zeitkoordinatentransformation niemals den gleichen Wert der Zeitkoordinate x_4 erhalten d. h. unmöglich auf gleichzeitig transformiert werden.

Andererseits wenn die Punkte einer Kurve eigentlich auf gleichzeitig transformiert werden können, so gilt nach der Transformation für diese Kurve

$$x_4 = \text{const. d. h. } \frac{dx_4}{dp} = 0,$$

mithin

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dp} \frac{dx_\nu}{dp}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

und hier ist wegen der ersten drei unserer Ungleichungen (31) die rechte Seite positiv; die Kurve charakterisiert sich demnach als eine Strecke.

So sehen wir, daß die dem Kausalitätsprinzip zu Grunde liegenden Begriffe von Ursache und Wirkung auch in der neuen Physik zu keinerlei inneren Widersprüchen führen, sobald wir nur stets die Ungleichungen (31) zu unseren Grundgleichungen hinzunehmen d. h. uns auf den Gebrauch eigentlicher Raum-Zeitkoordinaten beschränken.

An dieser Stelle sei auf ein späterhin nützliches besonderes Raum-Zeitkoordinatensystem hingewiesen, welches ich das *Gaußische Koordinatensystem* nennen möchte, weil es die Verallgemeinerung desjenigen geodätischen Polarkoordinatensystems ist, das Gauß in die Flächentheorie eingeführt hat. Es sei in unserer vierdimensionalen Welt irgend ein dreidimensionaler Raum gegeben von der Art, daß jede in diesem Raum verlaufende Kurve eine Strecke ist: *ein Streckenraum*, wie ich einen solchen nennen möchte;

x, x_2, x_3 seien irgend welche Punktkoordinaten dieses Raumes. Wir konstruieren nun in einem jeden Punkte x_1, x_2, x_3 desselben die zu ihm orthogonale geodätische Linie, die eine Zeitlinie sein wird, und tragen auf derselben x_4 als Eigenzeit auf; dem so erhaltenen Punkte der vierdimensionalen Welt weisen wir die Koordinatenwerte $x_1 x_2 x_3 x_4$ zu. Für diese Koordinaten wird, wie leicht zu sehen ist,

$$G(X_s) = \sum_{\mu\nu}^{1,2,3} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu - X_4^2 \tag{32}$$

d. h. das Gaußische Koordinatensystem ist analytisch durch die Gleichungen

$$g_{14} = 0, \quad g_{24} = 0, \quad g_{34} = 0, \quad g_{44} = -1 \tag{33}$$

charakterisiert. Wegen der vorausgesetzten Beschaffenheit des dreidimensionalen Raumes $x_4 = 0$ fällt die rechter Hand in (32) stehende quadratische Form der Variabeln X_1, X_2, X_3 notwendig positiv definit aus d. h. die drei ersten der Ungleichungen (31) sind erfüllt und da dies auch für die vierte gilt, so erweist sich das Gaußische Koordinatensystem stets als ein *eigentliches* Raum-Zeitkoordinatensystem.

Wir kehren nun zur Erforschung des Kausalitätsprinzips in der Physik zurück. Als den hauptsächlichen Inhalt desselben sehen wir die Tatsache an, die bisher in jeder physikalischen Theorie galt, daß aus der Kenntnis der physikalischen Größen und ihrer zeitlichen Ableitungen in der Gegenwart allemal die Werte dieser Größen für die Zukunft eindeutig bestimmt werden können: die Gesetze der bisherigen Physik fanden nämlich ausnahmslos ihren Ausdruck in einem System von Differentialgleichungen solcher Art, daß die Anzahl der darin auftretenden Funktionen wesentlich mit der Anzahl der unabhängigen Differentialgleichungen übereinstimmte und somit bot dann der bekannte allgemeine Cauchysche Satz über die Existenz von Integralen partieller Differentialgleichungen unmittelbar den Beweisgrund für jene Tatsache.

Die in meiner ersten Mitteilung aufgestellten Grundgleichungen (4) und (5) der Physik sind nun, wie ich dort besonders hervorgehoben habe, keineswegs von der oben charakterisierten Art; vielmehr sind nach Theorem I vier von ihnen eine Folge der übrigen: wir sahen die vier Maxwellschen Gleichungen (5) als Folge der zehn Gravitationsgleichungen (4) an und haben somit für die 14 Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s nur die 10 von einander wesentlich unabhängigen Gleichungen (4).

Sobald wir an der Forderung der allgemeinen Invarianz für die Grundgleichungen der Physik festhalten, ist der eben genannte Umstand auch wesentlich und notwendig. Gäbe es nämlich für die 14 Potentiale noch weitere von (4) unabhängige invariante Gleichungen, so würde die Einführung eines Gaußischen Koordinatensystems vermöge (33) für die 10 physikalischen Größen

$$g_{\mu\nu} \quad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3), \qquad q_s \quad (s = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

ein System von Gleichungen liefern, die wiederum von einander unabhängig wären und, da sie mehr als 10 sind, unter einander in Widerspruch ständen.

Unter solchen Umständen also, wie sie in der neuen Physik der allgemeinen Relativität zutreffen, ist es keineswegs mehr möglich, aus der Kenntnis der physikalischen Größen in Gegenwart und Vergangenheit eindeutig ihre Werte in der Zukunft zu folgern. Um dies anschaulich an einem Beispiel zu zeigen, seien unsere Grundgleichungen (4) und (5) der ersten Mitteilung in dem besonderen Falle integriert, der dem Vorhandensein eines einzigen dauernd ruhenden Elektrons entspricht, so daß sich die 14 Potentiale

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}(x_1,\ x_2,\ x_3) \\ q_s &= q_s\ (x_1,\ x_2,\ x_3) \end{aligned}$$

als bestimmte Funktionen von x_1, x_2, x_3 ergeben, die von der Zeit x_4 sämtlich unabhängig sind, und überdies so, daß noch die drei ersten Komponenten r_1, r_2, r_3 der Viererdichte verschwinden mögen. Wir wenden sodann auf diese Potentiale die folgende Koordinatentransformation an:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' & \text{für } x_4' \leqq 0 \\ x_1 = x_1' + e^{-\frac{1}{x_4'^2}} & \text{für } x_4' > 0 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} x_2 &= x_2' \\ x_3 &= x_3' \\ x_4 &= x_4'; \end{aligned}$$

die transformierten Potentiale $g'_{\mu\nu}$, q'_s sind für $x'_4 \leqq 0$ die gleichen Funktionen von x'_1, x'_2, x'_3 wie die $g_{\mu\nu}$, q_s in den ursprünglichen Variabeln x_1, x_2, x_3, während die $g'_{\mu\nu}$, q'_s für $x'_4 > 0$ wesentlich auch von der Zeitkoordinate x'_4 abhängen d. h. die Potentiale $g'_{\mu\nu}$, q'_s stellen ein Elektron dar, das bis zur Zeit $x'_4 = 0$ ruht, dann aber sich in seinen Teilen in Bewegung setzt.

Dennoch glaube ich, daß es nur einer schärferen Erfassung der dem Prinzip der allgemeinen Relativität [1]) zu Grunde liegenden Idee bedarf, um das Kausalitätsprinzip auch in der neuen Physik aufrecht zu halten. Dem Wesen des neuen Relativitätsprinzipes entsprechend müssen wir nämlich die Invarianz nicht nur für die allgemeinen Gesetze der Physik verlangen, sondern auch jeder Einzelaussage in der Physik den invarianten Charakter zusprechen, falls sie einen physikalischen Sinn haben soll — im Einklang damit, daß jede physikalische Tatsache letzten Endes durch Maßfaden oder Lichtuhr d. h. durch Instrumente von invariantem Charakter feststellbar sein muß. Gerade so wie in der Kurven- und Flächentheorie eine Aussage, für die die Parameterdarstellung der Kurve oder Fläche gewählt ist, für die Kurve oder Fläche selbst keinen geometrischen Sinn hat, wenn nicht die Aussage gegenüber einer beliebigen Transformation der Parameter invariant bleibt oder sich in eine invariante Form bringen läßt, so müssen wir auch in der Physik eine Aussage, die nicht gegenüber jeder beliebigen Transformation des Koordinatensystems invariant bleibt, als *physikalisch sinnlos* bezeichnen. Beispielsweise hat im oben betrachteten Falle des ruhenden Elektrons die Aussage, daß dasselbe etwa zur Zeit $x_4 = 1$ ruhe, physikalisch keinen Sinn, weil diese Aussage nicht invariant ist.

Was nun das Kausalitätsprinzip betrifft, so mögen für die Gegenwart in irgend einem gegebenen Koordinatensystem die physikalischen Größen und ihre zeitlichen Ableitungen bekannt sein: dann wird eine Aussage nur physikalischen Sinn haben, wenn sie gegenüber allen denjenigen Transformationen invariant ist, bei denen eben die für die Gegenwart benutzten Koordinaten unverändert bleiben; ich behaupte, daß die Aussagen dieser Art für die Zukunft sämtlich eindeutig bestimmt sind d. h. das Kausalitätsprinzip gilt in dieser Fassung:

Aus der Kenntnis der 14 physikalischen Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s in der Gegenwart folgen alle Aussagen über dieselben für die Zukunft notwendig und eindeutig, sofern sie physikalischen Sinn haben.

Um diese Behauptung zu beweisen, benutzen wir das Gaußische Raum-Zeitkoordinatensystem. Die Einführung von (33) in die Grundgleichungen (4) der ersten Mitteilung liefert uns für die 10 Potentiale

[1]) In seiner ursprünglichen, nunmehr verlassenen Theorie hatte A. Einstein (Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin. 1914 S. 1067) in der Tat, um das Kausalitätsprinzip in der alten Fassung zu retten, gewisse 4 nicht invariante Gleichungen für die $g_{\mu\nu}$ besonders postuliert.

(34) $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3)$, q_s $(s = 1, 2, 3, 4)$

ein System von ebensovielen partiellen Differentialgleichungen; wenn wir diese auf Grund der gegebenen Anfangswerte für $x_4 = 0$ integrieren, so finden wir auf eindeutige Weise die Werte von (34) für $x_4 > 0$. Da das Gaußische Koordinatensystem selbst eindeutig festgelegt ist, so sind auch alle auf dieses Koordinatensystem bezogenen Aussagen über jene Potentiale (34) von invariantem Charakter.

Die Formen, in denen physikalisch sinnvolle d. h. invariante Aussagen mathematisch zum Ausdruck gebracht werden können, sind sehr mannigfaltig.

Erstens. Dies kann mittelst eines invarianten Koordinatensystems geschehen. Ebenso wie das vorhin benutzte Gaußische ist zu solchem Zwecke auch das bekannte Riemannsche und desgleichen dasjenige Raum-Zeitkoordinatensystem verwendbar, in welchem die Elektrizität auf Ruhe und Einheitsdichte transformiert erscheint. Bezeichnet $f(q)$, wie am Schluß der ersten Mitteilung die im Hamiltonschen Prinzip auftretende Funktion der Invariante

$$q = \sum_{kl} q_k q_l g^{kl},$$

so ist

$$r^s = \frac{\partial f(q)}{\partial q_s}$$

die Viererdichte der Elektrizität; sie stellt einen kontravarianten Vektor dar und ist daher, wie leicht ersichtlich, gewiß auf (0, 0, 0, 1) transformierbar. Ist dies geschehen, so sind aus den vier Gleichungen

$$\frac{\partial f(q)}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, 2, 3), \qquad \frac{\partial f(q)}{\partial q_4} = 1$$

die vier Komponenten des Viererpotentials q_s durch die $g_{\mu\nu}$ ausdrückbar und jede Beziehung zwischen den $g_{\mu\nu}$ in diesem oder einem der beiden ersteren Koordinatensysteme ist sodann eine invariante Aussage. Für Partikularlösungen der Grundgleichungen kann es besondere invariante Koordinatensysteme geben; so bilden z. B. im unten behandelten Falle des zentrisch-symmetrischen Gravitationsfeldes r, ϑ, φ, t ein bis auf Drehungen invariantes Koordinatensystem.

Zweitens. Die Aussage, wonach sich ein Koordinatensystem finden läßt, in welchem die 14 Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s für die Zukunft gewisse bestimmte Werte haben oder gewisse bestimmte Beziehungen erfüllen, ist stets eine invariante und daher physikalisch sinnvoll. Der mathematische invariante Ausdruck für eine

solche Aussage wird durch Elimination der Koordinaten aus jenen Beziehungen erhalten. Ein Beispiel bietet der oben betrachtete Fall des ruhenden Elektrons: der wesentliche und physikalisch sinnvolle Inhalt des Kausalitätsprinzips drückt sich hier in der Aussage aus, daß das für die Zeit $x_4 \leqq 0$ ruhende Elektron bei geeigneter Wahl des Raum-Zeitkoordinatensystems auch für die Zukunft $x_4 > 0$ beständig in allen seinen Teilen ruht.

Drittens. Auch ist eine Aussage invariant und hat daher stets physikalischen Sinn, wenn sie für jedes beliebige Koordinatensystem gültig sein soll. Ein Beispiel dafür sind die Einsteinschen Impuls-Energiegleichungen vom Divergenz-Charakter. Obwohl nämlich die Einsteinsche Energie die Invarianteneigenschaft nicht besitzt und die von ihm aufgestellten Differentialgleichungen für ihre Komponenten auch als Gleichungssystem keineswegs kovariant sind, so ist doch die in ihnen enthaltene Aussage, daß sie für jedes beliebige Koordinatensystem erfüllt sein sollen, eine invariante Forderung und hat demnach einen physikalischen Sinn.

Nach meinen Ausführungen ist die Physik eine vierdimensionale Pseudogeometrie, deren Maßbestimmung $g_{\mu\nu}$ durch die Grundgleichungen (4) und (5) meiner ersten Mitteilung an die elektromagnetischen Größen d. h. an die Materie gebunden ist. Mit dieser Erkenntnis wird nun eine alte geometrische Frage zur Lösung reif, die Frage nämlich, ob und in welchem Sinne die Euklidische Geometrie — von der wir aus der Mathematik nur wissen, daß sie ein logisch widerspruchsfreier Bau ist — auch in der Wirklichkeit Gültigkeit besitzt.

Die alte Physik mit dem absoluten Zeitbegriff übernahm die Sätze der Euklidischen Geometrie und legte sie vorweg einer jeden speziellen physikalischen Theorie zu Grunde. Auch Gauß verfuhr nur wenig anders: er konstruierte hypothetisch eine nicht-Euklidische Physik, indem er unter Beibehaltung der absoluten Zeit von den Sätzen der Euklidischen Geometrie nur das Parallelenaxiom fallen ließ; die Messung der Winkel eines Dreieckes mit großen Dimensionen zeigte ihm dann die Ungültigkeit dieser nicht-Euklidischen Physik.

Die neue Physik des Einsteinschen allgemeinen Relativitätsprinzips nimmt gegenüber der Geometrie eine völlig andere Stellung ein. Sie legt weder die Euklidische noch irgend eine andere bestimmte Geometrie vorweg zu Grunde, um daraus die eigentlichen physikalischen Gesetze zu deduzieren, sondern die neue Theorie der Physik liefert, wie ich in meiner ersten Mitteilung

gezeigt habe, mit einem Schlage durch ein und dasselbe Hamiltonsche Prinzip die geometrischen und die physikalischen Gesetze nämlich die Grundgleichungen (4) und (5), welche lehren, wie die Maßbestimmung $g_{\mu\nu}$ — zugleich der mathematische Ausdruck der physikalischen Erscheinung der Gravitation — mit den Werten q_s der elektrodynamischen Potentiale verkettet ist.

Die Euklidische Geometrie ist ein der modernen Physik fremdartiges Ferngesetz: indem die Relativitätstheorie die Euklidische Geometrie als allgemeine Voraussetzung für die Physik ablehnt, lehrt sie vielmehr, daß Geometrie und Physik gleichartigen Charakters sind und als eine Wissenschaft auf gemeinsamer Grundlage ruhen.

Die oben genannte geometrische Frage läuft darauf hinaus, zu untersuchen, ob und unter welchen Voraussetzungen die vierdimensionale Euklidische Pseudogeometrie

$$(35)\qquad \begin{aligned} &g_{11}=1,\quad g_{22}=1,\quad g_{33}=1,\quad g_{44}=-1\\ &g_{\mu\nu}=0\quad (\mu \neq \nu) \end{aligned}$$

eine Lösung der physikalischen Grundgleichungen bez. die einzige reguläre Lösung derselben ist.

Die Grundgleichungen (4) meiner ersten Mitteilung lauten wegen der daselbst gemachten Annahme (20):

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu}+\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}=0,$$

wo

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu}=\sqrt{g}(K_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}Kg_{\mu\nu})$$

ist. Bei der Einsetzung der Werte (35) wird

$$(36)\qquad [\sqrt{g}K]_{\mu\nu}=0$$

und für

$$q_s=0 \qquad (s=1,2,3,4)$$

wird

$$\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}=0;$$

d. h. wenn alle Elektrizität entfernt wird, so ist die pseudo-Euklidische Geometrie möglich. Die Frage, ob sie in diesem Falle auch notwendig ist d. h. ob — bez. unter gewissen Zusatzbedingungen — die Werte (35) und die durch Transformation der Koordinaten daraus hervorgehenden Werte der $g_{\mu\nu}$ die einzigen regulären Lösungen der Gleichungen (36) sind, ist eine mathematische hier nicht allgemein zu erörternde Aufgabe. Ich beschränke mich

vielmehr darauf, einige besondere diese Aufgabe betreffende Überlegungen anzustellen.

Dazu kehren wir wieder zu den ursprünglichen Weltkoordinaten meiner ersten Mitteilung

$$w_1 = x_1, \quad w_2 = x_2, \quad w_3 = x_3, \quad w_4 = ix_4$$

zurück und erteilen den $g_{\mu\nu}$ die entsprechende Bedeutung.

Im Falle der pseudo-Euklidischen Geometrie haben wir

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu},$$

worin

$$\delta_{\mu\mu} = 1, \qquad \delta_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu)$$

bedeutet. Für jede dieser pseudo-Euklidischen Geometrie benachbarte Maßbestimmung gilt der Ansatz

$$(37) \qquad g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} + \cdots,$$

wo ε eine gegen Null konvergierende Größe und $h_{\mu\nu}$ Funktionen der w_s sind. Über die Maßbestimmung (37) mache ich die folgenden zwei Annahmen:

I. Die $h_{\mu\nu}$ mögen von der Variabeln w_4 unabhängig sein.

II. Die $h_{\mu\nu}$ mögen im Unendlichen ein gewisses reguläres Verhalten zeigen.

Soll nun die Maßbestimmung (37) für alle ε die Differentialgleichungen (36) erfüllen, so folgt, daß die $h_{\mu\nu}$ notwendig gewisse lineare homogene partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung erfüllen müssen. Diese Differentialgleichungen lauten, wenn man nach Einstein [1])

$$(38) \qquad h_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s k_{ss}, \qquad (k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu})$$

einsetzt und zwischen den 10 Funktionen $k_{\mu\nu}$ die vier Relationen

$$(39) \qquad \sum_s \frac{\partial k_{\mu s}}{\partial w_s} = 0, \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$

annimmt, wie folgt:

$$(40) \qquad \Box k_{\mu\nu} = 0,$$

wo zur Abkürzung

$$\Box = \sum_s \frac{\partial^2}{\partial w_s^2}$$

benutzt ist.

Die Relationen (39) sind wegen des Ansatzes (38) einschränkende Voraussetzungen für die Funktionen $h_{\mu\nu}$; ich will jedoch

1) Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Berichte d. Akad. zu Berlin 1916 S. 688.

zeigen, wie es durch eine geeignete infinitesimale Transformation der Variabeln w_1, w_2, w_3, w_4 stets erreicht werden kann, daß für die entsprechenden Funktionen $h'_{\mu\nu}$ nach der Transformation jene einschränkenden Voraussetzungen erfüllt sind.

Zu dem Zwecke bestimme man vier Funktionen φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 der Variabeln, die bez. den Differentialgleichungen

$$(41) \qquad \Box\varphi_\mu = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w_\mu}\sum_\nu h_{\nu\nu} - \sum_\nu \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial w_\nu}$$

genügen. Vermöge der infinitesimalen Transformation

$$w_s = w'_s + \varepsilon\varphi_s$$

geht $g_{\mu\nu}$ über in

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon\sum_\alpha g_{\alpha\nu}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial w_\mu} + \varepsilon\sum_\alpha g_{\alpha\mu}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial w_\nu} + \cdots$$

oder wegen (37) in

$$g'_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon h'_{\mu\nu} + \cdots,$$

wo

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial w_\mu} + \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial w_\nu}$$

gesetzt ist. Wählen wir nun

$$k_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s h'_{ss},$$

so erfüllen diese Funktionen wegen (41) die Einsteinschen Bedingungen (39) und es wird

$$h'_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s k_{ss} \qquad (k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu}).$$

Die Differentialgleichungen (40), die nach den obigen Ausführungen für die gefundenen $k_{\mu\nu}$ gelten müssen, gehen wegen der Annahme I in

$$\frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial w_1^2} + \frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial w_2^2} + \frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial w_3^2} = 0$$

über und, da die Annahme II — demgemäß verstanden — zu schließen gestattet, daß die $k_{\mu\nu}$ im Unendlichen sich Konstanten nähern, so folgt, daß dieselben überhaupt Konstante sein müssen d. h.: Durch Variation der Maßbestimmung der pseudo-Euklidischen Geometrie unter den Annahmen I und II ist es nicht möglich, eine reguläre Maßbestimmung zu erlangen, die nicht ebenfalls pseudo-Euklidisch ist und die doch zugleich einer elektrizitätsfreien Welt entspricht.

Die Integration der partiellen Differentialgleichungen (36) gelingt noch in einem anderen Falle, der von Einstein[1]) und Schwarzschild[2]) zuerst behandelt worden ist. Ich gebe im Folgenden für diesen Fall einen Weg an, der über die Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ im Unendlichen keinerlei Voraussetzungen macht und außerdem auch für meine späteren Untersuchungen Vorteile bietet. Die Annahmen über die $g_{\mu\nu}$ sind folgende:

1. Die Maßbestimmung ist auf ein Gaußisches Koordinatensystem bezogen — nur daß g_{44} noch willkürlich gelassen wird; d. h. es ist

$$g_{14} = 0, \quad g_{24} = 0, \quad g_{34} = 0.$$

2. Die $g_{\mu\nu}$ sind von der Zeitkoordinate x_4 unabhängig.

3. Die Gravitation $g_{\mu\nu}$ ist zentrisch symmetrisch in Bezug auf den Koordinatenanfangspunkt.

Nach Schwarzschild ist die allgemeinste diesen Annahmen entsprechende Maßbestimmung in räumlichen Polarkoordinaten, wenn

$$\begin{aligned} w_1 &= r\cos\vartheta \\ w_2 &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ w_3 &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ w_4 &= l \end{aligned}$$

gesetzt wird, durch den Ausdruck

(42) $$F(r)\,dr^2 + G(r)\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) + H(r)\,dl^2$$

dargestellt, wo $F(r)$, $G(r)$, $H(r)$ noch willkürliche Funktionen von r sind. Setzen wir

$$r^* = \sqrt{G(r)},$$

so sind wir in gleicher Weise berechtigt r^*, ϑ, φ als räumliche Polarkoordinaten zu deuten. Führen wir in (42) r^* anstatt r ein und lassen dann wieder das Zeichen * weg, so entsteht der Ausdruck

(43) $$M(r)\,dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 + W(r)\,dl^2,$$

wo $M(r)$, $W(r)$ die zwei wesentlichen willkürlichen Funktionen von r bedeuten. Die Frage ist, ob und wie diese auf die allgemeinste Weise zu bestimmen sind, damit den Differentialgleichungen (36) Genüge geschieht.

---

1) Perihelbewegung des Merkur. Sitzungsber. d. Akad. zu Berlin. 1915 S. 831.

2) Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes. Sitzungsber. d. Akad. zu Berlin. 1916 S. 189.

Zu dem Zwecke müssen die bekannten in meiner ersten Mitteilung angegebenen Ausdrücke $K_{\mu\nu}$, K berechnet werden. Der erste Schritt hierzu ist die Aufstellung der Differentialgleichungen der geodätischen Linien durch Variation des Integrals

$$\int\left(M\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2+r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2+W\left(\frac{dl}{dp}\right)^2\right)dp.$$

Wir erhalten als Lagrangesche Gleichungen diese:

$$\frac{d^2 r}{dp^2}+\frac{1}{2}\frac{M'}{M}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2-\frac{r}{M}\left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2-\frac{r}{M}\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{W'}{M}\left(\frac{dl}{dp}\right)^2=0,$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dp^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{dp}\frac{d\vartheta}{dp}-\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2=0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dp^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{dp}\frac{d\varphi}{dp}+2\operatorname{cotg}\vartheta\frac{d\vartheta}{dp}\frac{d\varphi}{dp}=0,$$

$$\frac{d^2 l}{dp^2}+\frac{W'}{W}\frac{dr}{dp}\frac{dl}{dp}=0;$$

hier und in der folgenden Rechnung bedeutet das Zeichen $'$ die Ableitung nach r. Durch Vergleich mit den allgemeinen Differentialgleichungen der geodätischen Linien:

$$\frac{d^2 w_s}{dp^2}+\sum_{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ s\end{matrix}\right\}\frac{dw_\mu}{dp}\frac{dw_\nu}{dp}=0$$

entnehmen wir für die Klammersymbole $\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ s\end{matrix}\right\}$ die folgenden Werte — wobei die verschwindenden nicht angegeben sind:

$$\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\frac{M'}{M},\quad \left\{\begin{matrix}22\\ 1\end{matrix}\right\}=-\frac{r}{M},\quad \left\{\begin{matrix}33\\ 1\end{matrix}\right\}=-\frac{r}{M}\sin^2\vartheta,$$

$$\left\{\begin{matrix}44\\ 1\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}\frac{W'}{M},\quad \left\{\begin{matrix}12\\ 2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{r},\quad \left\{\begin{matrix}33\\ 2\end{matrix}\right\}=-\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

$$\left\{\begin{matrix}13\\ 3\end{matrix}\right\}=\frac{1}{r},\quad \left\{\begin{matrix}23\\ 3\end{matrix}\right\}=\operatorname{cotg}\vartheta,\quad \left\{\begin{matrix}14\\ 4\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\frac{W'}{W}.$$

Hiermit bilden wir:

$$\begin{aligned}K_{11}=\ &\frac{\partial}{\partial r}\left(\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}12\\ 2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}13\\ 3\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}14\\ 4\end{matrix}\right\}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\}\\ &+\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}12\\ 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}21\\ 2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}13\\ 3\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}31\\ 3\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}14\\ 4\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}41\\ 4\end{matrix}\right\}\\ &-\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\}\left(\left\{\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}12\\ 2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}13\\ 3\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}14\\ 4\end{matrix}\right\}\right)\\ =\ &\frac{1}{2}\frac{W''}{W}+\frac{1}{4}\frac{W'^2}{W^2}-\frac{M'}{rM}-\frac{1}{4}\frac{M'W'}{MW}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K_{22} = {} & \frac{\partial}{\partial \vartheta}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} \\
& + \begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}32\\3\end{Bmatrix} \\
& - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right) \\
= {} & -1 - \frac{1}{2}\frac{rM'}{M^2} + \frac{1}{M} + \frac{1}{2}\frac{rW'}{MW}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{33} = {} & -\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial \vartheta}\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix} \\
& + \begin{Bmatrix}31\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}32\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix} \\
& - \begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right) - \begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix} \\
= {} & \sin^2\vartheta\left(-1 - \frac{1}{2}\frac{rM'}{M^2} + \frac{1}{M} + \frac{1}{2}\frac{rW'}{MW}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{44} = {} & -\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}41\\4\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}41\\4\end{Bmatrix} \\
& - \begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right) \\
= {} & \frac{1}{2}\frac{W''}{M} - \frac{1}{4}\frac{M'W'}{M^2} - \frac{1}{4}\frac{W'^2}{MW} + \frac{W'}{rM}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K = \sum_s g^{ss}K_{ss} = {} & \frac{W''}{MW} - \frac{1}{2}\frac{W'^2}{MW^2} - 2\frac{M'}{rM^2} - \frac{1}{2}\frac{M'W'}{M^2W} \\
& - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2M} + 2\frac{W'}{rMW}.
\end{aligned}
$$

Wegen

$$\sqrt{g} = \sqrt{MW}\, r^2 \sin\vartheta$$

wird

$$K\sqrt{g} = \left\{\left(\frac{r^2W'}{\sqrt{MW}}\right)' - 2\frac{rM'\sqrt{W}}{M^{\frac{3}{2}}} - 2\sqrt{MW} + 2\sqrt{\frac{W}{M}}\right\}\sin\vartheta$$

und, wenn wir

$$M = \frac{r}{r-m}, \quad W = w^2\frac{r-m}{r}$$

setzen, wo nunmehr m und w die unbekannten Funktionen von r werden, so erhalten wir schließlich

$$K\sqrt{g} = \left\{\left(\frac{r^2W'}{\sqrt{MW}}\right)' - 2wm'\right\}\sin\vartheta,$$

so daß die Variation des vierfachen Integrals

$$\iiiint K\sqrt{g}\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\, dl$$

mit der Variation des einfachen Integrals

$$\int w m'\, dr$$

äquivalent ist und zu den Lagrangeschen Gleichungen

$$(44) \qquad \begin{aligned} m' &= 0 \\ w' &= 0 \end{aligned}$$

führt. Man überzeugt sich leicht, daß diese Gleichungen in der Tat das Verschwinden sämtlicher $K_{\mu\nu}$ bedingen; sie stellen demnach wesentlich die allgemeinste Lösung der Gleichungen (36) unter den gemachten Annahmen 1., 2., 3., dar. Nehmen wir als Integrale von (44) $m = \alpha$, wo α eine Konstante ist und $w = 1$, was offenbar keine wesentliche Einschränkung bedeutet, so ergibt sich aus (43) für $l = it$ die gesuchte Maßbestimmung in der von Schwarzschild zuerst gefundenen Gestalt

$$(45) \quad G(dr, d\vartheta, d\varphi, dl) = \frac{r}{r-\alpha}\, dr^2 + r^2\, d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r}\, dt^2.$$

Die Singularität dieser Maßbestimmung bei $r = 0$ fällt nur dann fort, wenn $\alpha = 0$ genommen wird, d. h. Die Maßbestimmung der pseudo-Euklidischen Geometrie ist bei den Annahmen 1., 2., 3. die einzige reguläre Maßbestimmung, die einer elektrizitätsfreien Welt entspricht.

Für $\alpha \neq 0$ erweisen sich $r = 0$ und bei positivem α auch $r = \alpha$ als solche Stellen, an denen die Maßbestimmung nicht regulär ist. Dabei nenne ich eine Maßbestimmung oder ein Gravitationsfeld $g_{\mu\nu}$ an einer Stelle *regulär*, wenn es möglich ist, durch umkehrbar eindeutige Transformation ein solches Koordinatensystem einzuführen, daß für dieses die entsprechenden Funktionen $g'_{\mu\nu}$ an jener Stelle regulär d. h. in ihr und in ihrer Umgebung stetig und beliebig oft differenzierbar sind und eine von Null verschiedene Determinante g' haben.

Obwohl nach meiner Auffassung nur reguläre Lösungen der physikalischen Grundgleichungen die Wirklichkeit unmittelbar darstellen, so sind doch gerade die Lösungen mit nicht regulären Stellen ein wichtiges mathematisches Mittel zur Annäherung an charakteristische reguläre Lösungen — und in diesem Sinne ist nach dem Vorgange von Einstein und Schwarzschild die für $r = 0$ und $r = \alpha$ nicht reguläre Maßbestimmung (45) als Ausdruck der

Gravitation einer in der Umgebung des Nullpunktes zentrisch-symmetrisch verteilten Masse anzusehen[1]. Im gleichen Sinne ist auch der Massenpunkt als der Grenzfall einer gewissen Verteilung der Elektrizität um einen Punkt herum aufzufassen, doch sehe ich an dieser Stelle davon ab, die Bewegungsgleichungen desselben aus meinen physikalischen Grundgleichungen abzuleiten. Ähnlich verhält es sich mit der Frage nach den Differentialgleichungen für die Lichtbewegung.

Als Ersatz für die Ableitung aus den Grundgleichungen mögen nach Einstein *die folgenden zwei Axiome* dienen:

Die Bewegung eines Massenpunktes im Gravitationsfeld wird durch eine geodätische Linie dargestellt, welche Zeitlinie ist[2].

Die Lichtbewegung im Gravitationsfeld wird durch eine geodätische Nullinie dargestellt.

Da die Weltlinie, die die Bewegung des Massenpunktes darstellt, eine Zeitlinie sein soll, so ist es, wie wir leicht einsehen können, stets möglich, den Massenpunkt durch *eigentliche* Raum-Zeittransformationen auf Ruhe zu bringen d. h. es gibt *eigentliche* Raum-Zeitkoordinatensysteme, in Bezug auf die der Massenpunkt beständig ruht.

Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien für das zentrische Gravitationsfeld (45) entspringen aus dem Variationsproblem

$$\delta\int\left(\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2+r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2\right)dp=0,$$

sie lauten nach bekanntem Verfahren:

$$\text{(46)}\qquad \frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2=A,$$

$$\text{(47)}\qquad \frac{d}{dp}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dp}\right)-r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2=0,$$

$$\text{(48)}\qquad r^2\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{dp}=B,$$

$$\text{(49)}\qquad \frac{r-\alpha}{r}\frac{dt}{dp}=C,$$

wo A, B, C Integrationskonstante bedeuten.

---

1) Die Stellen $r=\alpha$ nach dem Nullpunkt zu transformieren, wie es Schwarzschild tut, ist meiner Meinung nach nicht zu empfehlen; die Schwarzschildsche Transformation ist überdies nicht die einfachste, die diesen Zweck erreicht.

2) Dieser letzte einschränkende Zusatz findet sich weder bei Einstein noch bei Schwarzschild.

Ich beweise zunächst, daß die Bahnkurven des $r\vartheta\varphi$-Raumes stets in Ebenen liegen, die durch das Gravitationszentrum gehen.

Zu dem Zwecke eliminieren wir den Parameter p aus den Differentialgleichungen (47) und (48), um so eine Differentialgleichung für ϑ als Funktion von φ zu erhalten. Es ist identisch

$$(50)\quad \frac{d}{dp}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dp}\right) = \frac{d}{dp}\left(r^2\frac{d\vartheta}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dp}\right) = \left(2r\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\vartheta}{d\varphi}+r^2\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + r^2\frac{d\vartheta}{d\varphi}\frac{d^2\varphi}{dp^2}.$$

Andererseits liefert (48) durch Differentiation nach p:

$$\left(2r\frac{dr}{d\varphi}\sin^2\vartheta+2r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2+r^2\sin^2\vartheta\frac{d^2\varphi}{dp^2} = 0$$

und wenn wir hieraus den Wert von $\frac{d^2\varphi}{dp^2}$ entnehmen und rechter Hand von (50) eintragen, so wird

$$\frac{d}{dp}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dp}\right) = \left(\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}-2\operatorname{cotg}\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2\right)r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2.$$

Die Gleichung (47) nimmt damit die Gestalt an:

$$\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}-2\operatorname{cotg}\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2 = \sin\vartheta\cos\vartheta,$$

eine Differentialgleichung, deren allgemeines Integral

$$\sin\vartheta\cos(\varphi+a)+b\cos\vartheta = 0$$

lautet, wo a, b Integrationskonstante bedeuten.

Hiermit ist der gewünschte Nachweis geführt und es genügt daher zur weiteren Diskussion der geodätischen Linien, allein den Wert $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ in Betracht zu ziehen. Alsdann vereinfacht sich das Variationsproblem wie folgt

$$\delta\int\left\{\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2\right\}dp = 0,$$

und die drei aus demselben entspringenden Differentialgleichungen erster Ordnung lauten

$$(51) \qquad \frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = A,$$

$$(52) \qquad r^2\frac{d\varphi}{dp} = B,$$

$$(53) \qquad \frac{r-\alpha}{r}\frac{dt}{dp} = C.$$

Die Lagrangesche Differentialgleichung für r

$$(54) \quad \frac{d}{dp}\left(\frac{2r}{r-\alpha}\frac{dr}{dp}\right) + \frac{\alpha}{(r-\alpha)^2}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - 2r\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = 0$$

ist notwendig mit den vorigen Gleichungen verkettet und zwar haben wir, wenn die linken Seiten von (51), (52), (53), (54) bez. mit [1], [2], [3], [4] bezeichnet werden, identisch

$$(55) \qquad \frac{d[1]}{dp} - 2\frac{d\varphi}{dp}\frac{d[2]}{dp} + 2\frac{dt}{dp}\frac{d[3]}{dp} = \frac{dr}{dp}[4].$$

Indem wir $C = 1$ nehmen, was auf eine Multiplikation des Parameters p mit einer Konstanten hinausläuft, und dann aus (51), (52), (53) p und t eliminieren, gelangen wir zu derjenigen Differentialgleichung für $\varrho = \frac{1}{r}$ als Funktion von φ, welche Einstein und Schwarzschild gefunden haben, nämlich:

$$(56) \qquad \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1+A}{B^2} - \frac{A\alpha}{B^2}\varrho - \varrho^2 + \alpha\varrho^3.$$

Diese Gleichung stellt die Bahnkurve des Massenpunktes in Polarkoordinaten dar; aus ihr folgt in erster Annäherung für $\alpha = 0$ bei $B = \sqrt{\alpha b}$, $A = -1 + \alpha a$ die Kepplersche Bewegung und die zweite Annäherung führt sodann zu einer der glänzendsten Entdeckungen der Gegenwart: der Berechnung des Vorrückens des Merkurperihels.

Nach dem obigen Axiom soll die Weltlinie für die Bewegung eines Massenpunktes Zeitlinie sein; aus der Definition der Zeitlinie folgt mithin stets $A < 0$.

Wir fragen nun insbesondere, ob der Kreis d. h. $r = \text{const}$ die Bahnkurve einer Bewegung sein kann. Die Identität (55) zeigt, daß in diesem Falle — wegen $\frac{dr}{dp} = 0$ — die Gleichung (54) keineswegs eine Folge von (51), (52), (53) ist; letztere drei Gleichungen sind daher zur Bestimmung der Bewegung nicht ausreichend; vielmehr sind (52), (53), (54) die notwendig zu erfüllenden Gleichungen. Aus (54) folgt

(57) $$-2r\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2+\frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2=0$$

oder für die Geschwindigkeit v in der Kreisbahn

(58) $$v^2=\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{\alpha}{2r}.$$

Andererseits ergibt (51) wegen $A<0$ die Ungleichung

(59) $$r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2<0$$

oder mit Benutzung von (57)

(60) $$r>\frac{3\alpha}{2}.$$

Wegen (58) folgt hieraus für die Geschwindigkeit des im Kreise sich bewegenden Massenpunktes die Ungleichung[1])

(61) $$v<\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Die Ungleichung (60) gestattet folgende Deutung. Nach (58) ist die Winkelgeschwindigkeit des kreisenden Massenpunktes

$$\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{\frac{\alpha}{2r^3}}.$$

Wollen wir also statt r, φ die Polarkoordinaten eines um den Nullpunkt mitrotierenden Koordinatensystems einführen, so haben wir nur nötig,

$$\varphi \text{ durch } \varphi+\sqrt{\frac{\alpha}{2r^3}}\,t$$

zu ersetzen. Die Maßbestimmung

$$\frac{r}{r-\alpha}dr^2+r^2d\varphi^2-\frac{r-\alpha}{r}dt^2$$

geht durch die betreffende Raum-Zeittransformation über in

$$\frac{r}{r-\alpha}dr^2+r^2d\varphi^2+\sqrt{2\alpha r}\,d\varphi\,dt+\left(\frac{\alpha}{2r}-\frac{r-\alpha}{r}\right)dt^2.$$

1) Die Angabe von Schwarzschild l. c., wonach sich die Geschwindigkeit des Massenpunktes auf der Kreisbahn bei Verkleinerung des Bahnradius der Grenze $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nähert, entspricht der Ungleichung $r\geqq\alpha$ und dürfte nach Obigem nicht zutreffend sein.

Hier ist wegen (60) die Ungleichung $g_{44} < 0$ erfüllt und da auch die übrigen Ungleichungen (31) gelten, so ist die betrachtete Transformation des Massenpunktes auf Ruhe eine *eigentliche* Raum-Zeittransformation.

Andererseits hat auch die in (61) gefundene obere Grenze $\frac{1}{\sqrt{3}}$ für die Geschwindigkeit eines kreisenden Massenpunktes eine einfache Bedeutung. Nach dem Axiom für die Lichtbewegung wird nämlich diese durch eine geodätische Nullinie dargestellt. Setzen wir demnach in (51) $A = 0$, so ergibt sich für die kreisende Lichtbewegung anstatt der Ungleichung (59) die Gleichung

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = 0;$$

zusammen mit (57) folgt hieraus für den Radius der Lichtbahn:

$$r = \frac{3\alpha}{2}$$

und für die Geschwindigkeit des kreisenden Lichtes der als obere Grenze in (61) auftretende Wert:

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Allgemein erhalten wir für die Lichtbahn aus (56) wegen $A = 0$ die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{B^2} - \varrho^2 + \alpha\varrho^3; \tag{62}$$

dieselbe besitzt für $B = \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha$ den Kreis $r = \frac{3\alpha}{2}$ als Poincaréschen „Zykel" — entsprechend dem Umstande, daß alsdann $\varrho - \frac{2}{3\alpha}$ rechts als Doppelfaktor auftritt. In der Tat besitzt in diesem Falle die Differentialgleichung (62) — für die allgemeinere Gleichung (56) gilt Entsprechendes — unendlich viele Integralkurven, die jenem Kreise in Spiralen sich unbegrenzt nähern, wie es die allgemeine Zykeltheorie von Poincaré verlangt.

Betrachten wir einen vom Unendlichen herkommenden Lichtstrahl und nehmen α klein gegenüber seiner kürzesten Entfernung vom Gravitationszentrum, so hat der Lichtstrahl angenähert die Gestalt einer Hyperbel mit Brennpunkt im Zentrum[1]).

---

1) Eine ausführliche Diskussion der Differentialgleichungen (56) und (62) wird die Aufgabe einer demnächst hier erscheinenden Mitteilung von V. Fréedericksz sein.

Ein Gegenstück zu der Bewegung im Kreise ist die Bewegung in einer Geraden, die durch das Gravitationszentrum geht. Wir erhalten die Differentialgleichung für diese Bewegung, wenn wir in (54) $\varphi = 0$ setzen und dann aus (53) und (54) p eliminieren; die so entstehende Differentialgleichung für r als Funktion von t lautet:

$$(63) \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3} = 0$$

mit dem aus (51) folgenden Integral

$$(64) \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^2 + A\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^3.$$

Nach (63) fällt die Beschleunigung negativ oder positiv aus d. h. die Gravitation wirkt anziehend oder abstoßend, jenachdem der Absolutwert der Geschwindigkeit

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{r-\alpha}{r}$$

oder

$$> \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{r-\alpha}{r}$$

ausfällt.

Für das Licht ist wegen (64)

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{r-\alpha}{r};$$

das geradlinig zum Zentrum gerichtete Licht wird in Übereinstimmung mit der letzten Ungleichung stets abgestoßen; seine Geschwindigkeit wächst von 0 bei $r = \alpha$ bis 1 bei $r = \infty$.

Wenn sowohl α wie $\frac{dr}{dt}$ klein sind, geht (63) angenähert in die Newtonsche Gleichung

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\alpha}{2}\,\frac{1}{r^2}$$

über.

Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper.

Von

E. Hecke in Basel.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 23. Dezember 1916.

Ich beweise in dieser Arbeit folgenden Satz:

Ist k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper und $\zeta_k(s)$ die zu k gehörige Dirichlet-Dedekindsche Zetafunktion, so ist $(s-1)\zeta_k(s)$ eine ganze transzendente Funktion von s und genügt einer Funktionalgleichung, ähnlich der bekannten für die Riemannsche Funktion $\zeta(s)$ gültigen.

Die genaue Formulierung dieser Gleichung findet sich auf S. 88.

Außer für die $k = k(1)$ entsprechende $\zeta(s)$ ist dieser Satz bisher bewiesen nur in folgenden Spezialfällen:

1) Für alle Kreiskörper, d. h. für alle in bezug auf $k(1)$ Abelschen Körper. Durch die — im Prinzip wenigstens — bekannte Zerlegung der rationalen Primzahlen in diesen Körpern kann man die zugehörige $\zeta_k(s)$ als Produkte von Dirichletschen L-Funktionen

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

darstellen, deren analytische Natur in ausreichendem Maße bekannt ist [1]). Die wirkliche Aufstellung der Funktionalgleichung [2]) für die

1) Die erste genauere Untersuchung dieser L-Funktionen stammt von *Kinkelin* (Programm der Gewerbeschule Basel 1861/62). Die Resultate wurden dann wiedergefunden von *R. Lipschitz*, Crelles Journal Bd. 105/106, 1889/90. (Zitate nach *Landaus* Handbuch).

2) Vgl. eine Arbeit von *L. Fuchs*, Crelles Journ. Bd. 65 (1866).

$\zeta_k(s)$ ist meines Wissens bisher nicht geleistet, bietet aber keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

2) Für die Klassenkörper der komplexen Multiplikation. Betrachtet man für einen imaginären quadratischen Körper $k(\sqrt{-D})$ die Summen[1])

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}, \tag{1}$$

wobei nur über die Ideale einer einzigen Idealklasse zu summieren ist, so läßt sich auf Grund der Zerlegungssätze im Klassenkörper die ζ-Funktion des Klassenkörpers durch diese Summen ausdrücken; das Gleiche gilt für die Ringideale eines Zahlringes in $k(\sqrt{-D})$.

3) Für die Klassenkörper reeller quadratischer Körper — soweit deren Existenz durch die Zahlentheorie bereits feststeht. Die zu (1) analogen Summen, über die Ideale einer Klasse (oder Ringklasse) eines reellen quadratischen Körpers erstreckt, sind, wie auf sehr schwierigem und mühsamem Wege durch Herrn de la Vallée Poussin[2]) gezeigt ist, bis auf den Pol $s = 1$ in der ganzen Ebene regulär. Aus ihnen läßt sich dann die ζ-Funktion der Klassenkörper, wenn deren Existenz anderweitig dargetan ist, in einfacher Weise zusammensetzen.

4) Für den kubischen Zahlkörper, der durch die dritte Wurzel aus einer rationalen Zahl erzeugt wird. Durch die tiefgreifenden Untersuchungen von Dedekind[3]) über die Zerfällung der rationalen Primzahlen in diesen Körpern ist es möglich, zu zeigen, daß die ζ-Funktion auf die Summen (1) für imaginär quadratische Körper zurückführbar ist.

Bei all diesen Beweisen wird der Übergang von den direkt untersuchten Funktionen zu den $\zeta_k(s)$ erst durch tiefliegende zahlentheoretische Sätze bewerkstelligt, indem nämlich die Zerfällung der Primzahlen in den betreffenden Körpern bekannt sein muß. Nur für die quadratischen Körper, die durch 1) schon erledigt sind, läßt sich auf Grund von 2) und 3) ein direkter Beweis für

---

1) *Ch. de la Vallée Poussin*, Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles, Bd. 20/21. 1896/97.

2) S. das obige Zitat. Der Beweis ist dann vereinfacht worden durch *E. Landau*, Neuer Beweis eines Satzes des Herrn de la Vallée Poussin (Jahresber. d. deutsch. Math. Ver. 24 (1915)). Er umfaßt immerhin noch 20 Seiten, ist aber auf andere Klassen von Funktionen anwendbar, die meinen Methoden nicht zugänglich sind.

3) Crelles Journal Bd. 121 (1900).

die Fortsetzbarkeit von $\zeta_k(s)$ führen, ohne die Zerfällungsgesetze der Primzahlen zu benutzen[1]).

Bei der geringen Kenntnis, die wir gegenwärtig von der Zerlegung der Primzahlen in allgemeinen algebraischen Körpern besitzen, besteht wenig Aussicht, auf diesem Wege zur Beherrschung von $\zeta_k(s)$ zu gelangen. Der Beweis, den ich hier für den oben formulierten Satz gebe, beruht denn auch auf funktionentheoretischen Überlegungen, er benutzt von den Eigenschaften des Zahlkörpers nur die Existenz der Grundeinheiten sowie die Endlichkeit der Klassenzahl. In sinngemäßer Erweiterung des zweiten Riemannschen Beweises für seine $\zeta(s)$ erscheint hier als der eigentliche Kern eine besondere Klasse von Thetareihen mehrerer Variablen und eine Transformationsformel für diese. *Es gelingt, jedem algebraischen Zahlkörper n-ten Grades eine bestimmte Klasse n-facher Thetareihen zuzuordnen.* Diese Reihen stehen mit dem Körper in engstem Zusammenhang und scheinen mir für die Beantwortung sehr vieler auf k bezüglichen Fragen eine ausschlaggebende Bedeutung zu besitzen. Für total reelle Körper sind es Thetareihen, wie sie Hilbert zuerst systematisch eingeführt hat und wie ich sie bereits mit Erfolg auf andere zahlentheoretische Fragen[2]), insbesondere die Aufstellung von Klassenkörpern angewandt habe. Für imaginäre Körper dagegen sind es andersartig spezialisierte Thetareihen, die man bisher noch nicht betrachtet hat, deren Stellung innerhalb der allgemeinen Thetareihen zu untersuchen mir sehr nutzbringend erscheint. Ich gedenke in nächster Zeit die vielseitige Bedeutung und Verwendbarkeit dieser und ähnlicher Funktionen an verschiedenen Fragen zu erweisen.

Von der allgemeinen Theorie der Thetafunktionen mache ich im folgenden keinen Gebrauch. Im *ersten Abschnitt* stelle ich einige — nicht neue — zahlentheoretische Hilfssätze über Ideale zusammen, im *zweiten* führe ich die speziellen Thetafunktionen ein und beweise die Transformationsformel. Der Fall eines kubischen Körpers, wobei k reell und die konjugierten imaginär sind, ist bereits hinreichend allgemein, um den Beweis für jeden Körper erkennen zu lassen, weshalb ich mich in der Darstellung darauf beschränke. Im *dritten Abschnitt* bringe ich dann genau nach der Riemannschen Methode den Beweis für den Satz über

1) Über die vorhandenen Sätze betr. die allgemeine $\zeta_k(s)$ vgl. etwa *E. Landau*, Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion .... Crelles Journal Bd. 125 (1903).

2) Vgl. meine Arbeiten über Modulfunktionen von zwei Variabeln (Math. Ann. Bd. 71 u. 74), wo sich nähere Angaben über die Litteratur finden.

$\zeta_k(s)$. Die Schwierigkeiten, welche von dem Vorhandensein der Einheiten herrühren, durch die bisher wohl die Untersuchung von $\zeta_k(s)$ in erster Linie behindert war, werden durch eine sehr einfache Idee beseitigt. Endlich bringe ich im *vierten Abschnitt* die Funktionalgleichung für den allgemeinen algebraischen Körper.

1.

Es sei $k = k^{(1)}$ ein beliebiger algebraischer Zahlkörper n-ten Grades, dessen Konjugierte wir durch obere Indizes $(2), \ldots (n)$ bezeichnen. Ebenso bezeichnen wir konjugierte Zahlen durch obere Indizes. Sind ferner $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale aus k, so soll unter dem Ideal $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ die Gesamtheit derjenigen Zahlen ω aus k verstanden werden, welche die Eigenschaft haben:

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\cdot(\omega) \text{ ist ein ganzes Ideal.}$$

Die Gesamtheit dieser Zahlen hat die charakteristische Eigenschaft, daß, wenn ω dazu gehört, auch $\lambda\omega$ dazu gehört, wenn λ eine beliebige *ganze* Zahl des Körpers ist.

Jedes gebrochene Ideal $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ hat wie das gewöhnliche ganze Ideal eine Basis, d. h. man kann ein System von n Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ aus k so finden, daß durch

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \cdots + m_n\omega_n$$

mit *ganzen rationalen* m_i genau sämtliche Zahlen von $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ dargestellt werden.

Verstehen wir nämlich unter $\mathfrak{c}$ ein Ideal derart, daß $\mathfrak{c}\mathfrak{b} = \beta$ ein Hauptideal wird, so sind diese Zahlen aus $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ offenbar identisch mit den Zahlen des Ideals $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, jede dividiert durch β. Ist dann $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ eine Basis von $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, so ist

$$(2) \qquad \omega_1 = \frac{\alpha_1}{\beta}, \quad \omega_2 = \frac{\alpha_2}{\beta}, \quad \ldots \quad \omega_n = \frac{\alpha_n}{\beta}$$

eine Basis von $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$. Jedes andere System von Basiszahlen geht aus diesem durch eine homogene lineare Transformation mit ganzen rationalen Koeffizienten und der Determinante ± 1 hervor. Bilden wir aus (2) und den n konjugierten Zahlsystemen die Determi-

nante, so ist deren absoluter Wert $= \frac{1}{|N(\beta)|}$ multipliziert mit der Determinante der α, welche gleich $|\sqrt{d}| . N(\mathfrak{a}\mathfrak{c})$ ist.

Hier bedeutet d die Grundzahl des Körpers und N die Norm. Für die Determinante der ω_i ergibt sich daher wie bei ganzen Idealen der Wert

$$|\sqrt{d}| \cdot \frac{N(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{b})}.$$

Da endlich ersichtlich die Gleichheit zweier gebrochener Ideale

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1}$$

identisch ist mit der Gleichung zwischen ganzen Idealen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b},$$

d. h. gemeinsame Idealfaktoren in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beliebig weggehoben werden können, so brauchen wir im folgenden in der Bezeichnung keinen Unterschied zwischen ganzen und gebrochenen Idealen zu machen. Die Kongruenz

$$\omega \equiv 0 \left(\text{mod. } \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)$$

soll also wieder bedeuten: die Zahl ω gehört dem Ideal $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ an, d. h. $\omega \cdot \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ ist ein ganzes Ideal, oder ω ist durch $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ teilbar.

Nunmehr sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus k, $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ eine Basis desselben. Wir betrachten nun neben der Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \ldots & \alpha_n^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \ldots & \alpha_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \alpha_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

die reziproke Matrix

$$\begin{pmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & \ldots & A_1^{(n)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} & \ldots & A_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n^{(1)} & & \ldots & A_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Die Elemente der r-ten Spalte gehören dann ersichtlich dem Körper $k^{(r)}$ an, die einzelnen Spalten sind zu einander konjugiert, und es gilt der Satz[1]):

1) *G. Landsberg*, Über das Analogon des Riemann-Rochschen Satzes in der Theorie der algebraischen Zahlen. Math. Ann. Bd. 50 (1898).

Die Zahlen

$$A^{(1)}, \quad A_2^{(1)}, \quad \ldots \quad A_n^{(1)}$$

bilden die Basis eines neuen Ideals $\mathfrak{A}$ und zwar ist

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\mathfrak{d}\mathfrak{a}}.$$

Hierbei ist $\mathfrak{d}$ die Differente des Körpers k.

Dieser Satz ist zuerst von G. Landsberg bewiesen worden und zwar für den Fall, daß $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal ist, jedoch bleibt der Beweis auch für ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{a}$ gültig.

Berücksichtigt man, daß

$$N(\mathfrak{d}) = |d|,$$

so bestätigt sich, daß die Determinante der $A_i^{(k)}$ wieder in die Gestalt

$$\frac{1}{\sqrt{|d|}\,N(\mathfrak{a})} = |\sqrt{d}|\,.\,N(\mathfrak{A})$$

gesetzt werden kann.

2.

Es sei jetzt $k = k^{(1)}$ ein reeller kubischer Körper, dessen konjugierte $k^{(2)}$ und $k^{(3)}$ imaginär seien. Es durchlaufe $\mu^{(1)}$ sämtliche Zahlen eines Ideals $\mathfrak{a}$ aus k, und $\mu^{(2)}$, $\mu^{(3)}$ mögen wieder die konjugierten bedeuten. Verstehen wir unter τ_1, τ positive reelle Variable, so ist die Reihe

$$\sum_{\mu^{(1)}} e^{-\pi(\tau_1 \mu^{(1)2} + 2\tau \mu^{(2)}\mu^{(3)})}$$

konvergent. Denn wenn $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$, $\alpha_3^{(1)}$ eine Basis von $\mathfrak{a}$ ist, so ist

$$\mu^{(i)} = m_1\alpha_1^{(i)} + m_2\alpha_2^{(i)} + m_3\alpha_3^{(i)} \qquad i = 1, 2, 3$$

und die im Exponenten stehende quadratische Form der Summationsbuchstaben m_1, m_2, m_3 ist positiv definit, da ja $\mu^{(2)}$ und $\mu^{(3)}$ konjugiert imaginär sind. Die Reihe ist offenbar eine Thetareihe für drei Variable, deren Moduln zahlentheoretisch spezialisiert sind. Wir wollen diese Reihe in eine ähnliche verwandeln, wo die τ_1, τ durch ihre reziproken Werte ersetzt sind, was durch Benutzung der allgemeinen Transformationstheorie geschehen könnte. Ich ziehe es vor, die Formel direkt auf dem bekannten Wege abzuleiten.

Wir schreiben fortan

$$e^x = \exp(x),$$

und setzen, unter x_1, x_2, x_3 reelle Variable verstanden, zur Abkürzung

$$y_i = x_1 \alpha_1^{(i)} + x_2 \alpha_2^{(i)} + x_3 \alpha_3^{(i)} \qquad i = 1, 2, 3.$$

Nun ist die Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\mu} \exp\left\{-\pi(\mu^{(1)} + y_1)^2 \tau_1 - 2\pi\tau(\mu^{(2)} + y_2)(\mu^{(3)} + y_3)\right\}$$

offenbar eine periodische Funktion der x_1, x_2, x_3 mit den Perioden 1, 0, 0, bezw. 0, 1, 0, bezw. 0, 0, 1. Wir entwickeln sie in eine Fouriersche Reihe und erhalten so, indem wir die Argumente alle gleich Null setzen,

$$f(0, 0, 0)$$

$$= \sum_{m_1, m_2, m_3} \int\int\int_{000}^{111} f(x_1, x_2, x_3) \exp\left\{2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)\right\} dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Für das einzelne Glied dieser Summe findet man zunächst

$$J = \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\pi\tau_1 y_1^2 - 2\pi\tau y_2 y_3 + 2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)\right\} dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Führt man hier erst als Integrationsvariable y_1, u, v durch

$$y_3 = \frac{u + iv}{\sqrt{2}}, \qquad y_2 = \frac{u - iv}{\sqrt{2}}$$

und sodann $y_1 + \text{const.}$, $u + \text{const.}$, $v + \text{const.}$ ein, so ergibt eine kleine Rechnung den Wert

$$J = \frac{1}{\sqrt{|d|}\, N(\mathfrak{a})} \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau^2}} \exp\left\{-\frac{\pi}{\tau_1} \lambda^{(1)2} - \frac{2\pi}{\tau} \lambda^{(2)} \lambda^{(3)}\right\}$$

Dabei ist

$$\lambda^{(1)} = \sum_{p=1}^{3} A_p^{(1)} m_p$$

eine Zahl des Ideals $(A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_3^{(1)})$, welches, wie in 1. auseinandergesetzt, gleich $\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}$ ist. Somit gewinnen wir die Formel

$$\sum \exp\left\{-\pi\tau_1 \mu^{(1)2} - 2\pi\tau \mu^{(2)} \mu^{(3)}\right\} = \frac{\sum \exp\left\{-\frac{\pi}{\tau_1} \lambda^{(1)2} - \frac{2\pi}{\tau} \lambda^{(2)} \lambda^{(3)}\right\}}{\sqrt{|d|}\, N(\mathfrak{a}) \sqrt{\tau_1 \tau^2}}.$$

Links durchläuft $\mu^{(1)}$ alle Zahlen aus $\mathfrak{a}$, rechts $\lambda^{(1)}$ alle Zahlen aus $\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}$, inkl. 0.

Statt τ_1, τ führen wir noch $\frac{\tau_1}{\sqrt[3]{|d|\,N(\mathfrak{a})^2}}$, $\frac{\tau}{\sqrt[3]{|d|\,N(\mathfrak{a})^2}}$ ein, wodurch der Zahlfaktor rechts wegfällt. Man gelangt damit zu folgendem Satz:

Jedem Ideal $\mathfrak{a}$ aus k ordne man folgende Funktion zu:

$$\vartheta(\tau_1, \tau; \mathfrak{a}) = \sum_{\mu^{(1)} \equiv 0(\mathfrak{a})} \exp\left\{-\pi \frac{\tau_1 \mu^{(1)2} + 2\tau\mu^{(2)}\mu^{(3)}}{\sqrt[3]{|d|\,N(\mathfrak{a})^2}}\right\}.$$

Alsdann gilt die Transformationsformel

$$(3) \qquad \vartheta(\tau_1, \tau; \mathfrak{a}) = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau^2}}\, \vartheta\left(\frac{1}{\tau_1}, \frac{1}{\tau}; \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\right)$$

Die Verallgemeinerung auf einen beliebigen Körper n-ten Grades liegt auf der Hand. Befinden sich unter den konjugierten Körpern r_1 reelle, etwa $k^{(1)}, k^{(2)} \dots k^{(r_1)}$, während die übrigen $2r_2$ zu je zweien konjugiert imaginär sind, so hat man eine Thetareihe von $n = r_1 + 2r_2$ Variabeln anzusetzen. Der Exponent lautet

$$\frac{\pi}{\sqrt[n]{|d|\,N(\mathfrak{a})^2}} \sum_{p=1}^{n} \tau_p |\mu^{(p)}|^2,$$

wobei diejenigen τ, welche konjugiert imaginären Körpern zugeordnet sind, einander gleich sind.

3.

Um nun die ζ-Funktion des Körpers k auf obige Thetareihe zurückzuführen, betrachten wir für $s > 1$ zunächst die Teilsumme

$$\zeta(s; \mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{j} \sim 1} \frac{1}{N(\mathfrak{j})^s},$$

die über die verschiedenen Ideale $\mathfrak{j}$ der Klasse $\mathfrak{a}^{-1}$ zu erstrecken ist. Offenbar ist

$$\zeta(s; \mathfrak{a}) = N(\mathfrak{a})^s \sum_{\substack{\mu \equiv 0(\mathfrak{a}) \\ (\mu)}}' \frac{1}{N(\mu)^s},$$

worin nun μ alle Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$ außer Null durchläuft, die sich nicht bloß um Einheitsfaktoren unterscheiden, oder einfacher: Das Hauptideal (μ) durchläuft dabei alle durch $\mathfrak{a}$ teilbaren Ideale genau einmal, excl. 0.

Ich setze nun, wenn $\mu = \mu^{(1)}$ dem reellen Körper $k^{(1)}$ zugeordnet ist,

$$\frac{c^{-\frac{s}{2}}}{|\mu|^s} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int\limits_0^\infty e^{-c\mu^{(1)2} x}\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx,$$

dagegen für die konjugierten Zahlen aus $k^{(2)}$ und $k^{(3)}$

$$\frac{2^{-s} c^{-}}{(\mu^{(2)}\mu^{(3)})^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^\infty e^{-2c\mu^{(2)}\mu^{(3)} y}\, y^{s-1}\, dy.$$

Unter c verstehe ich die positive Zahl

$$c = \frac{\pi}{\sqrt[3]{|d|\, N^2(\mathfrak{a})}}.$$

Dann ist also

$$\frac{2^{-s} c^{-\frac{3}{2}s}}{|N(\mu)|^s} = \frac{(2\pi^{\frac{3}{2}})^{-s} |d|^{\frac{1}{2}s} N(\mathfrak{a})^s}{|N(\mu)|^s}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty (xy^2)^{\frac{s}{2}} \exp\{-c(\mu^{(1)2} x + 2\mu^{(2)}\mu^{(3)} y)\} \frac{dx\,dy}{xy}$$

und

(4) $$Z(s;\, \mathfrak{a}) = \Gamma(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)(2^{-1}\pi^{-\frac{3}{2}}\sqrt{|d|})^s \zeta(s;\, \mathfrak{a})$$

$$= \sum_{(\mu^{(1)})}{}' \int\limits_0^\infty\!\!\int (xy^2)^{\frac{s}{2}} \exp\{-c(\mu^{(1)2} x + 2\mu^{(2)}\mu^{(3)} y)\} \frac{dx\,dy}{xy}.$$

Die eine Schwierigkeit, an der bisher, wie es scheint, die Untersuchung dieser $Z(s;\, \mathfrak{a})$ gescheitert ist, ist die Summationsbeschränkung für die μ, die ja nur die *verschiedenen Haupt-Ideale* durchlaufen sollen, welche durch $\mathfrak{a}$ teilbar sind. Es gelingt nun, in einfachster Weise diese Schwierigkeit zu überwinden, indem man diese Beschränkung von der Summation auf die Integration schiebt, wodurch die Summation ausführbar wird und grade auf die Thetareihe führt.

Um dies einzusehen, bedenke man, daß, wenn $\eta = \eta^{(1)} (> 1)$ etwa die positive Grundeinheit von k ist, $\eta^{(2)}$, $\eta^{(3)}$ die konjugierten und daher

$$|\eta^{(2)}|^2 = \eta^{(2)}\eta^{(3)} = \eta^{-1},$$

die Einführung von $\eta^{-2}x$ und ηy für das einzelne Glied in (4) denselben Effekt hat, als wenn man $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, $\mu^{(3)}$ durch die assoziierten Zahlen $\eta^{(1)}\mu^{(1)}$, $\eta^{(2)}\mu^{(2)}$, $\eta^{(3)}\mu^{(3)}$ ersetzt.

Wir machen nun in dem Integral folgende Substitution:

$$x = e^{2v}u, \qquad y = e^{-v}u.$$

Es ist

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 3ue^{v}, \qquad xy^2 = u^3, \qquad xy = e^{v}u^2.$$

Also wird

$$(5) \qquad \int_0^\infty\!\!\int (xy^2)^{\frac{s}{2}} \exp\left[-c(\mu^{(1)2}x + 2\mu^{(2)}\mu^{(3)}y)\right] \frac{dx\,dy}{xy}$$

$$= 3\int_{v=-\infty}^{+\infty}\int_{u=0}^{\infty} u^{\frac{3}{2}s-1} \exp\left[-c(\mu^{(1)2}e^{2v} + 2\mu^{(2)}\mu^{(3)}e^{-v})u\right] du\,dv.$$

Nun ist für irgend eine Funktion f

$$\int_{v=-\infty}^{+\infty} f(e^{v})\,dv = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{(-\frac{1}{2}+n)\log\eta}^{(+\frac{1}{2}+n)\log\eta} f(e^{v})\,dv$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2}\log\eta}^{+\frac{1}{2}\log\eta} f(\eta^{n}e^{v})\,dv = \int_{-\frac{1}{2}\log\eta}^{+\frac{1}{2}\log\eta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\eta^{n}e^{v})\,dv.$$

Wenn also für f die Exponentialgröße eingesetzt wird, folgt

$$\int_{v=-\infty}^{+\infty} \exp\left[-c(\mu^{(1)2}e^{2v} + 2\mu^{(2)}\mu^{(3)}e^{-v})u\right] dv$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}\log\eta}^{+\frac{1}{2}\log\eta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left[-c(\eta^{2n}\mu^{(1)2}e^{2v} + 2\eta^{-n}\mu^{(2)}\mu^{(3)}e^{-v})u\right] dv.$$

In dieser Summe durchläuft jetzt $\eta^{n}\mu^{(1)}$ alle zu $\mu^{(1)}$ assoziierten Zahlen mit dem gleichen Vorzeichen. Da aber Vorzeichenänderung von $\mu^{(1)}$ den Ausdruck unverändert läßt, ist das Integral über v von $-\infty$ bis $+\infty$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}\log\eta}^{+\frac{1}{2}\log\eta} \sum \exp(\ldots)\,dv,$$

summiert über *sämtliche* zu $\mu^{(1)}$ assoziierten Zahlen. Wird dann noch in (5) die Summation über alle verschiedenen Ideale $\mu^{(1)}$ ge-

nommen (außer 0), so erhalten wir endlich genau unsere Thetareihe, in der nur das Glied mit dem Exponenten Null fehlt. Somit ergibt sich

$$Z(s;\ \mathfrak{a}) = \tfrac{3}{2} \int\limits_{v=-\frac{1}{2}\log\eta}^{+\frac{1}{2}\log\eta} \int\limits_{u=0}^{\infty} u^{\frac{3}{2}s-1} \left\{\vartheta(e^{2v}u,\ e^{-v}u;\ \mathfrak{a}) - 1\right\} du\, dv.$$

Dieser Ausdruck ist überdies nicht von $\mathfrak{a}$ selbst, sondern seiner Entstehung nach nur von der Klasse von $\mathfrak{a}$ abhängig. Die weiteren Überlegungen verlaufen nun unter Benutzung der Transformationsformel (3) genau wie bei Riemann. In dem Integral über u von 0 bis 1 führen wir als neue Variable $\frac{1}{u}$ ein und erhalten durch Anwendung von (3)

$$\int\limits_{u=0}^{\infty} \ldots du$$

$$= \int\limits_{u=1}^{\infty} \left[u^{\frac{3}{2}s-1} \left\{\vartheta(e^{2v}u,\ e^{-v}u;\ \mathfrak{a}) - 1\right\} + u^{-\frac{3}{2}s-1} \left\{\vartheta\left(\frac{e^{-2v}}{u},\ \frac{e^{-v}}{u};\ \mathfrak{a}\right) - 1\right\}\right] du$$

$$= \int\limits_{u=1}^{\infty} \left[u^{\frac{3}{2}s-1} \left\{\vartheta(e^{2v}u,\ e^{-v}u;\ \mathfrak{a}) - 1\right\} + u^{\frac{3}{2}(1-s)-1} \left\{\vartheta\left(e^{-2v}u,\ e^{v}u;\ \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\right) - 1\right\}\right] du$$

$$+ \int\limits_{1}^{\infty} \left(u^{\frac{3}{2}(1-s)-1} - u^{-\frac{3}{2}s-1}\right) du.$$

Wird noch die Integration über v dazugenommen, so können wir in der zweiten ϑ-Funktion v durch $-v$ ersetzen, und wir erhalten folgende *Schlußformel*

$$(6)\qquad Z(s;\ \mathfrak{a}) = \frac{\log\eta}{s(s-1)}$$

$$+ \tfrac{3}{2} \int\limits_{v=\frac{1}{2}\log\eta}^{-\frac{1}{2}\log\eta} \int\limits_{1}^{\infty} \left[u^{\frac{3}{2}s-1} \left\{\vartheta(e^{2v}u,\ e^{-v}u;\ \mathfrak{a}) - 1\right\} + u^{\frac{3}{2}(1-s)-1} \left\{\vartheta\left(e^{2v}u,\ e^{-v}u;\ \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\right) - 1\right\}\right] du\, dv.$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$Z(s, \mathfrak{a})$ *ist abgesehen von den Polen* $s = 0,\ 1$ *eine in der ganzen endlichen Ebene reguläre Funktion und*

$$Z(s;\ \mathfrak{a}) + Z\left(s;\ \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\right)$$

bleibt bei Vertauschung von s *mit* $1 - s$ *ungeändert.*

Lassen wir insbesondere nun $\mathfrak{a}$ ein System von Repräsentanten aller Idealklassen in k durchlaufen, so gilt das Gleiche von $\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}$ und es ist

$$2\sum_{\mathfrak{a}} Z(s;\ \mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}}\left[Z(s, \mathfrak{a}) + Z\left(s;\ \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\right)\right].$$

Bedeutet nun $\zeta_k(s)$ die ζ-Funktion des Körpers k, so ist damit bewiesen:

$$s(1-s)\left(2^{-1}\pi^{-\frac{3}{2}}\sqrt{|d|}\right)^s\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta_k(s) = Z(s)$$

ist eine ganze Funktion und ändert sich nicht, wenn man s durch $1-s$ ersetzt.

4.

Die Verallgemeinerung des Satzes auf beliebige Körper bietet nicht die geringsten Schwierigkeiten. Das Resultat lautet folgendermaßen:

Es sei $\zeta_k(s)$ die ζ-Funktion des Körpers k vom Grade n und der Grundzahl d. Unter den konjugierten Körpern mögen r_1 reelle und r_2 imaginäre Körperpaare vorhanden sein ($n = r_1 + 2r_2$). Wir setzen

$$A = 2^{-r_2}\pi^{-\frac{n}{2}}\sqrt{|d|}.$$

Dann ist die Funktion

$$Z(s) = s(1-s)A^s\Gamma(s)^{r_2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1}\zeta_k(s)$$

eine ganze Funktion, die bei $s = 0, 1$ nicht verschwindet, und überdies sich bei Vertauschung von s mit $(1-s)$ nicht ändert.

Was die Nullstellen von $\zeta_k(s)$ anlangt, so ist ersichtlich, daß die negativen graden und ungraden Zahlen je nach den Werten von r_1 und r_2 mehrfache Nullstellen von $\zeta_k(s)$ sind. $s = 0$ ist $(r_1 + r_2 - 1)$-fache Nullstelle, also sovielfach, als der Körper unabhängige Einheiten hat.

Aus der Formel (6) ergibt sich auch sofort die Aussage über das Geschlecht von $Z(s)$. Durch ganz primitive Abschätzungen findet man: Es gibt eine Konstante a, sodaß für alle genügend großen $|s|$

$$|Z(s)| < e^{a|s|\log|s|}$$

Endlich ist $Z(s)$ auch wirklich transzendent, denn die Formel (6) zeigt, daß für kein festes m

$$\lim_{s=\infty} \frac{Z(s)}{s^m} = 0.$$

Führen wir $s = \frac{1}{2} + z$ ein, so wird $Z(s)$ eine grade Funktion von z, also eine ganze transzendente Funktion von $u = z^2$, für welche die Ungleichung

$$\left| Z\left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{u}\right)\right| < e^{u^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$$

für alle genügend großen $|u|$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt. Sie hat also unendlich viele Nullstellen $u_1, u_2, \ldots$ und es gilt die konvergente Produktdarstellung

$$Z\left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{u}\right) = Cu^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_n}\right).$$

Die ganze Beweismethode ist ersichtlich einer unmittelbaren Übertragung fähig auf Ringideale und überhaupt auf Moduln, ferner auch auf Zahlstrahlen in folgendem Sinne: Es sei α eine feste ganze Zahl des Körpers. Man betrachte nun die Zahlen μ, welche die Kongruenz

$$\mu \equiv \alpha\,.\,\text{Einheit} \pmod{\mathfrak{a}}$$

für irgend eine Einheit befriedigen. Läßt man nun in

$$\sum \frac{1}{N(\mu)^s}$$

μ nur diese Zahlen, und zwar von den assoziierten Zahlen nur je eine durchlaufen, so wird man bei entsprechender Umformung durch das Γ-Integral wieder auf die Thetareihen geführt, die aber dann nicht bloß für die Nullwerte der Argumente auftreten, für welche die Transformationsformel dann ein wenig komplizierter wird. Diese Reihen werden bei der Untersuchung der Primzahlen in Linearformen des algebraischen Körpers heranzuziehen sein [1]).

Ich erwähne schließlich noch, daß sich der Beweis für die Fortsetzbarkeit von $\zeta_k(s)$ für total reelle und einige andere Arten von Körpern ohne Benutzung der Thetafunktionen führen läßt, was ich in anderem Zusammenhang zur Darstellung bringen werde.

Basel, Dezember 1916.

1) Siehe meine in diesen Nachr. erscheinende Arbeit: Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper, wo ich auch den ausführlichen Beweis für den allgemeinen algebraischen Körper bringe.

Über eine neue Anwendung der Zetafunktionen auf die Arithmetik der Zahlkörper.

Von

E. Hecke in Basel.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 13. Januar 1917.

Die Anwendungen, welche bisher von der Dedekindschen Funktion $\zeta_k(s)$ des algebraischen Körpers k auf die Theorie dieses Körpers gemacht worden sind, lassen sich wesentlich in zwei Arten scheiden:

Bei der einen spielt nur das Verhalten von $\zeta_k(s)$ in der Umgebung von $s = 1$ eine Rolle; hierher gehört die Bestimmung der Klassenzahl von k, und der Nachweis, daß es unendlich viele Primideale von gewisser Beschaffenheit gibt. Bei der andern Anwendungsart, deren Schöpfer Riemann durch seine Abhandlung über die Anzahl der Primzahlen vom Jahre 1859 ist, kommt es auf das genaue Verhalten der analytischen Funktion $\zeta_k(s)$ in der ganzen Ebene an. Hierdurch wird dann eine scharfe Abschätzung der Anzahl der Primideale von vorgeschriebener Art erreicht, bei welcher bekanntlich die Nullstellen gewisser mit $\zeta_k(s)$ in naher Beziehung stehenden Funktionen eine ausschlaggebende Rolle spielen. Aus dem feineren Verhalten von $\zeta_k(s)$ als analytischer Funktion von s lassen sich also Aussagen über rein arithmetische Eigenschaften des Körpers k machen. Allerdings gelang die Erforschung von $\zeta_k(s)$ bisher nur in wenigen Fällen und zwar erst durch Kenntnis der Zerlegungsgesetze der Primzahlen im Körper k. Nachdem ich nun in einer in diesen Nachrichten vorstehend abgedruckten Note gezeigt habe, daß $(s-1)\,\zeta_k(s)$ stets eine ganze transzendente Funktion ist und einer einfachen Funktionalgleichung genügt, eröffnet sich die Möglichkeit, in viel größerem Umfange als bisher aus dem Ver-

halten von $\zeta_k(s)$ Aussagen über arithmetische Eigenschaften von k herzuleiten.

In den Fällen nämlich, in welchen die Zerfällung der Primzahlen bekannt ist, stehen jetzt zwei wesentlich verschiedene Darstellungen von $\zeta_k(s)$ zur Verfügung, einmal die aus der allgemeinen Theorie fließende und zweitens die aus den Zerlegungsgesetzen sich ergebende. Durch Vergleich der beiden Darstellungen wird man dann Aussagen über den Körper k gewinnen.

Es ist mir nun so gelungen, die ζ-Funktion in dieser neuen Art auf die arithmetische Theorie des Zahlkörpers mit Erfolg anzuwenden. Die Funktionalgleichung erweist sich als eine reiche Quelle von arithmetischen Wahrheiten, deren Mannigfaltigkeit sich noch garnicht überblicken läßt. Die ersten Körper, auf die sich die Methode ohne Schwierigkeit anwenden läßt, sind die Klassenkörper, welche durch die Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen geliefert werden. Für diese Körper sind die Zerlegungsgesetze der Primzahlen bekannt, mit Ausnahme endlich vieler Primzahlen. Die Diskriminante dieser Körper ist erst durch die tiefgehenden und sehr umfangreichen Entwicklungen von Herrn *Fueter* [1]) bestimmt worden, aus dessen Sätzen aber, soweit ich sehe, unmittelbar noch nichts über jene Ausnahmeprimzahlen folgt. Hier zeigt nun meine oben skizzierte Methode ihre Kraft, *denn die Funktionalgleichung der ζ-Funktion dieser Körper ist grade äquivalent mit der Tatsache, daß in der Diskriminante dieser Körper gewisse Primzahlen zu genau bestimmten Exponenten aufgehen und daß dies die einzigen Ausnahme-Primzahlen sind, übrigens mit einer ebenfalls genau angebbaren Zerlegung.*

Es dürfte dies wohl der einfachste Beweis für die angegebenen Sätze über die Klassenkörper werden. Um ihn durchzuführen, ist es nur notwendig, die Theorie der Ringideale in quadratischen Körpern und der zugehörigen Zetafunktionen noch zu vervollständigen. Betrachtet man statt der Ringideale die Strahlideale [2]), so gibt die analoge Überlegung die Sätze für die Teilungskörper der elliptischen Funktionen, sofern die funktionentheoretischen Vorarbeiten geleistet sind.

Im Folgenden will ich den Beweis für den einfachsten Fall auseinandersetzen, wo der Ring mit dem Grundkörper identisch

---

1) *R. Fueter*, Abelsche Gleichungen in quadratisch imaginären Zahlkörpern. Math. Ann. Bd. 75 (1914), S. 177.

2) Vgl. meine in diesen Nachrichten erscheinende Arbeit über die allgemeinen L-Funktionen.

ist und wir es also mit dem gewöhnlichen Idealbegriff zu tun haben.

Es sei k ein imaginärer quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante d und der Klassenzahl h. Die elliptische Modulfunktion $J(\tau)$ liefert nun, wie die Theorie der komplexen Multiplikation lehrt, für gewisse Argumente τ einen algebraischen Zahlkörper K, der folgende Eigenschaften besitzt:

1) K ist relativ-Abelsch bezüglich k vom Relativgrade h.

2) Die Zerfällung der Primideale $\mathfrak{p}$ aus k erfolgt in K nach folgender Regel: Ist f der kleinste positive Exponent derart, daß

$$\mathfrak{p}^f \sim 1 \text{ in } k,$$

so zerfällt $\mathfrak{p}$ in K in $\frac{h}{f}$ verschiedene Faktoren gleichen Grades. Hiervon sind ausgenommen nur endlich viele Primideale, über deren Verhalten man nichts weiß.

Ich will nun mit meiner Methode zeigen, daß hieraus folgt: *Die Relativdiskriminante von K bezüglich k ist 1 und das Zerlegungsgesetz 2) gilt für alle $\mathfrak{p}$ ohne Ausnahme.*

Beweise für diese beiden Behauptungen gibt Herr *Furtwängler*: Nämlich auf Grund des allgemeinen Existenzbeweises für den Klassenkörper ist leicht zu sehen, daß K der Klassenkörper ist. Um die Ausnahme-Primzahlen zu beherrschen, ist aber überdies noch das Reziprozitätsgesetz für l-te Potenzreste erforderlich[1]). Nach Herrn *Fueter* braucht man zum Beweise der Unverzweigtheit von K die ganze Theorie der Zahlstrahlen.

Um den Beweis zu führen, stellen wir uns zuerst nach bekannten Prinzipien die Funktion $\zeta_k(s)$ für K her. Es ist ($\Re(s) > 1$)

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{P}} (1 - N(\mathfrak{P})^{-s})^{-1}, \tag{1}$$

worin $\mathfrak{P}$ alle verschiedenen Primideale in K durchläuft und N die Norm in K bedeutet. Fassen wir in diesem Produkt diejenigen Faktoren ins Auge, welche von den Teilern $\mathfrak{P}$ eines bestimmten Primideals $\mathfrak{p}$ in k herrühren ($\mathfrak{p}$ kein Ausnahme-Ideal), so kann man bekanntlich diese Faktoren auch so schreiben:

$$\prod_{\chi} (1 - \chi(\mathfrak{p})\, n(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}. \tag{2}$$

1) *P. Furtwängler*, Allgemeiner Existenzbeweis f. d. Klassenkörper ... Math. Ann. Bd. 63 (1906) S. 1, sowie Allgemeiner Beweis des Zerlegungssatzes in diesen Nachr. 1911, S. 293.

Hierin bedeutet $n(\mathfrak{p})$ die Norm von $\mathfrak{p}$ in k, $\chi(\mathfrak{p})$ ist ein Klassencharakter, welcher der Idealklasse von $\mathfrak{p}$ in der Abelschen Gruppe der Idealklassen in k zugeordnet ist, und das Produkt ist über die h existierenden Charaktere χ zu erstrecken (die χ sind h-te Einheitswurzeln). Das Produkt (2), über alle dem Zerlegungsgesetz 2) folgenden Primideale $\mathfrak{p}$ erstreckt, ist also in dem Produkt (1) enthalten, letzteres enthält aber überdies noch endlich viele Faktoren, die sich auf die Ausnahme-Ideale beziehen.

Setzen wir nun

$$L(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \chi(\mathfrak{p}) n(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}.$$

Hier ist das Produkt über *alle* Primideale $\mathfrak{p}$ in k, und die Summe über alle Ideale $\mathfrak{a}$ aus k zu erstrecken. Ist χ der Hauptcharakter (der für alle Klassen gleich 1 ist), so ist das zugehörige $L = \zeta_k(s)$. Nunmehr sei $\mathfrak{q}$ ein Ausnahme-Primideal in k. Es zerfalle in K in e_1 verschiedene Faktoren vom Relativgrad f_1. Die in (1) von diesen Faktoren herrührenden Bestandteile haben dann die Form

$$(1 - n(\mathfrak{q})^{-f_1 s})^{-e_1},$$

die entsprechenden in den $L(s, \chi)$ vorkommenden Faktoren sind

$$(1 - n(\mathfrak{q})^{-fs})^{-e}.$$

Hierbei ist $ef = e_1 f_1$, sofern $\mathfrak{q}$ nicht in der Relativdiskriminante aufgeht. So ergibt sich

(3) $$\zeta_K(s) = \varphi(s) \prod_{\chi} L(s, \chi),$$

worin

(4) $$\varphi(s) = \prod_{\mathfrak{q}} \frac{(1 - n(\mathfrak{q})^{-fs})^e}{(1 - n(\mathfrak{q})^{-f_1 s})^{e_1}}.$$

Hier ist das Produkt über die endlich vielen Ausnahme-Ideale $\mathfrak{q}$ zu erstrecken. Nun gilt, wie bekannt[1]), für jedes $L(s, \chi)$ der Satz:

$$(2^{-1} \pi^{-1} \sqrt{|d|})^s \, \Gamma(s) L(s, \chi)$$

ändert sich nicht, wenn man s durch $1 - s$ und χ durch χ^{-1} ersetzt. Andrerseits habe ich gezeigt[2]): auch die Funktion

---

1) Vgl. etwa Epstein, Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. Math. Ann. Bd. 63 (1907). Natürlich folgt das auch aus meinen allgemeineren Sätzen.

2) Vgl. meine vorstehende Arbeit.

$$(2^{-h}\pi^{-h}\sqrt{|D|})\,\Gamma(s)^h\zeta_K(s)$$

bleibt bei Vertauschung von s mit $1-s$ ungeändert. (D ist die Diskriminante von K). Denn K ist total imaginär und hat den Grad $2h$. In Verbindung mit (3) ergibt sich daher:

$$\varphi(s)\left(\frac{\sqrt{|d|}^h}{\sqrt{|D|}}\right)^{-s}$$

ändert sich ebenfalls nicht, wenn man s durch $1-s$ ersetzt. Die Betrachtung der Nullstellen und Pole von $\varphi(s)$ lehrt unmittelbar, daß das nur möglich ist, wenn φ und die Klammergröße von s unabhängig sind, also

$$\varphi(s) = 1,$$
$$|D| = |d|^h.$$

Die zweite Gleichung sagt aber, wenn wir die bekannten Sätze über die Diskriminanten benutzen — aus, daß K in bezug auf k die Relativdiskriminante 1 hat.

Ferner folgt aus $\varphi(s) = 1$, daß die Faktoren in (4), welche denselben Wert $n(\mathfrak{q})$ haben, für sich gleich 1 sein müssen. Es ist also

(5) $$(1-n(\mathfrak{q})^{-fs})^e = (1-n(\mathfrak{q})^{-f_1 s})^{e_1},$$

wenn nur *ein* Ausnahmeprimideal $\mathfrak{q}$ existiert, dessen Norm $= n(\mathfrak{q})$ ist; oder

(6) $$(1-n(\mathfrak{q})^{-fs})^{2e} = (1-n(\mathfrak{q})^{-f_1 s})^{e_1}(1-n(\mathfrak{q})^{-f_1' s})^{e_1'},$$

wenn zwei verschiedene Ausnahmeprimideale $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ mit derselben Norm existieren, wobei die Exponenten e_1 und e_1' für beide Ideale ersichtlich den gleichen Wert haben, weil K ein absolut Galoisscher Körper ist. Die Gleichung (5) kann, wie man durch Betrachtung der Nullstellen wieder erkennt, nur stattfinden, wenn

$$f = f_1, \qquad e = e_1$$

ist, d. h. $\mathfrak{q}$ muß doch dem Zerlegungsgesetz 2) folgen. Ebenso kann (6) nur stattfinden, wenn

$$f_1 = f_1' = f, \qquad 2e = e_1 + e_1'.$$

Da aber

$$h = e_1 f_1 = e_1' f_1' = ef,$$

so ist $e_1 = e_1' = e$ und $\mathfrak{q}$ ist wieder kein Ausnahme-Ideal.

Damit ist der Beweis der Behauptung erbracht. Naturgemäß lassen sich aus der ζ-Funktion eines Körpers die Zerlegungsgesetze

der Primideale im allgemeinen nicht *eindeutig* ableiten, nur im Falle eines absolut-Galoisschen Körpers ist dies möglich. Deshalb ist diese Methode noch unverändert anwendbar auf die Ringklassenkörper, dagegen nicht mehr auf die Teilungskörper, weil diese keine Galoisschen Körper zu sein brauchen. Hier müssen noch einige zahlentheoretische Überlegungen hinzutreten.

Wie man sieht, ist der Beweis außerordentlich einfach. Man kann sagen, daß die Zerlegungsgesetze und die Sätze über die Faktoren der Relativdiskriminante der höheren Klassenkörper vielleicht ihren kürzesten und vollständigsten Ausdruck in dem Satze finden, daß für alle diese relativ-Abelschen Zahlkörper stets die Beziehung

$$\zeta_K(s) = \prod_{\chi} L(s, \chi)$$

besteht, wo das Charakterensystem aus dem vollständigen System eigentlicher Charaktere nach allen Teilern des zugehörigen Führers besteht.

Basel, Januar 1917.

Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

(Dritte Abhandlung.)

Vorgelegt in der Sitzung vom 3. Februar 1917.

Unter den sieben ersten Voraussetzungen des Hauptsatzes der zweiten Abhandlung [1]) behaupte ich des ferneren:

Entweder alle c_n *sind* 0, *oder es besteht für kein* $\varepsilon > 0$ *die Relation*

$$(1) \qquad \Omega(x) = \sum_{\lambda_n \leqq x} e_n \lambda_n^\beta = V(x) + O\left(x^{-\frac{\eta+\frac{1}{2}}{H}+\beta-\varepsilon}\right),$$

in der $V(x)$ *eine endliche Summe* $\sum b x^S \log^Q x$ *mit komplexen* b, S, *wobei* $\Re S \leqq \beta$, *und ganzen* $Q \geqq 0$ *ist* [2]).

---

1) Diese Nachrichten, Jahrgang 1915, S. 209—243.

2) Übrigens ist a priori klar, daß, wenn (1) mit komplexen b, S und ganzen $Q \geqq 0$ besteht, und wenn in $V(x)$ die Glieder mit gleichen S, Q zusammengefaßt und alsdann nur die mit $b \neq 0$ beibehalten werden, $\Re S \leqq \beta$ ist. Denn anderenfalls sei $\beta + \delta$ der größte vorkommende Wert von $\Re S$ und Q_0 das größte Q in den Gliedern mit $\Re S = \beta + \delta$. Dann ist

$$V(x) = x^{\beta+\delta} \log^{Q_0} x \sum_{n=1}^{k} b_n x^{t_n i} + o\left(x^{\beta+\delta} \log^{Q_0} x\right),$$

wo $k \geqq 1$, $b_1 \neq 0, \ldots, b_k \neq 0$, die t_n reell und verschieden sind. Es ist leicht ersichtlich, daß

$$\limsup_{x=\infty} \left| \sum_{n=1}^{k} b_n x^{t_n i} \right| > 0$$

ist. (Denn wäre bei $y \rightarrow \infty$

$$\sum_{n=1}^{k} b_n e^{y t_n i} \rightarrow 0,$$

Hilfssatz: *Die a. a. O. auf* S. 217 *definierte Funktion* $L(w)$ *des positiven* w *ist beliebig oft differentiierbar, und bei wachsendem* w *ist für jedes* $m \geqq 0$

$$L^{(m)}(w) = O\left(w^{\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho-m\left(1-\frac{1}{H}\right)}\right).$$

Vorbemerkung: Damals brauchte ich dies für $m = 0$ und $m = \varrho$, heute außerdem für $m = 1$ und $m = \varrho + 1$; am kürzesten verfahre ich daher, indem ich es für alle m im Anschluß an meine alte Beweismethode feststelle.

Beweis des Hilfssatzes: Es bezeichne $P_1(w)$ bezw. $P_2(w)$ die Residuensumme der Funktion (25) in den Intervallen $\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}$ inkl. bis $\frac{\eta-\varrho+m+1}{H}$ exkl. bezw. $\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}$ inkl. bis $\frac{\eta-\varrho+m-\frac{1}{2}}{H}$ exkl. Dann ist, da die Verschiebung der Integrationswege und die Differentiation unter dem Integralzeichen fast wörtlich wie auf S. 217—219 begründet wird,

$$L(w) = \int\limits_{\left(\frac{\eta-\varrho+m+1}{H}\right)} G(s)\frac{w^{s+\varrho}}{s(s+1)\dots(s+\varrho)}\,ds - 2\pi i\,P_1(w),$$

$$L^{(m)}(w) = \int\limits_{\left(\frac{\eta-\varrho+m+1}{H}\right)} G(s)\frac{(s+\varrho-m+1)\dots(s+\varrho)\,w^{s+\varrho-m}}{s\dots(s+\varrho)}\,ds - 2\pi i\,P_1^{(m)}(w)$$

---

so folgte daraus im Falle $k = 1$ sofort $b_1 = 0$, im Falle $k > 1$

$$b_1 + \sum_{n=2}^{k} b_n e^{y(t_n-t_1)i} \to 0,$$

$$b_1 + \frac{1}{y}\sum_{n=2}^{k} b_n \frac{e^{y(t_n-t_1)i}-1}{(t_n-t_1)i} = \frac{1}{y}\int_0^y\left(b_1 + \sum_{n=2}^{k} b_n e^{z(t_n-t_1)i}\right)dz \to 0,$$

$$b_1 + O\left(\frac{1}{y}\right) \to 0,$$

$$b_1 = 0.)$$

Demnach wäre

$$V(x) \neq o\left(x^{\beta+\delta}\log^{Q_0} x\right),$$

also nach (1)

$$\Omega(x) \neq o\left(x^{\beta+\delta}\right),$$

während nach S. 213, Fußnote 2,

$$\Omega(x) = O\left(x^{\beta+\frac{\delta}{2}}\right) = o\left(x^{\beta+\delta}\right)$$

ist.

$$= \int\limits_{\left(\frac{\eta-\varrho+m-\frac{1}{2}}{H}\right)} G(s) \frac{(s+\varrho-m+1)\ldots(s+\varrho)\, w^{s+\varrho-m}}{s\ldots(s+\varrho)}\, ds - 2\pi i\, P_2^{(m)}(w).$$

Hierin ist nach (19) der Integrand

$$w^{\frac{\eta-\varrho+m-\frac{1}{2}}{H}+\varrho-m}\, w^{ti}\left(C_0 t^{-\frac{1}{2}} e^{-Hti\log t - Ati} + O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right)\right),$$

woraus genau wie beim Beweis des Hilfssatzes 3 die Behauptung herauskommt, da

$$\frac{\eta-\varrho+m-\frac{1}{2}}{H}+\varrho-m = \frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho-m\left(1-\frac{1}{H}\right)$$

ist.

Beweis des zu Anfang ausgesprochenen Satzes: Es seien nicht alle $c_n = 0$, also ohne Beschränkung der Allgemeinheit: es sei $c_1 \neq 0$. Dann ist die linke Seite der Relation (47) (die lediglich aus den sieben ersten Voraussetzungen gefolgert wurde) für $x = l_1$ nicht ϱ mal differentiierbar; denn für $x > 0$ ist

$$\Phi^{(\varrho-1)}(x) = \int_0^x B(y)\, dy,$$

also $= 0$ für $0 < x \leqq l_1$ und $= c_1(x-l_1)$ für $l_1 \leqq x < l_2$; $\Phi^{(\varrho-1)}(x)$ hat also für $x = l_1$ die hintere Ableitung 0, die vordere Ableitung c_1.

Aber $R_2(x)$ ist für $x > 0$ beliebig oft differentiierbar. Also ist

$$f(x) = 2\pi i(\Phi(x) - R_2(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^{-\varrho} L(\lambda_n x)$$

für $x = l_1$ nicht ϱ mal differentiierbar.

Nun ist für ganzes $v > 1$, wenn $\Omega(\lambda_0)$ Null bedeutet,

$$\sum_{n=1}^{v} e_n \lambda_n^{-\varrho} L(\lambda_n x) = \sum_{n=1}^{v} e_n \lambda_n^{\beta} \lambda_n^{-\beta-\varrho} L(\lambda_n x)$$

$$= \sum_{n=1}^{v} (\Omega(\lambda_n) - \Omega(\lambda_{n-1}))\, \lambda_n^{-\beta-\varrho} L(\lambda_n x)$$

$$= \sum_{n=1}^{v-1} \Omega(\lambda_n)\left(\lambda_n^{-\beta-\varrho} L(\lambda_n x) - \lambda_{n+1}^{-\beta-\varrho} L(\lambda_{n+1} x)\right) + \Omega(\lambda_v)\, \lambda_v^{-\beta-\varrho} L(\lambda_v x).$$

Wegen[1]) $\Omega(x) = O(x^{\beta+\delta})$ (für alle $\delta > 0$) ist bei festem $x > 0$

1) S. 213, Fußnote 2. Die — zum Widerspruch führende — Annahme (1) mit $\Re S < \beta$, aus der es auch folgt, möchte ich noch nicht benutzen, um den Kern meiner Schlüsse deutlicher hervortreten zu lassen.

nach (32) (d. i. dem Spezialfall $m = 0$ des Hilfssatzes) für wachsendes v

$$\Omega(\lambda_v)\,\lambda_v^{-\beta-\varrho}\,L(\lambda_v x) = O\left(\lambda_v^{\beta+\delta-\beta-\varrho+\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho}\right)$$

$$= O\left(\lambda_v^{\delta+\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}}\right) = o(1)$$

wegen $\eta-\varrho-\frac{1}{2}<0$. Daher ist

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\Omega(\lambda_n)\left(\lambda_n^{-\beta-\varrho}L(\lambda_n x)-\lambda_{n+1}^{-\beta-\varrho}L(\lambda_{n+1}x)\right)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\Omega(\lambda_n)\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}\frac{d}{du}\left(u^{-\beta-\varrho}L(ux)\right)du$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}\Omega(u)\frac{d}{du}\left(u^{-\beta-\varrho}L(ux)\right)du$$

$$= -\int_{\lambda_1}^{\infty}\Omega(u)\left(\frac{-\beta-\varrho}{u^{\beta+\varrho+1}}L(ux)+\frac{x}{u^{\beta+\varrho}}L'(ux)\right)du;$$

dies Integral konvergiert, da bei festem x und wachsendem u nach den Spezialfällen $m = 0$ und $m = 1$ des Hilfssatzes die Klammer im Integranden

$$O\left(u^{-\beta-\varrho-1+\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho}\right)+O\left(u^{-\beta-\varrho+\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho-1+\frac{1}{H}}\right)$$

$$= O\left(u^{-\beta+\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}-1}\right),$$

also der Integrand (wegen $\varrho > \eta+\frac{1}{2}$)

$$O\left(u^{\beta+\delta-\beta+\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}-1}\right) = O\left(u^{-1-\delta'}\right), \quad \delta' > 0$$

ist.

Aus demselben Grunde konvergiert (wegen $V(u) = O(u^{\beta+\delta})$) das Integral

$$g(x) = \int_{\lambda_1}^{\infty}V(u)\left(\frac{-\beta-\varrho}{u^{\beta+\varrho+1}}L(ux)+\frac{x}{u^{\beta+\varrho}}L'(ux)\right)du;$$

die Substitution $u = \frac{z}{x}$ liefert

$$g(x) = x^{\beta+\varrho}\int_{\lambda_1 x}^{\infty}\sum b\frac{z^S}{x^S}(\log z-\log x)^{\varrho}\cdot\left(\frac{-\beta-\varrho}{z^{\beta+\varrho+1}}L(z)+\frac{1}{z^{\beta+\varrho}}L'(z)\right)dz$$

und lehrt, daß $g(x)$ für $x > 0$ beliebig oft nach x differentiierbar

ist, da dies von jedem Integral

$$\int_{\lambda_1 x}^{\infty} z^s \log^{\varrho'} z \left(\frac{-\beta-\varrho}{z^{\beta+\varrho+1}} L(z) + \frac{1}{z^{\beta+\varrho}} L'(z) \right) dz$$

gilt $\left(\frac{d}{dx} = -\lambda_1 \text{ mal dem Integranden für } z = \lambda_1 x \text{ etc.}\right)$.

Wenn also

$$\Omega(x) - V(x) = W(x)$$

gesetzt wird, ist

$$-f(x) - g(x) = \int_{\lambda_1}^{\infty} W(u) \left(\frac{-\beta-\varrho}{u^{\beta+\varrho+1}} L(ux) + \frac{x}{u^{\beta+\varrho}} L'(ux) \right) du$$

an der Stelle $x = l_1$ nicht ϱ mal nach x differentiierbar. Es kann also nicht

(2) $$\int_{\lambda_1}^{\infty} W(u) \frac{d^\varrho}{dx^\varrho} \left(\frac{-\beta-\varrho}{u^{\beta+\varrho+1}} L(ux) + \frac{x}{u^{\beta+\varrho}} L'(ux) \right) du$$

für $\frac{l_1}{2} < x < 2l_1$ gleichmäßig konvergieren [1]). Der Faktor von $W(u)$ im Integranden ist

$$\frac{-\beta-\varrho}{u^{\beta+1}} L^{(\varrho)}(ux) + \frac{x}{u^\beta} L^{(\varrho+1)}(ux),$$

also nach den Spezialfällen $m = \varrho$ und $m = \varrho + 1$ des Hilfssatzes bei wachsendem u für $\frac{l_1}{2} < x < 2l_1$ gleichmäßig in x

$$O\left(u^{-\beta-1+\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\frac{\varrho}{H}}\right) + O\left(u^{-\beta+\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\frac{\varrho}{H}-1+\frac{1}{H}}\right)$$

$$= O\left(u^{-\beta+\frac{\eta+\frac{1}{2}}{H}-1}\right).$$

---

1) Denn, wenn im Innern eines Intervalls $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert, jedes $f_n(x)$ Ableitungen aller Ordnungen besitzt und für ein $\varrho > 0$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(\varrho)}(x)$ gleichmäßig konvergiert, so ist die erste Reihe (nämlich gliedweise) ϱ mal differentiierbar. Es ist nicht nötig — wenn auch die Bestätigung hier ein Leichtes wäre — die gleichmäßige Konvergenz oder auch nur die Konvergenz der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(\varrho_0)}(x)$ für die $\varrho_0 < \varrho$ besonders vorauszusetzen. $f_n(x)$ bedeutet natürlich

$$\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} W(u) \left(\frac{-\beta-\varrho}{u^{\beta+\varrho+1}} L(ux) + \frac{x}{u^{\beta+\varrho}} L'(ux) \right) du.$$

Es gelte nun das obige (1) für ein $\varepsilon > 0$; dann wäre der Integrand in (2) für $\frac{l_1}{2} < x < 2l_1$ gleichmäßig

$$O\left(u^{-\frac{\eta+\frac{1}{2}}{H}+\beta-\varepsilon-\beta+\frac{\eta+\frac{1}{2}}{H}-1}\right)=O(u^{-1-\varepsilon}),$$

so daß das Integral (2) doch gleichmäßig konvergieren würde.

Über die Heckesche Funktionalgleichung.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 3. Februar 1917.

Die wichtige Entdeckung des Herrn Hecke[1]), daß die Zetafunktion eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers in der ganzen Ebene fortsetzbar ist und einer der Riemannschen ähnlichen Funktionalgleichung genügt, zieht unabsehbare Konsequenzen nach sich.

Im folgenden beabsichtige ich zwei Tatsachen zu beweisen, die auch nach Kenntnis des Heckeschen Satzes recht tief liegen; verging doch im Spezialfall des Körpers der rationalen Zahlen, wo Riemann 1859 den Heckeschen Satz bewiesen hatte, etwa ein halbes Jahrhundert, bis das bewiesen wurde, was für alle Körper den Inhalt meiner heutigen Abhandlung ausmacht.

Die erste Tatsache werde ich durch Kombination des Heckeschen Satzes mit einem älteren Satze[2]) von mir in wenigen Zeilen erhalten; die zweite Tatsache durch Kombination des Heckeschen Satzes mit einer älteren Methode von mir, die ich bisher nur in Spezialfällen[3]) publiziert hatte und erst für den gegenwärtigen

---

1) *Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper* [diese Nachrichten, Jahrgang 1917, S. 77—89].

2) *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen* (zweite Abhandlung) [diese Nachrichten, Jahrgang 1915, S. 209—243], S. 210—214.

3) *Über die Gitterpunkte in einem Kreise* (zweite Mitteilung) [diese Nachrichten, Jahrgang 1915, S. 161—171], S. 161—169; *Neue Untersuchungen über die Pfeiffer'sche Methode zur Abschätzung von Gitterpunktanzahlen* [Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. CXXIV (1915), Abt. IIa, S. 469—505], S. 499—505. In der ersten dieser Arbeiten bewies ich über die Lösungszahl der Ungleichung $u^2 + v^2 \leq x$, welche bekanntlich $\pi x + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$ ist, daß sie für kein $\vartheta < \frac{1}{4}$ gleich $\pi x + O(x^{\vartheta})$ ist. Gleichzeitig und unabhängig (aber auf anderem Wege) bewies

Zweck in einer hier gleichzeitig erscheinenden Abhandlung[1]) in hinreichender Allgemeinheit ausgearbeitet habe. Beide Tatsachen hängen eng zusammen, indem sie dieselbe Zahl nach oben und unten abschätzen.

Das Ganze werde ich auch für die Ideale einer Klasse (statt aller Ideale des Körpers) zu gleicher Zeit machen. Für jede Klasse hat Herr Hecke ja auch[2]) die zugehörige Zetafunktion fortgesetzt und eine Funktionalgleichung gefunden.

Es sei[3]) $\varkappa$ ein algebraischer Zahlkörper $k$ten Grades. Es sei $\mathfrak{K}$ irgend eine Idealklasse, $F(n; \mathfrak{K})$ die Anzahl der Darstellungen der positiven ganzen Zahl n als Norm eines Ideals der Klasse $\mathfrak{K}$ und für $x > 0$

$$H(x; \mathfrak{K}) = \sum_{n \leqq x} F(n; \mathfrak{K})$$

die Anzahl der Ideale der Klasse mit Norm $\leqq x$. Bekanntlich[4]) ist

---

Herr Hardy in seiner Arbeit *On the expression of a number as the sum of two squares* [The quarterly Journal of pure and applied Mathematics, Bd. XLVI (1915), S. 263—283], S. 266—271, genau diesen Satz und etwas mehr (ohne aber den Wert $\frac{1}{4}$ im Sinne des obigen Wortlauts zu übertreffen). Ferner deutete er in seiner Note *Sur le problème des diviseurs de Dirichlet* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. CLX (1915), S. 617—619] den Beweis des entsprechenden Satzes über die Lösungszahl $\tau(x)$ der Ungleichung $uv \leqq x$ (in positiven u, v) an und führte ihn mit allen Einzelheiten in seiner späteren Arbeit aus: *On Dirichlet's Divisor Problem* [Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. II, Bd. XV (1916), S. 1—25]. Hier sagt er auf S. 23 unter Hinweis auf die in dieser Anmerkung erstgenannte, ihm inzwischen zugegangene Arbeit von mir: „I have no evidence that Landau has considered the Ω-problem for $\Delta(n)$, which is the main subject of this paper". Daher erwähne ich: ich hatte auch hier mit meiner Methode die Unmöglichkeit des $O(x^{\vartheta})$ mit $\vartheta < \frac{1}{4}$ (für $\Delta(x) = \tau(x) - x \log x - (2C-1)x$) erkannt, wollte diesen Satz mit Beweis als Hauptresultat meiner Arbeit *Über Dirichlets Teilerproblem* [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1915, S. 317—328] publizieren, ließ aber diesen Teil aus dem Manuskript weg, weil ich durch Herrn Hardys Freundlichkeit einige Tage vor Absendung einen Separatabdruck seiner Comptes rendus-Note (die sogar wörtlich denselben Titel trug) erhalten hatte, in der er meinen Satz (und etwas mehr, ohne aber $\frac{1}{4}$ durch eine größere Zahl zu ersetzen) bewies. Mein damals unterdrückter Beweis war im wesentlichen mit dem betreffenden Spezialfall meines heutigen Beweises der Relation (13) des Textes identisch.

1) *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen* (dritte Abhandlung) [diese Nachrichten, Jahrgang 1917, S. 96—101].

2) Dies ging sogar bei ihm voran und ergab durch Summation über alle Klassen jenes.

3) Um Anschluß an die Buchstaben meiner hier benutzten Arbeiten zu gewinnen, muß ich in den Bezeichnungen von Herrn Hecke abweichen.

4) Weber, *Ueber einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integral-*

(1) $$H(x;\mathfrak{K}) = \alpha x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

wo α eine positive, nur vom Körper abhängige, also auch von der Klasse unabhängige Konstante ist. Wird also für $\sigma > 1$

$$\zeta(s;\mathfrak{K}) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n;\mathfrak{K})}{n^s}$$

gesetzt, wo $\mathfrak{n}$ alle Ideale der Klasse $\mathfrak{K}$ durchläuft, so ist die Dirichletsche Reihe

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n;\mathfrak{K})-\alpha}{n^s} = \zeta(s;\mathfrak{K}) - \alpha\zeta(s)$$

(wo $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion bezeichnet) für $\sigma > 1-\frac{1}{k}$ konvergent, also $\zeta(s;\mathfrak{K})$ dort bis auf den Pol erster Ordnung $s=1$ mit dem Residuum α regulär.

Wird die untere Grenze der ϑ, für die

$$H(x;\mathfrak{K}) = \alpha x + O(x^{\vartheta})$$

ist, gleich γ gesetzt, so war, da offenbar[1]) $\gamma \geqq 0$ ist,

(3) $$0 \leqq \gamma \leqq \frac{k-1}{k} = 1-\frac{1}{k}$$

bekannt; weiter nichts.

Die Heckesche Entdeckung (deren Beweis übrigens vom Weberschen Satz (1) keinen Gebrauch macht) lautet nun folgendermaßen: Es bezeichne r_1 die Anzahl der zu $\varkappa$ konjugierten reellen Körper, r_2 die Anzahl der konjugierten nicht reellen Körperpaare ($r_1 \geqq 0$, $r_2 \geqq 0$, $r_1 + 2r_2 = k$), a und b gewisse nur vom Körper (nicht von der Klasse) abhängige positive Konstanten und $\bar{\mathfrak{K}}$ eine gewisse dem $\mathfrak{K}$ adjungierte Klasse[2]), die auch $\mathfrak{K}$ selbst sein kann

rechnung [diese Nachrichten, Jahrgang 1896, S. 275—281], S. 279—281. Es kommt in dieser, den klassischen Dedekindschen Ansatz (aus dem Dedekind das für seine Anwendungen ausreichende Ergebnis $H(x;\mathfrak{K}) = \alpha x + o(x)$ geschlossen hatte) weiterführenden Untersuchung nur darauf an, für einen gewissen k-dimensionalen Bereich, dessen Randgleichungen in den Koordinaten und $x^{\frac{1}{k}}$ homogen sind, festzustellen, daß die Anzahl seiner Gitterpunkte bei wachsendem Parameter x gleich dem Volumen vx des Bereiches plus einem Fehler von der Größenordnung der Oberfläche $cx^{\frac{k-1}{k}}$ ist.

1) Denn sonst könnte $H(x;\mathfrak{K})$ nicht unendlich viele ganzzahlige Sprünge machen.

2) Es ist nämlich $\bar{\mathfrak{K}}$ die Klasse, welche durch Multiplikation mit $\mathfrak{K}$ die Klasse des Grundideals $\mathfrak{d}$ des Körpers ergibt. Doch ist dies unerheblich.

und jedenfalls mit $\mathfrak{K}$ alle Klassen durchläuft; es werde

$$G(s) = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \right)^{r_1} \left(\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} \right)^{r_2}$$

gesetzt. Dann ist $\zeta(s; \mathfrak{K})$ in der ganzen Ebene regulär bis auf den Pol $s = 1$ und genügt der Funktionalgleichung

(4) $$\zeta(s; \mathfrak{K}) = ab^s G(s) \zeta(1-s; \mathfrak{K}).$$

Außerdem brauche ich — was bei Herrn Heckes Beweis vorkommt —, daß in jedem festen Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ gleichmäßig

$$\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1} (\Gamma(s))^{r_2} \zeta(s; \mathfrak{K}) = O(1)$$

ist, also, weil dort bekanntlich gleichmäßig

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = O(e^t), \quad \frac{1}{\Gamma(s)} = O(e^{2t})$$

ist, gleichmäßig

(5) $$\zeta(s; \mathfrak{K}) = O(e^{kt}).$$

Aus (4) und (5) ist leicht nach bekanntem Paradigma[1]) für $k \geqq 3$

(6) $$\frac{k-2}{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{k} \leqq \gamma \leqq \frac{k}{k+2} = 1 - \frac{2}{k+2}$$

zu schließen; doch besteht der Zweck meiner gegenwärtigen Abhandlung nicht in den folgenden Ausführungen dieser Andeutung, sondern in einer besseren Verschärfung von (3) nach unten und oben für alle $k \geqq 2$. Bekanntlich existiert[2]) für jedes feste σ ein endlicher Grenzwert

$$\lim_{t=\infty} \frac{|G(s)|}{t^{\frac{k}{2}(1-2\sigma)}}$$

und ist > 0. 1) Da nun $\zeta(s; \mathfrak{K})$ für $\sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$ nicht beschränkt ist[3]), so folgt aus (4) auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{k}$

---

1) Für $k = 1$ und $k = 2$ ist (6) auch richtig, aber in (3) enthalten.

2) Vergl. z. B. Formel (19) auf S. 216 meiner „zweiten Abhandlung".

3) Da $\zeta(s; \bar{\mathfrak{K}})$ für $\sigma = 2$ beschränkt ist und (5) gilt, so wäre $\zeta(s; \bar{\mathfrak{K}})$ nach

$$\limsup_{t=\infty} \frac{|\zeta(s;\mathfrak{K})|}{t} = \infty,$$

also, wegen $\zeta(s) = o(t)$,

$$\limsup_{t=\infty} \frac{|\zeta(s;\mathfrak{K}) - \alpha\zeta(s)|}{t} = \infty,$$

während im Falle $\gamma < \frac{1}{2} - \frac{1}{k}$ die Reihe (2) über $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{k}$ hinaus konvergieren würde, also nach einem bekannten Satz [1]) auf dieser Geraden $o(t)$ wäre. Daher ist $\gamma \geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{k}$. 2) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist auf der Geraden $\sigma = -\varepsilon$

$$G(s) = O\left(t^{\frac{k}{2}(1+2\varepsilon)}\right),$$

also nach (4)

$$\zeta(s;\mathfrak{K}) = O\left(t^{\frac{k}{2}(1+2\varepsilon)}\right),$$

$$\zeta(s;\mathfrak{K}) - \alpha\zeta(s) = O\left(t^{\frac{k}{2}(1+2\varepsilon)}\right);$$

letzteres gilt also [2]) für $\sigma \geqq -\varepsilon$ gleichmäßig. Nach einem Satze von Herrn Schnee und mir [3]) ist daher

$$\gamma \leqq \frac{-\varepsilon + \frac{k}{2}(1+2\varepsilon)}{1 + \frac{k}{2}(1+2\varepsilon)}$$

---

einem bekannten Phragmén-Lindelöfschen Satz, nämlich dem Hilfssatz 5 auf S. 703 meiner Arbeit *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen* (erste Abhandlung) [diese Nachrichten, Jahrgang 1912, S. 687—771] $O(1)$ für $\frac{1}{2} + \frac{1}{k} \leqq \sigma \leqq 2$, während $\zeta(s;\mathfrak{K})$ bereits für $1 < \sigma \leqq 2$ nicht $O(1)$ ist; vergl. Bohr und Landau, *Über das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_\varkappa(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$* [diese Nachrichten, Jahrgang 1910, S. 303—330], S. 324.

1) Vergl. S. 770 meines *Handbuchs der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* [Leipzig und Berlin (Teubner), 1909].

2) Nach einem bekannten Lindelöfschen Satz (Hilfssatz 6 auf S. 704 meiner „ersten Abhandlung“) oder schon durch Anwendung des Hilfssatzes 5 auf $(\zeta(s;\mathfrak{K}) - \alpha\zeta(s))\, s^{-\frac{k}{2}(1+2\varepsilon)}$.

3) Satz 54 auf S. 853—854 des *Handbuchs*. Es ist leicht zu verifizieren, daß die Voraussetzung $a_n = O(n^\delta)$ dieses Satzes für alle $\delta > 0$ erfüllt ist, indem die Anzahl aller Ideale des Körpers mit der Norm n höchstens gleich der Anzahl der Zerlegungen von n in k positive ganze Zahlen, also nach Hilfssatz 12 auf S. 717 meiner „ersten Abhandlung“ $O(n^\delta)$ ist.

mit jedem $\varepsilon > 0$, also

$$\gamma \leqq \frac{\frac{k}{2}}{1+\frac{k}{2}} = \frac{k}{k+2}.$$

Die angedeutete Verschärfung von (3) wird in

(7) $$\gamma \leqq \frac{k-1}{k+1} = 1 - \frac{2}{k+1},$$

(8) $$\gamma \geqq \frac{k-1}{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$$

bestehen (für alle $k \geqq 2$).

Setzt man des weiteren für $\sigma > 1$

$$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s},$$

wo $\mathfrak{n}$ alle Ideale des Körpers durchläuft und

$$F(n) = \sum_{\mathfrak{K}} F(n; \mathfrak{K})$$

die Anzahl der Ideale mit der Norm n ist; setzt man also

$$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{\mathfrak{K}} \zeta(s; \mathfrak{K}),$$

so ist nach (1) die Anzahl aller Ideale mit Norm $\leqq x$

$$H(x) = \sum_{\mathfrak{K}} H(x; \mathfrak{K}) = h\alpha x + O\left(x^{\frac{k-1}{k}}\right),$$

wo h die Klassenzahl bezeichnet. Nennt man nun γ_0 die untere Grenze der ϑ, für die

$$H(x) = h\alpha x + O(x^\vartheta)$$

ist, so ist demnach

$$0 \leqq \gamma_0 \leqq 1 - \frac{1}{k}$$

längst bekannt. Nach Herrn Hecke (Summation von (4) über alle Klassen $\mathfrak{K}$) genügt die bis auf den Pol $s = 1$ überall reguläre Funktion $\zeta_\varkappa(s)$ der Funktionalgleichung

(9) $$\zeta_\varkappa(s) = ab^s G(s) \zeta_\varkappa(1-s);$$

daher ist wie oben

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{k} \leqq \gamma_0 \leqq 1 - \frac{2}{k+2}$$

unmittelbar zu schließen. Ich behaupte

(10) $$\gamma_0 \leqq 1 - \frac{2}{k+1},$$

(11) $$\gamma_0 \geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}.$$

(10) ist natürlich in (7) enthalten; (8) und (11) sind einzeln zu beweisen, wenn es auch gleichzeitig geschehen wird. Für $k = 1$ sind alle vier Relationen trivial.

Ich werde (7), (8), (10), (11) alsbald noch verallgemeinert beweisen, und dies ist auch für $k = 1$ von Interesse, weil es sich dann u. a. um die Tatsache handelt, von der ich am Schluß der dritten Fußnote dieser Abhandlung sprach. Das Bisherige wird der Spezialfall $m = 1$ des Folgenden sein.

m sei eine positive ganze Zahl. Entweder: Es seien m Idealklassen $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$ gegeben (unter denen auch gleiche vorkommen dürfen), und es sei $B(x)$ für $x > 0$ die Anzahl der Lösungen von $N(\mathfrak{n}_1 \ldots \mathfrak{n}_m) \leqq x$, wo $\mathfrak{n}_1$ ein Ideal der Klasse $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{n}_m$ ein Ideal der Klasse $\mathfrak{K}_m$ ist. Oder: Es sei $B(x)$ die Anzahl der Lösungen von $N(\mathfrak{n}_1 \ldots \mathfrak{n}_m) \leqq x$, wo $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_m$ beliebige Ideale des Körpers sind. Es bedeute $R(x)$ das Residuum der Funktion

$$\frac{x^s}{s} \zeta(s; \mathfrak{K}_1) \zeta(s; \mathfrak{K}_2) \ldots \zeta(s; \mathfrak{K}_m) \text{ bezw. } \frac{x^s}{s} (\zeta_\kappa(s))^m$$

im Punkte $s = 1$, so daß

$$R(x) = x(A_{m-1} \log^{m-1} x + \cdots + A_0)$$

ist, und es werde

$$B(x) - R(x) = C(x)$$

gesetzt. Es sei γ die untere Grenze der ϑ, für die

$$C(x) = O(x^\vartheta)$$

ist. Dann werde ich beweisen: Erstens

(12) $$\gamma \leqq 1 - \frac{2}{mk+1},$$

was (7) und (10) enthält; zweitens

(13) $$\gamma \geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2mk},$$

was (8) und (11) enthält. Ich werde (12) sogar in der schärferen Fassung

(14) $$C(x) = O\left(x^{1-\frac{2}{mk+1}} \log^{m-1} x\right)$$

beweisen[1]).

Der triviale Fall, daß m und k beide 1 sind, kann und soll für den Nachweis der Behauptungen außer Betracht bleiben.

Gemeinsamer Beweisanfang.

Ich setze

$$Z(s) = \zeta(s; \mathfrak{K}_1)\,\zeta(s; \mathfrak{K}_2)\ldots\zeta(s; \mathfrak{K}_m) \text{ bezw. } (\zeta_\varkappa(s))^m.$$

Nach (4) und (9) ist

(15) $$\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{m r_1} (\Gamma(s))^{m r_2} Z(s)$$
$$= \left(\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\right)^{m r_1} (\Gamma(1-s))^{m r_2} a^m b^{ms}\, \bar{Z}(1-s),$$

wo

$$\bar{Z}(s) = \zeta(s; \bar{\mathfrak{K}}_1)\,\zeta(s; \bar{\mathfrak{K}}_2)\ldots\zeta(s; \bar{\mathfrak{K}}_m) \text{ bezw. } (\zeta_\varkappa(s))^m$$

ist. Ich setze c_n gleich der Lösungszahl von $n = N(\mathfrak{n}_1 \ldots \mathfrak{n}_m)$ mit bezw. ohne Klassennebenbedingungen, so daß $B(x) = \sum\limits_{n \leqq x} c_n$ und für $\sigma > 1$

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

ist. Ich behaupte, daß $Z(s)$ die Voraussetzungen des Hauptsatzes der „zweiten Abhandlung" und zwar in der Fassung I) bis VII), VIII'), IX) erfüllt; nämlich, wenn $\bar{c}_n$ die Lösungszahl von $n = N(\mathfrak{n}_1 \ldots \mathfrak{n}_m)$ mit $\mathfrak{n}_1$ in der Klasse $\bar{\mathfrak{K}}_1, \ldots$ bezw. ohne Nebenbedingungen ist, mit den Parametern

$$l_n = n,\quad \beta = 1,\quad \mu = m(r_1 + r_2),\quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_\mu = 0,$$
$$\beta_1 = \cdots = \beta_{m r_1} = \tfrac{1}{2},\quad \beta_{m r_1 + 1} = \cdots = \beta_\mu = 1,$$
$$\nu = m(r_1 + r_2),\quad \gamma_1 = \cdots = \gamma_{m r_1} = \tfrac{1}{2},\quad \gamma_{m r_1 + 1} = \cdots = \gamma_\nu = 1,$$
$$\delta_1 = \cdots = \delta_{m r_1} = \tfrac{1}{2},\quad \delta_{m r_1 + 1} = \cdots = \delta_\nu = 1,$$
$$e_n = \frac{a^m \bar{c}_n}{n},\quad \lambda_n = b^m n,\quad d_n = c_n,\quad A = m - 1,\quad e'_n = e_n,\quad \lambda'_n = \lambda_n.$$

ad I) Klar.

ad II) Durch Herrn Hecke bekannt.

---

1) Um nur (12) zu beweisen, hätte der Hauptsatz meiner „ersten Abhandlung" (S. 695—697) genügt.

ad III) Klar.

ad IV) Die obige Relation (15).

ad V) $\sum_j \beta_j = \frac{m r_1}{2} + m r_2 = \frac{mk}{2} = \sum_j \delta_j$, also $H = mk$.

ad VI) $\eta = \sum_j \gamma_j - \sum_j \alpha_j + \frac{\mu - \nu}{2} = \frac{mk}{2} > \frac{1}{2}$.

ad VII) Folgt aus der obigen Relation (5).

ad VIII') Klar wegen $Z_0(s) = Z(s)$.

ad IX) $\sum_{\lambda_n \leqq x} |c_n| \lambda_n^\beta = \sum_{\lambda'_n \leqq x} |c_n| \lambda_n'^\beta = a^m \sum_{n \leqq \frac{x}{b^m}} \frac{\bar{c}_n}{n} b^m n$

$$= a^m b^m \sum_{n \leqq \frac{x}{b^m}} c_n = O(x \log^{m-1} x).\,^{1)}$$

Beweis von (12) und (14).

Da $P = m$, also $g = \text{Max.}(A, P-1) = m-1$ ist, ist demnach nach dem Hauptsatz

$$C(x) = O\left(x^\Theta \log^{m-1} x\right)$$

mit $\Theta = \beta \frac{2\eta - 1}{2\eta + 1} = \frac{mk-1}{mk+1} = 1 - \frac{2}{mk+1}$, wie in (14) behauptet.

Beweis von (13).

(13) beweise ich, was auf dasselbe hinauskommt, für $\sum_{n \leqq x} \bar{c}_n$ an Stelle von $\sum_{n \leqq x} c_n$, d. h. im Falle der Nebenbedingungen für die Klassen $\bar{\mathfrak{K}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{K}}_m$ an Stelle von $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$. Wäre $\gamma < \frac{1}{2} - \frac{1}{2mk}$, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß

$$\sum_{n \leqq x} \bar{c}_n = \bar{R}(x) + O\left(x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2mk} - \varepsilon}\right)$$

1) Denn nach primitivsten Abschätzungen ist

$$\sum_{N(\mathfrak{n}_1 \ldots \mathfrak{n}_m) \leqq x} 1 = O(x \log^{m-1} x).$$

Vergl. übrigens S. 4 meiner Abhandlung *Über eine idealtheoretische Funktion* [Transactions of the American Mathematical Society, Bd. XIII (1912), S. 1—21], in der ich für $m > 1$ mit elementaren Mitteln (für Ideale ohne Kongruenznebenbedingungen) $C(x) = O\left(x^{1 - \frac{1}{mk}} \log^{m-2} x\right)$ bewies.

wäre, wo $\bar{R}(x)$ die entsprechende Bedeutung hat. Es wäre also

$$\Omega(x) = \sum_{\lambda_n \leqq x} e_n \lambda_n^\beta = a^m b^m \sum_{n \leqq \frac{x}{b^m}} \bar{c}_n$$

(16) $$= a^m b^m \bar{R}\left(\frac{x}{b^m}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2mk} - \varepsilon}\right);$$

hierin ist

$$a^m b^m \bar{R}\left(\frac{x}{b^m}\right) = x(B_{m-1} \log^{m-1} x + \cdots + B_0).$$

(16) widerspricht also dem Satz der „dritten Abhandlung"; denn die Konstante $-\frac{\eta + \frac{1}{2}}{H} + \beta$ dieses Satzes hat genau den Wert

$$-\frac{\frac{mk}{2} + \frac{1}{2}}{mk} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2mk}.$$

Zur Topologie der für die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung geltenden Obertheoreme.

Mit vier Figuren.

Von

Emil Hilb in Würzburg.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 3. Februar 1917.

Es seien in der Differentialgleichung

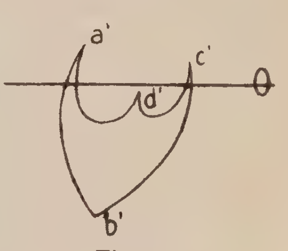
$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1-\alpha}{x-a}+\frac{1-\beta}{x-b}+\frac{1-\gamma}{x-c}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)(x-c)}\,y = 0$$

zunächst die Größen a, b, c und A reell. Die zu den singulären Stellen a, b, c und $d=\infty$ gehörigen Exponenten sind $0, \alpha$; $0, \beta$; $0, \gamma$; δ' und δ'', wobei $\delta'\delta'' = A$ ist. α, β, γ und $\delta'-\delta''$ seien positive reelle Größen, von denen jede kleiner ist als 1, deren Summe kleiner ist als 2. Dann kann man, wie Klein als erster behauptet hat, stets B als reelle Größe so bestimmen[1]), daß das Kreisbogenviereck, auf welches der Quotient η zweier Partikularlösungen von (1) die von der Achse des Reellen begrenzte Halbebene abbildet, einen reellen Orthogonalkreis besitzt, den eine Seite des Kreisbogenvierecks, etwa $a'b'$, eine vorgegebene Anzahl m mal schneidet. Dabei entsprechen die Seiten $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$ des Kreisbogenvierecks den Intervallen ab, bc, cd, da der reellen x-Achse; $b'c'$ und $d'a'$ schneiden den Orthogonalkreis gar nicht, $c'd'$ dagegen m mal. Wir spiegeln jetzt das Kreisbogenviereck an $c'd'$ und erhalten so auf der η-Kugel einen Fundamentalbereich, der m getrennt liegende Stücke des Orthogonalkreises enthält;

1) E. Hilb, Über Kleinsche Theoreme in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Math. Ann. 66, S. 215 f., 68, S. 24 f. (1909, 1910).

diesen m Stücken entsprechen in der x-Ebene m geschlossene sich nicht selbst überschneidende Kurven, von denen jede die vorhergehenden ganz im Innern enthält und die Achse des Reellen je in einem Punkte zwischen a und b sowie zwischen c und d schneidet.

Läßt man für B auch komplexe Werte zu, wobei man dann auch a, b, c und d von vornherein als komplex annehmen kann, so erhält man[1]) entsprechend der Forderung, daß die Substitutionen, welche η bei Umläufen von x um die singulären Punkte a, b, c und d erfährt, einen reellen Kreis der η-Kugel, den „Orthogonalkreis", in sich überführen, unendlich viele neue Obertheoreme, zu deren Charakterisierung wir uns jetzt wenden. Wir denken uns zu diesem Zwecke die singulären Punkte a, b, c, d und a so durch einen Kurvenzug verbunden, daß jede der Linien $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$, welche auf der η-Kugel den zwischen ab u. s. w. liegenden Stücken des Kurvenzuges entsprechen, eine möglichst kleine Anzahl von Schnittpunkten mit dem Orthogonalkreis hat. Die Anzahlen m, n, p, q der Schnittpunkte von $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$ mit dem Orthogonalkreis nennen wir die charakteristischen Oscillationszahlen der Intervalle ab, bc, cd und da. Schneidet nun, wenn wir m, n, p, q im folgenden als von Null verschieden annehmen, in dem Abbilde $a'b'c'd'$ desjenigen Gebietes der x-Ebene, welches beim Durchlaufen des Kurvenzuges a, b, c, d, a links liegt, $a'd'$ den Orthogonalkreis das erste Mal derart, daß das Stück des Orthogonalkreises zwischen diesem Schnittpunkt und dem ersten Schnittpunkt von $a'b'$ ganz innerhalb des Kurvenvierecks $a'b'c'd'$ liegt, so wollen wir a' eine Hauptecke des Vierecks $a'b'c'd'$, im andern Falle eine Nebenecke nennen. Es sind also in der schematischen Fig. 1, in der die Gerade 0 den Orthogonalkreis darstellt, a' und c' Hauptecken, b' und d' Nebenecken. Unter Zugrundelegung dieser neuen Bezeichnung kann man den Satz aussprechen: Man kann stets zwei Werte von B so bestimmen, daß ein reeller Orthogonalkreis existiert, die Intervalle ab und bc vorgegebene charakteristische Oscillationszahlen besitzen und für den einen Wert a' Hauptecke, für den anderen Nebeneke in dem oben definierten Viereck $a'b'c'd'$ ist. Sind a, b, c und d reell, so sind diese beiden Werte von B konjugiert komplex. Ferner ergab sich



Figur 1.

1) l. c. Math. Ann. 68, p. 37 f.

für diese Obertheoreme allgemein, daß a' und c', bezw. b' und d' gleichzeitig Hauptecken oder Nebenecken sind, daß aber, wenn a' eine Hauptecke ist, b' eine Nebenecke ist und umgekehrt. Außerdem gehörten zu den Intervallen ab und cd bezw. bc und da die gleichen charakteristischen Oscillationszahlen.

Wir wollen nun unter der speziellen Annahme, daß α, β, γ und $\delta' - \delta''$ gleich den reziproken Werten ganzer Zahlen sind, zeigen, daß diese so charakterisierten Obertheoreme topologisch die einzig möglichen sind, und dann in der x-Ebene den Verlauf der Kurven näher untersuchen, welche dem Orthogonalkreis entsprechen. Der behauptete Satz wird sich aus einer Beziehung zwischen den charakteristischen Oscillationszahlen ergeben, die in gewisser Beziehung als ein Analogon zu den Ergänzungsrelationen aus der Theorie der Kreisbogenpolygone betrachtet werden kann. Aus den Festsetzungen über die Verbindungslinie der singulären Punkte a, b, c, d und a folgt unmittelbar, daß keine der Seiten des Kurvenvierecks a', b', c', d' den Orthogonalkreis in zwei Punkten derart schneiden kann, daß das zwischen diesen Punkten liegende Stück des Orthogonalkreises ganz innerhalb des Kurvenvierecks $a'b'c'd'$ liegt, wobei wir uns das Kurvenviereck auf einer über der η-Kugel gelagerten Riemannschen Fläche schlicht ausgebreitet denken. Bei einem vollen Umlauf um die Seiten des Kurvenviereckes a', b', c', d' muß nun jedem Überschreiten des Orthogonalkreises in bestimmter Richtung ein Überschreiten in entgegengesetzter Richtung entsprechen. Dabei wird beim Durchlaufen einer Seite diese Richtung nicht geändert, ebensowenig beim Durchlaufen zweier Seiten, die in einer Nebenecke zusammenstoßen; dagegen lassen sich die Richtungen zweier Seiten, die in einer Hauptecke zusammenstoßen, nicht allgemein miteinander vergleichen, nur sind sie in der unmittelbaren Nachbarschaft der Ecke als entgegengesetzt anzusehen. Sind in dem Kurvenvierecke a', b', c', d' etwa a' und c' Hauptecken, b' und d' Nebenecken (vgl. Fig. 1), so besteht zwischen den charakteristischen Oscillationszahlen m, n, p, q die Relation

$$m + n = p + q. \tag{2}$$

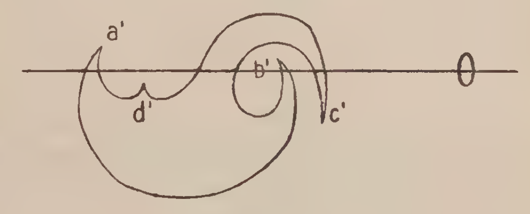
Wären dagegen für ein Kurvenviereck $a'b'c'd'$ die Ecken a', b' und c' Hauptecken, d' eine Nebenecke, so könnte man nur auf eine Relation der Form

$$(m - k) + (n - k) = p + q \tag{3}$$

schließen, wobei k eine unbekannte ganze Zahl ist und in der auf der folgenden Seite stehenden schematischen Figur, in der

wieder die Gerade 0 den Orthogonalkreis darstellt, den Wert 1 besitzt.

Die Einführung des Begriffes der Haupt- und Nebenecken hat natürlich nur Bedeutung, wenn die in einer Ecke zusammenstoßenden Viereckseiten beide den Orthogonalkreis mindestens einmal schneiden; wir machen daher für das Folgende zunächst die Voraussetzung, daß alle vier charakteristischen Oscillationszahlen von Null verschieden sind. Sind alle vier charakteristischen Oscillationszahlen eins, so ist der zu beweisende Satz unmittelbar evident; wir können daher im folgenden die weitere Voraussetzung machen, daß mindestens eine charakteristische Oscillationszahl größer ist als eins. Nun ergibt sich aus den obigen Ausführungen unmittelbar, daß das Kurvenviereck mindestens 2 Hauptecken haben muß. Wir zeigen, daß die aus dem hier behandelten Probleme der linearen Differentialgleichungen entstandenen Kurvenvierecke auch nur zwei Hauptecken besitzen können, die außerdem nicht auf derselben Viereckseite liegen. Es seien nämlich etwa a' und b' Hauptecken. Nun betrachten wir den aus den beiden Kurvenvierecken $a'b'c'd'$ und $a'b'c''d''$ gebildeten Fundamentalbereich, welcher der längs der Linie $bcda$ aufgeschnittenen x-Ebene entspricht. Dann müssen a' und b' im Vier-



Figur 2.

ecke $a'b'c''d''$ Nebenecken sein. Wäre nämlich etwa a' Hauptecke von $a'b'c''d''$, so würde das ganze Stück des Orthogonalkreises zwischen dem ersten Schnittpunkte von $a'd'$ und dem von $a'd''$ innerhalb des Fundamentalbereiches liegen und man könnte die ganze von dem Orthogonalkreis begrenzte Kugelkalotte und damit die ganze Kugel schlicht mit im Sinne der nicht-euklidischen Geometrie kongruenten Fundamentalbereichen überdecken, da nach unserer Voraussetzung über die Größen α, β, γ und $\delta'-\delta''$ Verzweigungspunkte nur auf dem Orthogonalkreis liegen können. Eine solche schlichte Überdeckung der ganzen Kugel mit Fundamentalbereichen ist aber offenbar unmöglich, sobald eine der charakteristischen Oscillationszahlen größer als eins ist. Es sind also

in $a' b' c'' d''$ die Ecken a' und b' Nebenecken, c'' und d'' daher Hauptecken, da es mindestens zwei Hauptecken geben muß. Daraus folgt aber

$$p = q + m + n. \tag{4}$$

Gehen wir nun von dem Viereck $a' b' c'' d''$ zu einem neuen Viereck $a'' b'' c'' d''$ über, so daß der von diesen beiden Vierecken gebildete Fundamentalbereich der längs $d a b c$ aufgeschnittenen x-Ebene entspricht, so sind jetzt c'' und d'' in $a'' b'' c'' d''$ Nebenecken und also a'' und b'' Hauptecken, also ist

$$m = n + p + q, \tag{5}$$

was aber in Widerspruch mit (4) steht, da m, n, p, q positive von Null verschiedene Zahlen waren. Es sind also im Viereck $a' b' c' d'$ stets zwei gegenüberliegende Ecken Hauptecken, die beiden anderen Nebenecken. Seien nun a' und c' Hauptecken. Dann sind in dem Sechseck $c' d' c'' b'' a' b'$, das der längs $a b c d$ aufgeschnittenen x-Ebene entspricht, die Ecken d', c'', a' und b' Nebenecken, b'' und c' Hauptecken und es folgt

$$2p + n = 2m + n, \tag{6}$$

also ist

$$p = m \tag{7}$$

und entsprechend

$$q = n. \tag{8}$$

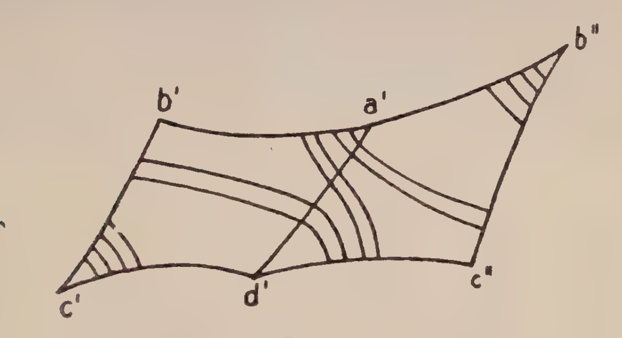
Damit ist aber für den Fall, daß alle charakteristischen Oscillationszahlen von Null verschieden sind, der aufgestellte Satz bewiesen. Mit ganz analogen Schlüssen zeigt man, daß unter den gemachten Voraussetzungen auch in den Fällen, in denen einige charakteristische Oscillationszahlen verschwinden, stets zwei gegenüberliegende Seiten zu denselben charakteristischen Oscillationszahlen gehören. Dieses steht nicht im Widerspruch mit der Tatsache, daß im Falle II in der oben zitierten Annalenarbeit[1]) beim Grundtheorem zwei benachbarte Seiten des Kreisbogenvierecks den Orthogonalkreis einmal schneiden, während die andern beiden dieses nicht tun. In der Tat treten in diesem Falle in den Ecken des Kreisbogenviereckes Verzweigungspunkte auf, so daß die gemachten Schlüsse nicht mehr anwendbar sind[2]).

---

1) l. c. Math. Ann. 66, S. 256.

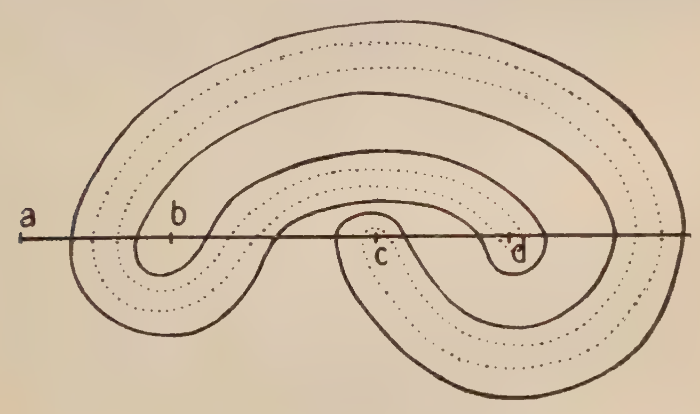
2) Die Voraussetzung, daß die Größen α, β, γ und $\delta' - \delta''$ reziproke ganze Zahlen sind, scheint aber nur für den Fall, daß, wie hier, einige der charakteristischen Oszillationszahlen verschwinden, wesentlich zu sein.

Der Satz, daß in dem Kurvenviereck $a'b'c'd'$ stets zwei gegenüberliegende Ecken Hauptecken, die beiden anderen Ecken Nebenecken sind, sofern die vier charakteristischen Oscillationszahlen von Null verschieden sind, gestattet nun eine Anwendung auf die Untersuchung des Verlaufs derjenigen Kurven in der x-Ebene, welche Stücken des Orthogonalkreises entsprechen. Wir denken uns zu diesem Zwecke die Kurvenvierecke $a'b'c'd'$ und $a'b''c''d'$, welche sich bandförmig über die Kugel hinziehen, so unter Wahrung der Zusammenhangsverhältnisse verzerrt, daß wir sie schematisch als ebene schlichte Vierecke darstellen können in welche wir die Stücke des Orthogonalkreises eingetragen denken. Dann erhalten wir untenstehende Figur, in welcher a' und c' bezw. d' und b'' Hauptecken in den Vierecken $a'b'c'd'$ bezw. $a'b''c''d'$ sind, während die anderen Ecken Nebenecken sind.



Figur 3.

Verfolgt man dann allgemein an Hand einer solchen schematischen Figur, in der zu diesem Zwecke $b'a'$ und $b''a'$, $b'c'$ und $b''c''$, $c'd'$ und $c''d'$ aneinander geheftet zu denken sind, die in



Figur 4.

einem Kurvenzug liegenden Teile des Orthogonalkreises, so folgt, daß man in der x-Ebene als Abbild des Orthogonalkreises so viele geschlossene Kurvenzüge erhält, als der größte gemeinschaftliche Teiler t von m und n angibt. Ist $m = rt$, $n = st$, so schneidet jeder dieser Kurvenzüge die Intervalle ab und cd je r-mal, die Intervalle bc und ad je s-mal.

In Figur 3 und 4 ist $m = 4$, $n = 6$, man erhält also zwei geschlossene Kurven, welche dem Orthogonalkreise entsprechen; die zweite Kurve ist in Figur 4 punktiert gezeichnet. Aus diesen Untersuchungen ergeben sich weiter durch elementare Betrachtungen noch eine große Zahl von Resultaten, die es gestatten, die Aufeinanderfolge der Schnittpunkte allgemein arithmetisch bei gegegebenen m und n anzugeben. Es soll jedoch der Kürze wegen nicht näher darauf eingegangen werden.

Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe.

Von

Harald Bohr in Kopenhagen.

(Zweite Mitteilung.)

Vorgelegt durch Herrn Landau in der Sitzung vom 25. November 1916.

Einleitung.

Es sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine im Einheitskreise $|x| < 1$ reguläre Funktion, die der Bedingung $|f(x)| < 1$ für $|x| < 1$ genügt, und es sei

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$$

gesetzt. Nach Landau ist, bei festem n, die obere Grenze G_n von $|s_n|$ für die Menge aller solcher Funktionen $f(x)$ gleich

$$G_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu}^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1\,.\,3 \ldots (2n-1)}{2\,.\,4 \ldots 2n}\right)^2.$$

In einer früheren Abhandlung in diesen Nachrichten[1]) habe ich den Satz bewiesen:

Es sei $0 < \lambda < 1$. Dann gibt es dazu eine feste im Einheitskreise $|x| < 1$ reguläre Funktion $f(x)$ mit $|f(x)|$

1) H. Bohr: Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe, 1916; diese Abhandlung werde ich im Folgenden einfach als I zitieren. Das Verständnis der vorliegenden Arbeit setzt die Kenntnis von I voraus.

< 1 für $|x| < 1$ derart, daß die Ungleichung

$$|s_n| > (1 - \lambda)\, G_n$$

für unendlich viele n erfüllt ist.

In § 1 der vorliegenden Abhandlung werde ich beweisen, daß dieser Satz aus I durch den folgenden schärferen Satz ersetzt werden kann.

Satz A: Es existiert eine im Einheitskreise $|x| < 1$ reguläre Funktion $f(x)$ mit $|f(x)| < 1$ für $|x| < 1$, derart, daß

$$\limsup_{n=\infty} \frac{|s_n|}{G_n} = 1$$

ist.

Durch diesen Satz ist für die betreffende Fragestellung ein gewisser Abschluß erreicht. Es erhebt sich jedoch die Frage, ob man nicht den Satz dahin verschärfen kann, daß er die Existenz einer für $|x| < 1$ regulären Funktion $f(x)$ mit $|f(x)| < 1$ für $|x| < 1$ derart besagt, daß

$$\liminf_{n=\infty} \{ G_n - |s_n| \} < \infty$$

ist, vielleicht sogar, daß $\liminf \{ G_n - |s_n| \} = 0$ ist. Diese Frage werde ich in § 2 erledigen und zwar mit dem Resultate, daß eine solche Funktion $f(x)$ nicht existiert. Ich werde nämlich in § 2 den Satz beweisen.

Satz B: Für jede feste im Einheitskreise $|x| < 1$ reguläre Funktion $f(x)$, die der Bedingung $|f(x)| < 1$ für $|x| < 1$ genügt, ist

$$\lim_{n=\infty} \{ G_n - |s_n| \} = \infty.$$

Der Beweis dieses Satzes B führe ich unter wesentlicher Benutzung eines sehr bemerkenswerten Satzes von Fatou über beschränkte Potenzreihen sowie einiger bekannten Sätze aus der Theorie des Lebesgueschen Integrals.

§ 1.

Es bezeichnen durchweg im Folgenden (wie in I) $P_n(x)$, $Q_n(x)$, $\Phi_n(\varphi)$ und $f_n(x)$ die vier Funktionen

$$P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} (-x)^\nu \qquad (\text{für } |x| \leqq 1)$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{x^{n+1}}(P_n(x))^2 \qquad (\text{für } 0 < |x| \leqq 1)$$

$$\Phi\,(\varphi) = e^{i\varphi}\, Q_n\left(e^{i\varphi}\right) \qquad (\text{für alle reellen } \varphi)$$

und

$$f_n(x) = \frac{x^n P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{P_n(x)} \qquad (\text{für } |x| \leqq 1).$$

Dann ist (vergl. I) $\left|f_n\left(e^{i\varphi}\right)\right| = 1$ und $\Phi_n(\varphi) f_n\left(e^{i\varphi}\right) = |\Phi_n(\varphi)|$ für $0 \leqq \varphi < 2\pi$, sowie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_n(\varphi) f_n\left(e^{i\varphi}\right) d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Phi_n(\varphi)|\, d\varphi = G_n,$$

wo G_n die Landausche Zahl $\sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu}^2$ bezeichnet.

Hilfssatz: Es sei N eine beliebige positive ganze Zahl und $0 < \delta \leqq \pi$, sowie $0 < \varepsilon < 1$ beliebig gegeben. Dann gibt es ein ganzes $n > N$ und eine für $|x| < 1$ reguläre, für $|x| \leqq 1$ stetige Funktion $h(x)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1) $$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |\Phi_n(\varphi)|\, d\varphi < \varepsilon \,.\, G_n,$$

also $\left(\text{wegen } \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Phi_n(\varphi)|\, d\varphi = G_n\right)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |\Phi_n(\varphi)|\, d\varphi > (1-\varepsilon)\, G_n.$$

2) $$|h(x)| \leqq 1 - \varepsilon \quad \text{für } |x| \leqq 1.$$

3) $|h(x)| < \varepsilon$ in demjenigen Teil des Einheitskreises $|x| \leqq 1$, für den $\Re(x) \leqq \cos\delta$ ist.

4) $$h(1) = 0.$$

5) $$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(\varphi)\, h\left(e^{i\varphi}\right) d\varphi\right| > (1-2\varepsilon)\, G_n.$$

Beweis: Es ergibt sich fast wörtlich wie bei dem Beweise eines ganz entsprechenden Hilfssatzes in I, § 2, daß bei passender Wahl eines (hinreichend großen) positiven m, eines (hinreichend großen) ganzen $n > N$ und eines (hinreichend kleinen) positiven μ

die Funktion

$$h(x) = (1-\varepsilon)\, e^{m(x-1)} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{\mu} f_n(x)$$

und die Zahl n den Bedingungen des Hilfssatzes genügen. Die erforderlichen Modificationen in der Darstellung in I sind so unwesentlich und naheliegend, daß ich die Ausführung derselben dem Leser überlassen werde.

Satz A: Es existiert eine im Einheitskreise $|x| < 1$ reguläre Funktion $f(x)$ mit $|f(x)| < 1$ für $|x| < 1$ derart, daß

$$\limsup_{n=\infty} \frac{|s_n|}{G_n} = 1$$

ist.

Beweis: Es sei zunächst eine Folge positiver Zahlen $1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \cdots > \varepsilon_q \cdots$ so gewählt, daß für jedes $p \geqq 1$

$$\sum_{q=p+1}^{\infty} \varepsilon_q < \frac{1}{2} \varepsilon_p$$

ist $\left(\text{z. B. } \varepsilon_q = \frac{1}{4^q}\right)$. Ich bestimme nunmehr, von obigem Hilfssatze ausgehend, eine Folge für $|x| < 1$ regulärer, für $|x| \leqq 1$ stetiger Funktionen $h_1(x), h_2(x), \ldots h_p(x), \ldots$ sowie eine dazu gehörige Folge positiver ganzer Zahlen $1 < n_1 < n_2 \cdots < n_p \cdots$ und eine Folge positiver Zahlen $\pi = \delta_1 > \delta_2 \cdots > \delta_p \cdots$ (mit $\delta_p \to 0$) durch folgendes Verfahren: Zunächst wende ich den obigen Hilfssatz an auf die Zahlen $N = 1$, $\delta = \delta_1 = \pi$, $\varepsilon = \varepsilon_1$. Der Hilfssatz ergibt alsdann eine ganze Zahl $n = n_1 > 1$ und eine für $|x| < 1$ reguläre, für $|x| \leqq 1$ stetige Funktion $h(x) = h_1(x)$, welche den fünf Bedingungen des Hilfssatzes genügen. Zu dieser Zahl n_1 und dieser Funktion $h_1(x)$ bestimme ich (was offenbar aus Stetigkeitsgründen möglich ist) eine positive Zahl $\delta_2 < \frac{\delta_1}{2}$ derart, daß erstens (wegen $h_1(1) = 0$)

$$|h_1(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon_2 \quad \text{für} \quad |x| \leqq 1,\ \Re(x) \geqq \cos\delta_2$$

und zweitens

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} |\Phi_{n_1}(\varphi)|\, d\varphi < \varepsilon_1 G_{n_1}$$

ist. Nachdem n_1, δ_2 und $h_1(x)$ somit festgelegt sind, wende ich wieder den obigen Hilfssatz an, jetzt aber auf die Zahlen $N = n_1$, $\delta = \delta_2$, $\varepsilon = \varepsilon_2$ und bekomme dadurch, im Sinne des Hilfssatzes,

ein ganzes $n = n_2 > n_1$ und eine für $|x| < 1$ reguläre, für $|x| \leqq 1$ stetige Funktion $h(x) = h_2(x)$. Zu dieser Zahl n_2 und den beiden Funktionen $h_1(x)$ und $h_2(x)$ bestimme ich (aus Stetigkeitsgründen) eine positive Zahl $\delta_3 < \frac{\delta_2}{2}$ derart, daß erstens (wegen $h_1(1) = h_2(1) = 0$)

$$|h_1(x)| + |h_2(x)| < \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_3 \quad \text{für} \quad |x| \leqq 1,\ \Re(x) \geqq \cos\delta_3$$

und zweitens

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta_3}^{\delta_3} |\Phi_{n_2}(\varphi)|\,d\varphi < \varepsilon_2\, G_{n_2}$$

ist. Nachdem hiermit die Zahlen n_2 und δ_3, sowie die Funktion $h_2(x)$ festgelegt sind, wende ich wiederum den Hilfssatz an, jetzt aber auf die Zahlen $N = n_2$, $\delta = \delta_3$, $\varepsilon = \varepsilon_3$ und bekomme dadurch ein ganzes $n = n_3 > n_2$ und eine für $|x| < 1$ reguläre, für $|x| \leqq 1$ stetige Funktion $h(x) = h_3(x)$. Zu dieser Zahl n_3 und den drei Funktionen $h_1(x)$, $h_2(x)$, $h_3(x)$ bestimme ich (aus Stetigkeitsgründen) eine positive Zahl $\delta_4 < \frac{\delta_3}{2}$ derart, daß erstens (wegen $h_1(1) = h_2(1) = h_3(1) = 0$)

$$|h_1(x)| + |h_2(x)| + |h_3(x)| < \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_4 \quad \text{für} \quad |x| \leqq 1,\ \Re(x) \geqq \cos\delta_4$$

und zweitens

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta_4}^{\delta_4} |\Phi_{n_3}(\varphi)|\,d\varphi < \varepsilon_3\, G_{n_3}$$

ist. Durch Fortsetzung dieser sukzessiven Bestimmungen erhalte ich offenbar eine unendliche Folge für $|x| < 1$ regulärer, für $|x| \leqq 1$ stetiger Funktionen $h_1(x), h_2(x), \ldots h_p(x), \ldots$, eine Folge positiver ganzer Zahlen $1 < n_1 < n_2 \cdots < n_p \cdots$ und eine Folge positiver Zahlen $\pi = \delta_1 > \delta_2 \cdots > \delta_p \cdots$ (wo $\delta_p \to 0$ wegen $\delta_p < \frac{1}{2}\delta_{p-1}$) mit den folgenden Eigenschaften: Für jedes $p \geqq 1$ ist

1) $$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta_p}^{2\pi-\delta_p} |\Phi_{n_p}(\varphi)|\,d\varphi < \varepsilon_p\, G_{n_p}$$

2) $$|h_p(x)| \leqq 1 - \varepsilon_p \quad \text{für} \quad |x| \leqq 1$$

3) $$|h_p(x)| < \varepsilon_p \quad \text{für} \quad |x| \leqq 1,\ \Re(x) \leqq \cos\delta_p$$

4) $$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\delta_p}^{\delta_p} \Phi_{n_p}(\varphi)\, h_p\!\left(e^{i\varphi}\right) d\varphi\right| > (1 - 2\varepsilon_p)\, G_{n_p}$$

5) $$|h_1(x)| + |h_2(x)| + \cdots + |h_p(x)| < \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{p+1} \quad \text{für} \quad |x| \leqq 1,\ \Re(x) \geqq \cos\delta_{p+1}$$

6) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta_{p+1}}^{\delta_{p+1}} |\Phi_{n_p}(\varphi)|\, d\varphi < \varepsilon_p G_{n_p}.$$

Ich betrachte nunmehr die unendliche Reihe

$$\sum_{q=1}^{\infty} h_q(x) = h_1(x) + h_2(x) + \cdots.$$

Es ist diese Reihe offenbar, bei jedem p, im Gebiete $|x| \leqq 1$, $\Re(x) \leqq \cos\delta_p$ gleichmäßig konvergent; denn es gilt ja in diesem Gebiete für jedes $q \geqq p$ die Ungleichung $|h_q(x)| < \varepsilon_q$. Die Reihe $\sum h_q(x)$ definiert somit im ganzen Einheitskreise $|x| \leqq 1$ mit Ausnahme des einzigen Punktes $x = 1$ eine stetige Funktion $f(x)$, welche für $|x| < 1$ regulär ist. Ich werde beweisen, daß diese Funktion $f(x) = \sum a_n x^n$ die Bedingungen des Satzes A erfüllt. Zunächst ist $f(x) = \sum h_q(x)$ im ganzen Gebiete $|x| \leqq 1$, $x \neq 1$ (also speziell für $|x| < 1$) absolut < 1, ja es ist sogar (was ich später verwenden werde)

$$\sum_{q=1}^{\infty} |h_q(x)| < 1 \quad \text{für} \quad |x| \leqq 1,\ x \neq 1.$$

Denn es sei $x \neq 1$ ein beliebiger Punkt des Einheitskreises $|x| \leqq 1$ und die ganze Zahl $p = p(x)$ so bestimmt, daß $\cos\delta_p \leqq \Re(x) < \cos\delta_{p+1}$; dann gelten ja die Ungleichungen

$$\sum_{q=1}^{p-1} |h_q(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon_p, \quad |h_p(x)| \leqq 1 - \varepsilon_p, \quad |h_q(x)| < \varepsilon_q \quad (\text{für } q > p),$$

also

$$\sum_{q=1}^{\infty} |h_q(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon_p + (1-\varepsilon_p) + \sum_{q=p+1}^{\infty} \varepsilon_q < \tfrac{1}{2}\varepsilon_p + (1-\varepsilon_p) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_p = 1.$$

Es bleibt zu beweisen, daß $\limsup \dfrac{|s_n|}{G_n} = 1$ ist. Den Beweis hierfür führe ich dadurch, daß ich zeige: es besteht für jedes $p = 1, 2, 3, \ldots$ die Ungleichung

$$|s_{n_p}| > (1 - 5\varepsilon_p)\, G_{n_p}.$$

Die Richtigkeit dieser Ungleichung ergibt sich folgendermaßen: Es ist nach Landau (vergl. I) für jedes $0 < r < 1$

$$s_{n_p} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|x|=r} Q_{n_p}(x) f(x)\, dx,$$

also, weil die für $|x| \leqq 1$, $x \neq 1$ definierte Funktion $f(x)$ stetig

und beschränkt ist, und daher das Integral alsbald auf den Einheitskreis bezogen werden kann,

$$s_{n_p} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_{n_p}\left(e^{i\varphi}\right) f\left(e^{i\varphi}\right) e^{i\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_{n_p}(\varphi) f\left(e^{i\varphi}\right) d\varphi.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
|s_{n_p}| &\geqq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\delta_p}^{\delta_p} \Phi_{n_p}(\varphi) f\left(e^{i\varphi}\right) d\varphi\right| - \frac{1}{2\pi}\int_{\delta_p}^{2\pi-\delta_p} |\Phi_{n_p}(\varphi)|\, d\varphi \\
&> \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\delta_p}^{\delta_p} \Phi_{n_p}(\varphi) \sum_{q=1}^{\infty} h_q\left(e^{i\varphi}\right) d\varphi\right| - \varepsilon_p G_{n_p} \\
&\geqq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\delta_p}^{\delta_p} \Phi_{n_p}(\varphi)\, h_p\left(e^{i\varphi}\right) d\varphi\right| \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta_p}^{\delta_p} |\Phi_{n_p}(\varphi)| \cdot \sum_{q=1}^{p-1} \left|h_q\left(e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\delta_p}^{-\delta_{p+1}} + \int_{\delta_{p+1}}^{\delta_p} |\Phi_{n_p}(\varphi)| \cdot \sum_{q=p+1}^{\infty} \left|h_q\left(e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta_{p+1}}^{\delta_{p+1}} |\Phi_{n_p}(\varphi)| \cdot \sum_{q=p+1}^{\infty} \left|h_q\left(e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi - \varepsilon_p G_{n_p} \\
&> (1-2\varepsilon_p)\, G_{n_p} - \frac{\varepsilon_p}{2} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Phi_{n_p}(\varphi)|\, d\varphi \\
&\quad - \sum_{q=p+1}^{\infty} \varepsilon_q \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Phi_{n_p}(\varphi)|\, d\varphi \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta_{p+1}}^{\delta_{p+1}} |\Phi_{n_p}(\varphi)|\, d\varphi - \varepsilon_p G_{n_p} \\
&> (1-2\varepsilon_p)\, G_{n_p} - \frac{\varepsilon_p}{2} G_{n_p} - \frac{\varepsilon_p}{2} G_{n_p} - \varepsilon_p G_{n_p} - \varepsilon_p G_{n_p} \\
&= (1-5\varepsilon_p)\, G_{n_p}.
\end{aligned}$$

Hiermit ist der Satz A bewiesen.

§ 2.

Satz B: Es sei $f(x) = \sum a_n x^n$ im Einheitskreise $|x| < 1$ regulär und absolut < 1. Dann ist

$$\lim_{n=\infty} \left\{G_n - |s_n|\right\} = \infty,$$

d. h. nach Annahme einer beliebigen positiven Konstanten K gibt es ein $N = N(K)$ derart, daß für $n > N$

$$G_n - |s_n| > K$$

ist.

Beweis: Es ist nach Landau (vergl. I) für jedes $0 < r < 1$ und jedes n

$$s_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=r} Q_n(x) f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=r} \frac{(P_n(x))^2}{x^{n+1}} f(x)\, dx,$$

also

$$s_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left(P_n(re^{i\varphi})\right)^2 e^{-in\varphi} f(re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Weil aber $f(x)$ für $|x| < 1$ regulär und beschränkt ist, existiert nach einem bekannten Satz von Fatou[1]) für alle φ des Intervalles $0 \leqq \varphi < 2\pi$, höchstens mit Ausnahme einer Punktmenge vom Maße Null, der Grenzwert

$$\lim_{r=1} f(re^{i\varphi}) = F(\varphi),$$

wo r durch wachsende Werte gegen 1 strebt; also konvergiert (da $P_n(x)$ für $|x| \leqq 1$ stetig ist) für dieselbe Werte von φ die Funktion

$$\left(P_n(re^{i\varphi})\right)^2 e^{-in\varphi} f(re^{i\varphi})$$

gegen die Grenzfunktion $\left(P_n(e^{i\varphi})\right)^2 e^{-in\varphi} F(\varphi)$. Diese letzte (im ganzen Intervall $0 \leqq \varphi < 2\pi$, höchstens mit Ausnahme einer Punktmenge vom Maße Null, definierte) Funktion $\left(P_n(e^{i\varphi})\right)^2 e^{-in\varphi} F(\varphi)$ ist als Grenzfunktion einer gleichmäßig beschränkten und stetigen Funktion im Lebesgueschen Sinne integrierbar, und es gilt nach einem Hauptsatze in der Lebesgueschen Theorie die Gleichung

$$\lim_{r=1} \int_0^{2\pi} \left(P_n(re^{i\varphi})\right)^2 e^{-in\varphi} f(re^{i\varphi})\, d\varphi$$
$$= \underset{(L)}{\int_0^{2\pi}} \left(P_n(e^{i\varphi})\right)^2 e^{-in\varphi} F(\varphi)\, d\varphi,$$

1) P. Fatou: Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Mathematica, Bd. 30, S. 335—400, 1906. Ein sehr einfach dargestellter Beweis des betreffenden Fatouschen Satzes steht bei Carathéodory: Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Innern einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis, Mathematische Annalen, Bd. 73, S. 305—320.

wo das (L) unter dem Integralzeichen rechts bezeichnet, daß es sich um ein Lebesguesches Integral handelt. Aus der obigen Formel

$$s_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\left(P_n(re^{i\varphi})\right)^2 e^{-in\varphi} f(re^{i\varphi})\,d\varphi,$$

wo die linke Seite s_n von r frei ist, bekommen wir somit durch den Grenzübergang $r \to 1$ die Darstellungsformel

$$s_n = \frac{1}{2\pi}\underset{(L)}{\int_0^{2\pi}}\left(P_n(e^{i\varphi})\right)^2 e^{-in\varphi} F(\varphi)\,d\varphi,$$

wo das Integral nunmehr auf den Einheitskreis bezogen ist. Wegen

$$G_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|P\ (e^{i\varphi})\right|^2 d\varphi$$

ist also

$$G_n - |s_n| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|P_n(e^{i\varphi})\right|^2 d\varphi$$
$$- \frac{1}{2\pi}\left|\underset{(L)}{\int_0^{2\pi}}\left(P_n(e^{i\varphi})\right)^2 e^{-in\varphi} F(\varphi)\,d\varphi\right|.$$

Ich bestimme nunmehr zu der gegebenen Zahl K die positive Zahl δ so klein, daß

$$\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta}\frac{d\varphi}{\left|1-e^{i\varphi}\right|} > K+3$$

ist. Wegen $|F(\varphi)| \leqq 1$ für alle φ im Definitionsbereich von $F(\varphi)$ folgt sofort aus der obigen Formel für $G - |s_n|$, daß

$$G_n - |s_n| \geqq \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta}\left|P_n(e^{i\varphi})\right|^2 d\varphi$$
$$- \frac{1}{2\pi}\left|\underset{(L)}{\int_\delta^{2\pi-\delta}}\left(P_n(e^{i\varphi})\right)^2 e^{-in\varphi} F(\varphi)\,d\varphi\right|.$$

Im Integrationsintervall $\delta \leqq \varphi \leqq 2\pi - \delta$ strebt

$$P_n(e^{i\varphi}) = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{-\frac{1}{2}}{\nu}(-e^{i\varphi})$$

für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{\nu}\left(-e^{i\varphi}\right)^{\nu} = \left(1-e^{i\varphi}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

also strebt $\left(P_n(e^{i\varphi})\right)^2$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{1-e^{i\varphi}}$; es gilt folglich für alle hinreichend großen n, d. h. für $n > N_1$ die Ungleichung

$$\left|\left(P_n(e^{i\varphi})\right)^2 - \frac{1}{1-e^{i\varphi}}\right| < 1 \quad \text{für} \quad \delta \leqq \varphi \leqq 2\pi - \delta.$$

Hieraus folgt aber sofort, daß für $n > N_1$

$$G_n - |s_n| > \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\frac{d\varphi}{\left|1-e^{i\varphi}\right|}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\delta\,(L)}^{2\pi-\delta}\frac{F(\varphi)}{1-e^{i\varphi}}\cdot e^{-in\varphi}\,d\varphi\right| - 2$$

$$> K + 1 - \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\delta\,(L)}^{2\pi-\delta} G(\varphi)\,e^{-in\varphi}\,d\varphi\right|$$

ist, wo $G(\varphi) = \frac{F(\varphi)}{1-e^{i\varphi}}$ eine feste (d. h. von n unabhängige) im Intervalle $(\delta, 2\pi-\delta)$, höchstens mit Ausnahme einer Punktmenge vom Maße Null, definierte, meßbare und beschränkte Funktion ist. Für eine solche Funktion $G(\varphi)$ gilt aber nach einem bekannten Satze über Fourierkonstanten[1]) die Gleichung

$$\lim_{n=\infty}\int_{\delta\,(L)}^{2\pi-\delta} G(\varphi)\,e^{-in\varphi}\,d\varphi = 0.$$

Es ist also für alle hinreichend grossen n, d. h. für $n > N_2$

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\delta\,(L)}^{2\pi-\delta} G(\varphi)\,e^{-in\varphi}\,d\varphi\right| < 1.$$

Für $n > N = \text{Max}(N_1, N_2)$ gilt daher die Ungleichung

$$G_n - |s_n| > K + 1 - 1 = K.$$

Hiermit ist der Satz B bewiesen.

1) Vergl. z. B. de la Vallée Poussin, Cours d'Analyse Infinitésimale, Bd. II, 2. Aufl. (1912), S. 140.

Tangenten-Quadrupel einer gewundenen Kurve 3. Ordnung.

Von

Hans Mohrmann in Clausthal i. H.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung am 3. Februar 1917.

I. Der Vosssche Komplex 4. Grades.

1. Wie Herr Voss gezeigt hat[1]), sind 4 Tangenten einer irreduziblen gewundenen Kurve 3. Ordnung C^3 ihrer Lage nach nicht von einander unabhängig. Existiert überhaupt eine C^3, welche 4 verschiedene gegebene gerade Linien berührt, so gibt es deren unendlich viele. Die Abhängigkeit, die zwischen 4 Geraden (von denen keine zwei einander schneiden und die nicht einer und derselben Regelschar 2. Ordnung angehören dürfen) bestehen muß, wenn eine solche Schar sie berührender (dann notwendig irreduzibler gewundener) C^3 vorhanden sein soll, ist von Herrn Voss zuerst ermittelt worden. Sind 3 der Geraden gegeben, so bilden die vierten einen Komplex 4. Grades

(1) $$\sqrt[4]{U}+\sqrt[4]{V}+\sqrt[4]{W} = 0$$

oder in rationaler Form

(1*) $$[(U+V+W)^2-4(VW+WU+UV)]^2-128\,UVW(U+V+W)=0,$$

wo (bei passender Wahl der Koordinaten)

(2) $$U=0, \qquad V=0, \qquad W=0$$

die Komplex-Gleichungen der 3 gegeben Geraden sind.

---

1) Über vier Tangenten einer Raumkurve 3. Ordnung, Mathem. Annalen Bd. XIII, S. 168 ff.

2. Die Gleichung

(3) $$\sqrt{U}+\sqrt{V}+\sqrt{W}=0$$

oder in rationaler Form

(3*) $$(U+V+W)^2-4(VW+WU+UV)=0$$

stellt den Tangenten-Komplex der Trägerfläche der durch die 3 gegebenen Geraden bestimmten Regelschar 2. Ordnung dar, und der lineare Komplex mit der Gleichung

(4) $$U+V+W=0$$

schneidet aus dem Tangenten-Komplex 2. Grades (3) zwei irreduzible spezielle lineare Kongruenzen aus, deren Leitgeraden der durch die 3 gegebenen Geraden bestimmten Regelschar 2. Ordnung angehören und zwar ihr Hessesches Paar (in der Regelschar) bilden.

Jede Gerade allgemeiner Lage einer dieser beiden Kongruenzen [(3), (4)] bildet mit den drei gegebenen Geraden (2) ein Tangenten-Quadrupel einer C^3, das einer speziellen linearen Kongruenz angehört, und zwar ist der Wurf jener 4 Tangenten auf der Kurve (ebenfalls) aequianharmonisch.

II. Die 3 linearen Doppelkongruenzen des Vossschen Komplexes.

3. Der Vosssche Komplex 4. Grades (1) weist eine Selbstdurchdringung auf, die aus drei (die gegebenen Geraden nicht enthaltenden) linearen Kongruenzen besteht, deren Gleichungen

(5) $$\begin{cases} U=V, & W+4U=0; \\ V=W, & U+4V=0; \\ W=U, & V+4W=0 \end{cases}$$

schon Herr Voss angegeben hat. Die Mannigfaltigkeit der ∞^{15} Quadrupel von Tangenten gewundener Kurven 3. Ordnung hat also eine Selbstdurchsetzung von 14 (komplexen) Dimensionen, deren allgemeine Quadrupel Tangenten von zwei Scharen gewundener C^3 sind, worauf jedoch erst Herr Study[1]) aufmerksam gemacht hat, weswegen wir solche Quadrupel von Geraden als Studysche bezeichnen wollen[2]).

1) Das Prinzip der Erhaltung der Anzahl, Leipziger Berichte, Bd. 68 (1916) S. 65. — Vgl. ferner eine demnächst in den Math. Annalen erscheinende Arbeit Herrn Studys über Lies Kreisgeometrie.

2) Die Frage nach den von mir sogenannten Studyschen Quadrupeln ist

Die 3.2 Leitgeraden der drei Doppelkongruenzen (5) des Vossschen Komplexes (1) gehören mit den drei gegebenen Geraden (2) ebenfalls der Regelschar 2. Ordnung an, welche jene Geraden bestimmen, und zwar bildet jede von ihnen bei passender Wahl der Reihenfolge mit den gegebenen Geraden ein und dasselbe Doppelverhältnis

$$3 + 2\sqrt{2}.$$

III. Realitätsfragen, insbesondere Studysche Quadrupel betreffend.

4. Die 6 Leitgeraden der 3 Doppelkongruenzen des Vossschen Komplexes sind daher sämtlich reell und die zugehörigen linearen Kongruenzen folglich hyperbolisch, wenn die 3 gegebenen Geraden reell sind. Sie sind sämtlich imaginär, wenn von den gegebenen Geraden 2 konjugiert-imaginär sind, während die dritte reell ist, so jedoch, daß 2 der 3 linearen Doppel-Kongruenzen imaginär sind, während die dritte reell und folglich elliptisch ist.

Vier reelle Tangenten einer rellen gewundenen Kurve 3. Ordnung gehören immer einer hyperbolischen linearen Kongruenz an[1]. Gleichwohl können 4 derartige Tangenten niemals ein Studysches Quadrupel bilden. Denn das Doppelverhältnis von 4 ein Studysches Quadrupel bildenden Tangenten einer C^3, bezw. dasjenige ihrer Parameter (oder auch der Parameter ihrer Berührungspunkte mit der Kurve) bei rationaler Darstellung hat den Wert $i\ (= \sqrt{-1})$ oder einen der 5 weiteren Werte

$$-i; \quad 1 \pm i; \quad \frac{1 \pm i}{2},$$

welche das Doppelverhältnis eines derartigen Wurfes bei Vertauschung der Reihenfolge seiner Elemente annehmen kann.

Die vierten Potenzen dieser 6 Doppelverhältnisse oder, was dasselbe besagt, die Graßmannschen Doppelverhältnisse der 4 Geraden eines Studyschen Quadrupels sind sämtlich reell und haben die Besonderheit nur 3 Werte

$$1; \quad -4; \quad -\tfrac{1}{4}$$

zwar schon vor Herrn Study von Herrn Sturm (Archiv für Mathem. u. Physik, Ser. III, Bd. 23 (1915), S. 1) aufgeworfen und mit den Mitteln der synthetischen Geometrie in Angriff genommen worden; allein Herr Sturm glaubte die Existenz derartiger Tangenten-Quadrupel leugnen zu müssen.

1) Vgl. Sturm, a. a. O., S. 6.

anzunehmen, die genau den 3 Doppelkongruenzen des Vossschen Komplexes entsprechen.

5. Das Doppelverhältnis zweier Paare konjugiert-imaginärer Elemente eines reellen Gebildes ist ebenso wie dasjenige von 4 reellen Elementen stets reell. Auch 2 Paare konjugiert-imaginärer Tangenten einer reellen C^3 können daher niemals ein Studysches Quadrupel bilden. Wohl aber gibt es einer reellen linearen Kongruenz angehörende Studysche Quadrupel von Tangenten reeller C^3, von denen 2 reell und 2 konjugiert-imaginär sind. Da sich nämlich unter den Werten, welche das Doppelverhältnis eines solchen Tangenten-Quadrupels annimmt, 2 (und nur 2) imaginäre Einheitswurzeln befinden, so sind 2 der 6 Tangenten, welche mit 3 gegebenen Tangenten einer reellen C^3 ein Studysches Quadrupel bilden, reell, wenn von den gegebenen Tangenten 2 konjugiert-imaginär sind, während die dritte reell ist.

Aus demselben Grunde besteht das Hessesche Paar zu 3 Elementen eines reellen Gebildes, von denen 2 konjugiert-imaginär sind, während das dritte reell ist, stets aus 2 reellen Elementen, was für zahlreiche Realitätsfragen von größter Wichtigkeit ist.

Sind

$$0, \quad \infty, \quad a+ib, \quad a-ib$$

die Parameterwerte von 4 Tangenten einer reellen C^3, so ist die durch diese bestimmte reelle lineare Kongruenz hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch, jenachdem

$$a^2 - 3b^2 \gtreqless 0$$

ist. Vier einer rellen linearen Kongruenz angehörende Tangenten einer reellen C^3, welche ein Studysches Quadrupel bilden, gehören daher notwendig einer elliptischen linearen Kongruenz an.

6. In Übereinstimmung hiermit findet man denn auch, daß die Realitätsverhältnisse des Vossschen Komplexes grundverschieden sind, jenachdem man von 3 reellen oder 2 konjugiert-imaginären und einer reellen Geraden ausgeht. Im ersten Falle sind die 3 Doppelkongruenzen (5) des Vossschen Komplexes (1) reell. und zwar isoliert und hyperbolisch; im 2. Falle hingegen ist nur eine der drei Kongruenzen (5) reell, und diese ist nicht-isoliert und elliptisch. —

IV. Vier Tangenten einer gewundenen Kurve 3. Ordnung als stationäre Erzeugende einer windschiefen Fläche 6. Grades.

7. Mit jedem linearen Komplex ist eine reziproke Umformung des Raumes verbunden, welche darin besteht, daß einer Geraden ihre konjugierte Polare in Bezug auf den linearen Komplex zugeordnet wird; die Geraden des letzteren gehen dabei in sich über. Formt man daher ein Liniengebilde in Bezug auf eine Reihe linearer Komplexe um, so erhält man eine Schar von Gebilden, welche dem ersten teils reziprok, teils kollinear entsprechen. Nun gehören aber 4 Tangenten einer gewundenen Kurve 3. Ordnung einem Büschel linearer Komplexe an. Formt man in Bezug auf dasselbe das Tangenten-System einer C^3 um, so ergibt sich eine einfach-unendliche Schar von C^3, welche die nämlichen 4 Tangenten haben.

Diese Schar von C^3 bildet, wie Herr Voss zuerst bemerkt hat, die Gesamtheit der Haupttangentenkurven einer windschiefen Fläche 6. Grades mit 2 dreifachen Leitgeraden und 4 Rückkehrerzeugenden. Denn jede Gerade, welche die beiden gemeinsamen Treffgeraden des Tangenten-Quadrupels und die C^3 trifft, muß bei sämtlichen Umformungen der bezeichneten Art in sich übergehen. Die Gesamtheit derselben bildet aber eine windschiefe Fläche 6. Grades, welche die 4 Tangenten der C^3 zu Rückkehrerzeugenden hat. Und auf dieser ist die C^3 nebst allen aus ihr durch Umformung hervorgehenden eine Haupttangentenkurve, da sie Kurve (im Sinne Lies) eines linearen Komplexes ist, dem die Fläche angehört.

Nach den Formeln, welche Herr Voss in seiner Arbeit „Zur Theorie der windschiefen Flächen“ [1]) gegeben hat, sind die (einem und demselben linearen Komplex angehörenden) Haupttangentenkurven von windschiefen Flächen 6. Grades der genannten Art ebenfalls 6. Grades. Sie bestehen daher hier aus 2 rationalen Bestandteilen 3. Grades. Nun zerfallen aber, einem von mir bewiesenen Satze [2]) zufolge, die Haupttangentenkurven einer einem Büschel linearer Komplexe angehörenden Linienfläche notwendig, wenn die Fläche rational ist und entweder keine oder nur Dorsallinien gerader Ordnung besitzt. Es handelt sich daher um eine notwendige Eigenschaft der Flächen der genannten Art, so daß auch die Umkehrung des Vossschen Satzes gilt.

1) Mathem. Ann. Bd. VIII, S. 54 ff. — Vgl. ferner Bd. XIII (a. a. O.), S. 169, Anm. 1).

2) Die Haupttangentenkurven auf den Netzflächen, Mathem. Ann. Bd. 73, S. 571 ff.

Beachtet man noch, daß eine windschiefe Fläche 6. Grades mit 4 Rückkehrerzeugenden immer der durch diese bestimmten linearen Kongruenz vollständig angehört, so kann man allgemein den folgenden Satz aussprechen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß 4 gerade Linien ein Tangenten-Quadrupel einer gewundenen Kurve 3. Ordnung bilden, besteht darin, daß sie stationäre Erzeugende einer (irreduziblen) windschiefen Fläche 6. Grades sind.

8. Dieser Satz enthält ein Übertragungsprinzip, das jedem Satze über Tangenten-Quadrupel von C^3 einen Satz über windschiefe Flächen 6. Grades mit 4 stationären Erzeugenden zuordnet, und weiter, da eine solche Fläche vermöge der Cayley-Kleinschen Auffassung der Liniengeometrie (als der Punktgeometrie auf einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit 2. Grades im Raume von 5 Dimensionen) das liniengeometrische Bild einer Kurve 6. Ordnung 4. Klasse auf einer gewöhnlichen Fläche 2. Grades ist, auch einen Satz über diese und die ihr dual entsprechende wohlbekannte Raumkurve 4. Ordnung 2. Art. Man findet so z. B. unmittelbar den Satz[1]):

Damit die Ebenen einer Kurve 4. Ordnung (6. Klasse) 2. Art einen Kegelschnitt umhüllen, ist notwendig und hinreichend, daß ihre 4 stationären Ebenen (bzw. die Parameter ihrer Berührungspunkte bei rationaler Darstellung) eine aequi-anharmonische Gruppe bilden. Eine reelle derartige Kurve besitzt daher notwendig 2 reelle und 2 konjugiert-imaginäre stationäre Ebenen. —

V. Ort der 4. Tangenten von Kurven 3. Ordnung, welche mit 3 gegebenen einer und derselben linearen Kongruenz angehören.

9. Die lineare Kongruenz, welcher eine windschiefe Fläche 6. Grades mit 4 stationären Erzeugenden (vollständig) angehört, wird von dem mit 3 der 4 genannten geraden Linien verknüpften Vossschen Komplex 4. Grades noch einer im allgemeinen irreduziblen Linienfläche 8. Grades (mit zwei 4-fachen Leitgeraden) geschnitten. Gehören die 4 Rückkehrerzeugenden der genannten Fläche 6. Grades jedoch einer speziellen linearen Kongruenz an, so zerfällt die Linienfläche in fünf Büschel, von denen die 3 je eine der ge-

1) Vgl. hierzu die schon erwähnte Abhandlung Herrn Studys über Lies Kreisgeometrie.

gebenen Geraden enthaltenden Büschel doppelt zu zählen sind, wie man aus den folgenden Gleichungen der Linienfläche in passend gewählten (Cayley-Kleinschen) Linienkoordinaten y_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) unmittelbar erkennt:

$$(6)\quad \begin{cases} y_5 = 0, \\ y_6 = 0, \\ (y_1+y_2+y_3)^2 - 4(y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2) + \dfrac{4k_1 k_2}{(k_1^2+k_2^2)^2} y_4^2 = 0, \\ [(y_1+y_2+y_3)^2 - 4(y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2)]^2 - 128 y_1 y_2 y_3 (y_1+y_2+y_3) = 0, \end{cases}$$

von denen die 3 ersten die in Frage stehende lineare Kongruenz darstellen, sodaß $k_1 . k_2 = 0$ dem speziellen Fall entspricht.

10. Aus den Gleichungen (6) ergibt sich weiter die merkwürdige Tatsache, daß die durch sie dargestellte irreduzible Linienfläche 8. Grades ($k_1 . k_2 \neq 0$) (ebenso wie die mehrfach genannte windschiefe Fläche 6. Grades mit 4 stationären Erzeugenden) keine gewöhnlichen Dorsallinien besitzt. Und zwar zeigt sich hier, wie so oft bei der Anwendung einer Theorie auf ein vorgegebenes spezielles Problem, daß man auf einen besonderen Fall geführt wird, dessen Berücksichtigung bei Aufstellung der Theorie vielleicht unwichtig erschien.

Die genannte Fläche (6) bildet nämlich ein zweites mit dem Vossschen Problem der 4 Tangenten einer C^3 verknüpftes und zwar interessanteres Beispiel einer irreduziblen algebraischen Netzfläche mit lauter reduziblen Haupttangentenkurven: während die Fläche 6. Grades mit 4 stationären Erzeugenden überhaupt keine Dorsallinien aufweist, besitzt jene Fläche 8. Grades ausschließlich Dorsallinien 2. Ordnung, 6 nämlich, die 3 Paare bilden derart, daß die Linien eines Paares je durch den (höheren) Cuspidalpunkt der anderen hindurchgehen. Da die Fläche außerdem 6 gewöhnliche Doppelerzeugende besitzt, ist sie in der Tat rational. Ihre Haupttangentenkurven werden von Paaren ebenfalls rationaler Kurven 7. Grades, 12. Ranges ohne singulären Punkt und singuläre Ebene gebildet, die je 8 stationäre Tangenten besitzen und einander und die Dorsallinien der Fläche in ihren 6 Cuspidalpunkten berühren, die 3 Dorsallinienpaare also je zu gewöhnlichen Doppeltangenten haben ($\omega = 3$).

Auch die Realitätsverhältnisse dieser Linienfläche lassen sich wohl übersehen. —

Eine Begründung und weitere Ausführung der hier ohne Beweise mitgeteilten Resultate gedenke ich an andrer Stelle [1]) zu geben

1) Jahresb. d. Deutsch. Mathem.-Vereinig.

Zur expliziten Bestimmung der Hauptaxen quadratischer Formen und der Eigenfunktionen symmetrischer Kerne.

Von

Ch. H. Müntz.

Vorgelegt von Herrn Hilbert in der Sitzung vom 3. März 1917.

Wir geben im Folgenden eine direkte Methode zur simultanen Berechnung aller Invarianten einer vorgelegten reellen quadratischen Form, beziehungsweise einer homogenen reellen Integralgleichung mit symmetrischem stetigem Kerne. Die mitgeteilten Resultate[1]) lassen sich ohne weiteres auf Hermitesche, und unter gewissen einschränkenden Bedingungen auch auf sonstige nichtsymmetrische Bilinearformen und Kerne übertragen.

Die Bezeichnungen dieser Note schließen sich vollkommen den bekannten Mitteilungen von Herrn Hilbert über die allgemeine Theorie der linearen Integralgleichungen (Göttinger Nachrichten 1904—1906), und den entsprechenden Arbeiten von Herrn Schmidt (Math. Annalen, Bd. 63, 64; Rendiconti Palermo, Bd. 28) an. —

I. Es sei eine vollstetige reelle quadratische Form

$$(1) \qquad C^{(1)} \equiv \sum_{i,k}^{1\ldots\infty} c_{ik} x_i x_k, \qquad c_{ik} = c_{ki}$$

gegeben — die endlichen quadratischen Formen sind darin natürlich mit enthalten.

Neben der Matrix

$$(2) \qquad C = \| c_{ik} \| = \| c_{ik}^{(1)} \|$$

1) Die Beweise erscheinen demnächst an anderer Stelle.

betrachten wir deren Potenzen

(3) $$C^N = \| c_{ik}^{(N)} \|; \qquad N \geqq 1,$$

mit der allgemeinen Bestimmung:

(4) $$c_{ik}^{(N+1)} = \sum_{m}^{1 \dots \infty} c_{im}\, c_{mk}^{(N)}.$$

Jede dieser Potenzmatrizen möge nach ihren Kolonnen orthogonalisiert und normiert werden, wobei etwa auftretende Nullkolonnen — die dann immer zu den gleichen Indizis gehören — unberücksichtigt bleiben sollen. Dann konvergieren für unbegrenzt wachsende M die so gewonnenen geraden orthogonalen Matrizen $\| \mathfrak{a}_{ik}^{(2M)} \|$ gegen eine Grenzmatrix $\| \mathfrak{a}_{ik} \|$, die ungeraden $\| \mathfrak{a}_{ik}^{(2M+1)} \|$ — ebenso gegen eine Grenzmatrix $\| \mathfrak{a}'_{ik} \|$; die Kolonnen dieser Grenzmatrizen, $\mathfrak{a}_k$ bzw. $\mathfrak{a}'_k$, stellen je ein abgeschlossenes System von Hauptaxen für die iterierte Form

(5) $$C^{(2)} \equiv \sum_{i,k}^{1 \dots \infty} c_{ik}^{(2)}\, x_i x_k$$

dar. Es ist

(6) $$\begin{aligned} \sum_{m}^{1 \dots \infty} c_{im}\, \mathfrak{a}_{mk} &= |\varrho_k| \cdot \mathfrak{a}'_{ik}; \\ \sum_{m}^{1 \dots \infty} c_{im}\, \mathfrak{a}'_{mk} &= |\varrho_k| \cdot \mathfrak{a}_{ik}, \end{aligned}$$

wobei

(7) $$\varrho_k = \frac{1}{\lambda_k}$$

die reziproken Eigenwerte der ursprünglichen Form $C^{(1)}$ bedeuten; man kann daher auch jede der beiden Matrizen $\| \mathfrak{a}_{ik} \|$, $\| \mathfrak{a}'_{ik} \|$ aus der anderen durch Transformation inbezug auf $C^{(1)}$ und nachfolgende Normierung gewinnen.

In der Folge der Mittelvektoren

(8a) $$\frac{\mathfrak{a}_1 \pm \mathfrak{a}'_1}{2}, \quad \frac{\mathfrak{a}_2 \pm \mathfrak{a}'_2}{2}, \quad \dots, \quad \frac{\mathfrak{a}_m \pm \mathfrak{a}'_m}{2}, \quad \dots$$

läßt sich (von den etwaigen Nullpaaren $\mathfrak{a}_{m_0} \equiv \mathfrak{a}'_{m_0} \equiv 0$ ganz abgesehen) die Wahl des Vorzeichens jedesmal so treffen, daß die gewählte Folge

(8b) $$\widehat{\mathfrak{a}_1}, \quad \widehat{\mathfrak{a}_2}, \quad \dots, \quad \widehat{\mathfrak{a}_m}, \quad \dots$$

ein linear unabhängiges System liefert; wird diese Folge orthogonalisiert und normiert, so entsteht ein abgeschlossenes System

$$(8c) \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_m, \quad \ldots$$

von Hauptaxen der ursprünglichen Form $C^{(1)}$.

Es ist dann allgemein

$$(9) \qquad \sum_m^{1\ldots\infty} c_{im}\alpha_{mk} = \frac{1}{\lambda_k}\alpha_{ik},$$

wodurch man sämtliche Eigenwerte von $C^{(1)}$ nach dem Grade ihrer Vielfachheit erhält.

II. Statt der Potenzmatrizen C^N können ebensogut die aus ihnen durch Multiplikation mit einer vollständigen Matrix B entstandenen iterierten Matrizen $C^N B$ genommen werden; das allgemeine Glied in $C^N B$ ist definiert durch

$$(10) \qquad \beta_{ik}^{(N)} = \sum_m^{1\ldots\infty} c_{im}^{(N)}\beta_{mk}^{(0)} = \sum_m^{1\ldots\infty} c_{im}\beta_{mk}^{(N-1)}$$

Eine Matrix $B = \|\beta_{ik}^{(0)}\|$ heißt dabei vollständig, wenn sie nach Orthogonalisation und Normierung ihrer Kolonnen das Schema einer umkehrbaren orthogonalen Transformation liefert.

Das Hauptaxensystem α_m der gegebenen Form ist dann und nur dann vollständig, wenn es das erste iterierte System c_m bzw. $\beta_m^{(1)}$ ist.

III. Es sei ein reeller stetiger symmetrischer Kern

$$(11) \qquad K(s, t) = K(t, s) \equiv K^{(1)}; \quad a \leqq s, \ t \leqq b,$$

vorgelegt, neben dem wir noch die iterierten Kerne

$$(12) \qquad K^N(s, t) \equiv K^{(N)}; \quad N \geqq 1$$

betrachten, definiert durch

$$(13) \qquad K^{N+1}(s, t) = \int_a^b K(s, r)\, K^N(r, t)\, dr.$$

Wir wählen für die Variable t irgendeine bestimmte abzählbare Wertefolge

$$(14) \qquad t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_m, \quad \ldots,$$

die das gegebene Intervall $a \ldots b$ überall dicht bedeckt, und betrachten die Funktionenfolgen von s:

$$(15) \qquad K^N(s, t_1), \quad K^N(s, t_2), \quad \ldots, \quad K^N(s, t_m), \quad \ldots$$

Jede dieser Folgen möge orthogonalisiert und normiert werden, wobei etwa auftretende Nullfunktionen —, die dann immer zu den gleichen Indizis gehören —, unberücksichtigt bleiben sollen. Die geraden derart gewonnenen orthogonalnormierten Funktionenfolgen $\mathfrak{a}_k^{(2M)}(s)$ konvergieren für unbegrenzt wachsende M gleichmäßig gegen eine Funktionenfolge $\mathfrak{a}_k(s)$, die ungeraden $\mathfrak{a}_k^{(2M+1)}(s)$ — ebenso gegen eine Funktionenfolge $\mathfrak{a}'_k(s)$; beide Grenzfolgen stellen je ein abgeschlossenes System von Eigenfunktionen des iterierten Kernes $K^2(s, t)$ dar. Es ist

(16)
$$\int_a^b K(s, t)\,\mathfrak{a}_k(t)\,dt = |\varrho_k| \cdot \mathfrak{a}'_k(s);$$
$$\int_a^b K(s, t)\,\mathfrak{a}'_k(t)\,dt = |\varrho_k| \cdot \mathfrak{a}_k(s),$$

wobei

(17)
$$\varrho_k = \frac{1}{\lambda_k}$$

die reziproken Eigenwerte des ursprünglichen Kernes $K^{(1)}$ bedeuten; es kann daher auch jede der beiden Grenzfolgen $\mathfrak{a}_k(s)$, $\mathfrak{a}'_k(s)$ aus der anderen durch Transformation inbezug auf $K(s, t)$ und nachfolgende Normierung gewonnen werden.

In der Folge der Mittelfunktionen

(18a)
$$\frac{\mathfrak{a}_1(s) \pm \mathfrak{a}'_1(s)}{2}, \quad \frac{\mathfrak{a}_2(s) \pm \mathfrak{a}'_2(s)}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathfrak{a}_m(s) \pm \mathfrak{a}'_m(s)}{2}, \quad \ldots$$

läßt sich (von den etwaigen Nullpaaren $\mathfrak{a}_{m_0}(s) \equiv \mathfrak{a}'_{m_0}(s) \equiv 0$ ganz abgesehen) die Wahl der Vorzeichen wiederum so treffen, daß die entstehende Folge

(18b)
$$\widehat{\mathfrak{a}_1}(s), \quad \widehat{\mathfrak{a}_2}(s), \quad \ldots, \quad \widehat{\mathfrak{a}_m}(s), \quad \ldots$$

linear unabhängig ausfällt; wird nun diese Folge orthogonalisiert und normiert, so entsteht ein abgeschlossenes System von Eigenfunktionen des gegebenen Kernes $K(s, t)$:

(18c)
$$\alpha_1(s), \quad \alpha_2(s), \quad \ldots, \quad \alpha_m(s), \quad \ldots;$$

es ist dann allgemein

(19)
$$\int_a^b K(s, t)\,\alpha_k(t)\,dt = \frac{1}{\lambda_k}\,\alpha_k(s),$$

wodurch man wieder sämtliche Eigenwerte von $K(s, t)$ erhält, jeden nach dem Grade seiner Vielfachheit.

IV. Die gleichen Resultate gelten für beliebige iterierte Funktionenfolgen $\beta_k^{(N)}(s)$, definiert durch

$$(20) \qquad \beta_k^{(N)}(s) = \int_a^b K^N(s, t)\, \beta_k^{(0)}(t)\, dt = \int_a^b K(s, t)\, \beta_k^{(N-1)}(t)\, dt,$$

sobald die Ausgangsfolge $\beta_k^{(0)}(s)$ vollständig ist.

Letzteres bedeutet, daß die Orthogonalisation und Normierung dieser Folge auf ein vollständiges System von normierten Orthogonalfunktionen führt.

Das System $\alpha_k(s)$ der Eigenfunktionen des betrachteten Kernes $K(s, t)$ fällt selbst vollständig aus, wenn dies bereits für die erste iterierte Folge $K(s, t_m)$ bzw. $\beta_m^{(1)}(s)$ der Fall ist.

Die Methode des Bogenelementes in der Theorie der Uniformisierungstranszendenten mit Grenz- oder Hauptkreis.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von

Leon Lichtenstein (Berlin).

Vorgelegt von Herrn F. Klein in der Sitzung am 17. März 1917.

Es sei $\mathfrak{R}$ eine beliebige geschlossene Riemannsche Fläche. Das Problem der Uniformisierung der auf $\mathfrak{R}$ eindeutigen Funktionen durch automorphe Funktionen mit Grenzkreis hängt bekanntlich eng zusammen mit der Bestimmung einer bis auf eine endliche Anzahl Punkte, insbesondere die Verzweigungs- und die unendlich fernen Punkte, wo vorgeschriebene logarithmische Unstetigkeiten vorliegen, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen, kürzer „regulären" Lösung der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \Delta u = 8e^u.$$

Die Existenz der fraglichen Lösung ist wiederholt nach verschiedenen Methoden bewiesen worden[1]).

Wie Herr Bieberbach gezeigt hat, läßt auch das Hauptkreistheorem eine ähnliche Behandlung zu. Für $\mathfrak{R}$ tritt jetzt ein von einer Anzahl geschlossener, doppelpunktloser, analytischer und regulärer, außerhalb der Verzweigungspunkte verlaufender

1) Vgl. É. Picard, Journ. de Math. 1890, S. 145—210; 1893, S. 217—271; 1898, S. 313—316; Journ. für Math. 1905, S. 243—258; H. Poincaré, Journ. de Math. 1898, S. 137—230; L. Bieberbach, Gött. Nachr. 1912, S. 599—602; L. Lichtenstein, C. R. 157, 1913, S. 1508—1511; Acta math. Bd. 140, 1915, S. 1—34; L. Bieberbach, Math. Ann. Bd. 77, 1916, S. 173—212.

Kurven $\sum_\nu (\nu = 1, \ldots p)$, deren Gesamtheit mit S bezeichnet werden soll, begrenztes Gebiet T in $\mathfrak{R}$. Bei der Annäherung an $\sum_\nu$ soll die Lösung wie

$$(2) \qquad -2 \log l_\nu + \Pi_\nu$$

(l_ν = Entfernung des Punktes (x, y) von $\sum_\nu$, Π_ν beschränkt)

unendlich werden. Nachdem das erste Randwertproblem der Differentialgleichung (1) (ohne Singularitäten) von Herrn Bieberbach durch ein elegantes, rasch zum Ziele führendes Verfahren der sukzessiven Approximationen gelöst worden ist, wird das Hauptproblem in dem Grenzkreis- wie in dem Hauptkreisfalle durch einen geeigneten Grenzübergang erledigt. Das Verfahren liefert sowohl den Existenz-, als auch den Unitätssatz.

In den folgenden Zeilen wird zunächst die Existenz der Lösung, von dem gewöhnlichen Randwertproblem ausgehend, durch ein naheliegendes Auswahlverfahren fast ohne jede Rechnung bewiesen. Über das Verhalten der Lösung am Rande S von T werden sodann neue präzise Aufschlüsse gewonnen. Man wird dabei auch auf einen einfachen Unitätsbeweis geführt.

Es seien $(x_\nu, y_\nu)(\nu = 1, \ldots n)$; $(\bar{x}^\nu, \bar{y}_\nu)(\nu = 1, \ldots \bar{n})$ die von den Verzweigungs- und unendlich fernen Punkten verschiedenen singulären Punkte. In Verallgemeinerung des eingangs genannten Problems der Theorie der Uniformisierung wird eine in T (oder in $\mathfrak{R}$), außer in (x_ν, y_ν), $(\bar{x}_\nu, \bar{y}_\nu)$, in den Windungs- und unendlich fernen Punkten, reguläre Lösung der Differentialgleichung (2) $\Delta u = ke^u$ gesucht (die Funktion k nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in $T + S$ oder in $\mathfrak{R}$ stetig), die sich in jenen Punkten wie

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_\nu \log r_\nu + \Phi_\nu(x, y), \quad r_\nu^2 = (x - x_\nu)^2 + (y - y_\nu)^2, \quad \alpha_\nu > -2, \\ -2 \log r - 2 \log |\log r| + \bar{\Phi}_\nu(x, y), \quad r_\nu^2 = (x - \bar{x}^\nu)^2 + (y - \bar{y}^\nu)^2, \\ \qquad (\Phi_\nu, \ \bar{\Phi}_\nu \text{ beschränkt}), \end{cases}$$

in einem Windungspunkte (x_0, y_0) m-er Ordnung $(m \geqq 1)$ wie

$$(3^*) \quad -\frac{2m}{m+1} \log r_0 + \Psi_0(x, y), \ r_0^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \ (\Psi_0 \text{ beschränkt}),$$

allgemeiner wie

$$\beta_0 \log r_0 + \Psi_0(x, y), \quad \beta_0 > -2,$$

in den der Einfachheit halber als einblättrig vorausgesetzten, unendlich fernen Punkten wie

$$(3^{**}) \qquad -2 \log (x^2 + y^2) + \Theta(x, y),$$

allgemeiner wie

$$-\delta \log (x^2+y^2) + \Theta(x, y), \quad \delta > 1 \quad (\Theta \text{ beschränkt})$$

verhält. In dem Grenzkreisfalle wird die Ungleichheit

$$\sum_{\nu}^{1..n} \alpha_\nu - 2\bar{n} + \sum \beta_0 (m+1) + 2\sum \delta < 0 \tag{4}$$

als erfüllt vorausgesetzt.

Es sei jetzt $v(x, y)$ eine in T (oder $\mathfrak{R}$), außer in den vorhin ausgeschlossenen Punkten, wo sie sich wie u verhält[1]) nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige, im Hauptkreisfalle auf $\sum_\nu (\nu = 1, \dots p)$ wie $-2 \log l_\nu$ unendliche Funktion verstanden, die überdies so beschaffen ist, daß, wenn man $\Delta v = \beta$ schreibt, in T (oder $\mathfrak{R}$) eine Ungleichheit

$$0 < \bar{\lambda} < \frac{\beta}{ke^v} < \bar{\bar{\lambda}} \tag{5}$$

gilt ($\bar{\lambda}, \bar{\bar{\lambda}}$ konstant). Auf $\sum_\nu (\nu = 1, \dots p)$ sollen die beiden Produkte $l_\nu^2 \beta$ und $l_\nu^2 ke^v$ stetig und von Null verschieden sein und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben. Die Bestimmung geeigneter Funktionen v macht keine wesentlichen Schwierigkeiten[2]). Indem wir den folgenden Betrachtungen speziell den Hauptkreisfall zugrunde legen (der Grenzkreisfall erledigt sich ganz analog), bezeichnen wir mit $\gamma(x, y)$ diejenige in $T+S$ stetige, in T reguläre Potentialfunktion, die auf S den Wert $\log \frac{\beta}{ke^v}$ hat. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \gamma}{\partial x}, \frac{\partial \gamma}{\partial y}$ sind noch auf S stetig. Wir setzen

$$u = v + \gamma + U \tag{6}$$

und erhalten, außer höchstens in den singulären Punkten (3), (3*), (3**),

$$\Delta U = ke^v e^\gamma e^U - \beta = \alpha e^U - \beta; \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0; \quad \lim_{l_\nu = 0} \frac{\beta}{\alpha} = 1. \tag{7}$$

Offenbar ist in $T+S$

$$0 < \underline{\lambda} < \frac{\beta}{\alpha} < \underline{\underline{\lambda}} \quad (\underline{\lambda} < 1, \ \underline{\underline{\lambda}} > 1 \text{ konstant}). \tag{8}$$

---

1) Die Φ_ν, $\bar{\Phi}_\nu$, Ψ_0 und Θ entsprechenden Funktionen sind nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig, die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind beschränkt.

2) Vgl. die auf den Grenzkreisfall bezüglichen Entwicklungen meiner Acta-Arbeit (S. 9—11) und die auch den Hauptkreisfall umfassenden Betrachtungen des Herrn Bieberbach, a. a. O. S. 189—196.

Es sei $f(x, y)$ irgendeine in $T+S$ erklärte, nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige, auf S verschwindende Funktion, so daß

(9) $$\log \underline{\lambda} < f(x, y) < \log \underline{\underline{\lambda}}$$

gilt. Es sei $T_j (j = 1, 2, \ldots)$ eine unendliche Folge ineinander geschachtelter Gebiete in T, die von je einem, nötigenfalls mehrfach umfahrenen Kreise um jeden singulären Punkt und je einer geschlossenen Kurve $\sum_{\nu j} (\nu = 1, \ldots p)$ um $\sum_\nu$ begrenzt sind und gegen T konvergieren[1]). Die Gesamtberandung von T_j heiße S_j. Wir bezeichnen mit U_j eine in $T+S$ stetige Funktion, die in $T-T_j$ gleich $f(x, y)$ ist, in T_j stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat und die Differentialgleichung (7) befriedigt. Wegen (8) und (9) ist für alle j in $T+S$

(10) $$\log \underline{\lambda} < U_j < \log \underline{\underline{\lambda}}\ ^{2)}.$$

Es sei $\overline{T}$ irgendein stetig gekrümmtes Gebiet ganz im Innern von T, das keinen singulären Punkt enthält, es sei $\overline{\overline{T}}$ ein ebensolches Gebiet ganz im Innern von $\overline{T}$. Wendet man die Greensche Fundamentalformel auf die Differentialgleichung (7) und das Gebiet $\overline{T}$ an, so erhält man für alle (x, y) im Innern und auf dem Rande von $\overline{\overline{T}}$ und alle hinreichend großen j Ungleichheiten von der Form

(11) $$\left|\frac{\partial U_j}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial U_j}{\partial y}\right| < \mu \quad (\mu \text{ konstant}).$$

Aus der Folge $U_j (j = 1, 2, \ldots)$ läßt sich demnach eine Teilfolge aussondern, die in $\overline{\overline{T}} + \overline{\overline{S}}$ gleichmäßig konvergiert. Indem man $\overline{T}$ und $\overline{\overline{T}}$ gegen T konvergieren läßt, gewinnt man in bekannter Weise durch ein Diagonalverfahren eine Teilfolge, die in jedem ganz im Innern von T gelegenen Bereiche, der die singulären Punkte nicht enthält, gleichmäßig konvergiert. Diese Teilfolge sei von nun an mit $U_j (j = 1, 2, \ldots)$ bezeichnet. Die Grenzfunktion ist, wie man leicht sieht, eine in T beschränkte, außer höchstens in den singulären Punkten, reguläre Lösung der Differentialgleichung (7).

1) Die Kurven $\sum_{\nu j}$ sind so gewählt, daß bei einer weiter unten vorzunehmenden konformen Abbildung $\sum_\nu$ und $\sum_{\nu j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ in je ein System konzentrischer Kreise übergehen.

2) Man gewinnt die Beziehungen (10) am einfachsten, wenn man mit Herrn Bieberbach bemerkt, daß andernfalls U_j in T_j ein Maximum $\geqq \log \underline{\underline{\lambda}}$, oder ein Minimum $\leqq \log \underline{\lambda}$ haben müßte. An einer Stelle des Maximums würde $\alpha e^U - \beta = \Delta U > 0$, an einer Stelle des Minimums $\Delta U_j < 0$ sein, was nicht angeht.

In genau derselben Weise wird man in dem Grenzkreisfalle vorgehen, nur hat man dabei die Gleichung (6) durch $u = v + U$ zu ersetzen[1]).

Wie wir jetzt zeigen wollen, *ist U auf S gleich Null.* Es sei Θ irgendein von einer Randkomponente von T, etwa $\sum_1$ und einer analytischen und regulären Kurve $\overline{\sum}_1$ begrenztes ringförmiges Gebiet, das keinen singulären Punkt enthält. Wir bilden Θ auf die Fläche eines Kreisringes Θ' $(r_0' < r' < 1,\ r'^2 = x'^2 + y'^2)$ in der Ebene (x', y') konform ab, so daß $\sum_1$ in den Einheitskreis übergeht, setzen $U(x, y) = U'(x', y')$ und gewinnen für U' eine Differentialgleichung von der Form

$$(12) \qquad \Delta U' = \frac{1}{(1-r')^2}\,(a'e^{U'} - b'),$$

unter a' und b' Funktionen verstanden, die sich ähnlich wie αl_2^2 und βl_1^2 verhalten. Insbesondere ist

$$(13) \qquad a' > 0,\ b' > 0; \quad 0 < \underline{\lambda} < \frac{b'}{a'} < \underline{\underline{\lambda}}; \quad \lim_{r'=1} \frac{b'}{a'} = 1.$$

Wir setzen

$$(14) \quad f(x, y) = f'(x', y'), \quad U_j(x, y) = U_j'(x', y'), \quad U(x, y) = U'(x', y').$$

Sei jetzt $F(r')$ eine für $r_0' \leqq r' \leqq 1$ erklärte, nebst ihrer Ableitung erster Ordnung stetige, für $r' = 1$ verschwindende Funktion, so daß

$$(15) \qquad \log\underline{\lambda} < F(r') < \log\underline{\underline{\lambda}}, \quad F\left(\sqrt{x'^2+y'^2}\right) \geqq f(x', y')$$

gilt. Es seien ferner $A'(r')$, $B'(r')$ für $r_0' \leqq r' \leqq 1$ erklärte positive, analytische und reguläre, den Beziehungen

$$(16) \qquad 0 < \underline{\lambda} < \frac{B'}{A'} < \underline{\underline{\lambda}}, \quad A'\left(\sqrt{x'^2+y'^2}\right) \leqq a'(x', y'),$$

$$B'\left(\sqrt{x'^2+y'^2}\right) \geqq b'(x', y'), \quad B'(1) = A'(1)$$

genügende Funktionen. Es sei schließlich $\overline{C}$ irgendeine Zahl größer als Max $U(x, y)$ auf $\overline{\sum}_1$. Durch $\overline{\sum}_1$ wird für hinreichend große j aus T_j ein ringförmiges Gebiet herausgeschnitten, dem in der Ebene (x', y') das Kreisgebiet Θ_j' $(r_0' < r' < r_j' < 1)$ entsprechen möge. (Vgl. die Fußnote 1) S. 4.) Die im Innern und auf dem Rande von Θ_j' stetige, in Θ_j' reguläre Lösung der Differentialgleichung

1) Das Verfahren führt stets zum Ziele, wie auch α und β in den singulären Punkten und Linien beschaffen sind, wenn nur (8) gilt.

(17) $$\Delta V = \frac{1}{(1-r')^2}(A' e_V - B'),$$

die für $r' = r'_0$ gleich $\overline{C}$, für $r' = r'_j$ gleich $F(r')$ ist, heiße $V'_j(x', y')$. In $\Theta' - \Theta'_j$ sei

(18) $$V'_j(x', y') = F\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)$$

gesetzt. In bekannter Weise kann gezeigt werden, daß

(19) $$U'_j \leqq V'_j$$

ist. Aus der Folge V'_j läßt sich eine Teilfolge aussondern, die gegen eine beschränkte, in Θ' reguläre Lösung $V'(x', y')$ der Differentialgleichung (17) konvergiert. Wegen (19) ist in Θ' durchweg

(20) $$U'(x', y') \leqq V'(x', y').$$

Augenscheinlich ist V' eine Funktion von r' allein, $V'(x', y') = X'(r')$. In einer ganz ähnlichen Weise kann man eine beschränkte, in Θ' reguläre Lösung $V''(x', y') = X''(r')$ einer zu (17) analogen Differentialgleichung ableiten, so daß

(21) $$U'(x', y') \geqq V''(x', y')$$

ist. Die Funktion $\Lambda'_j = V'_j + \log\frac{A'}{B'}$ ist die Lösung eines leicht angebbaren Variationsproblems. Man schließt hieraus, daß

(22) $$\begin{gathered} d = J(\Lambda'_1) > J(\Lambda'_2) > J(\Lambda'_3) > \cdots, \\ J = J_1 + J_2 + J_3; \quad J_1(\Lambda'_j) = \int_{\Theta'}\left[\left(\frac{\partial \Lambda'_j}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Lambda'_j}{\partial y'}\right)^2\right] dx'dy', \\ J_2(\Lambda'_j) = \int_{\Theta'} \frac{2B'}{(1-r')^2}\left[e^{\Lambda'_j} - \Lambda'_j - 1\right] dx'dy', \\ J_3(\Lambda'_j) = \int_{\Theta'} 2C^* \Lambda'_j \, dx'dy', \quad C^* = \Delta\left(\log\frac{A'}{B'}\right) \end{gathered}$$

gilt. Da in J_2 die zu integrierende Funktion $\geqq 0$ ist, so ist, wie man sich leicht überzeugt, für alle j

(23) $$J_1(\Lambda'_j) < d'; \quad J_1(V'_j) < \overline{d} \qquad (d', \overline{d} \text{ konstant}),$$

mithin auch

(24) $$J_1(V') \leqq \overline{d}.$$

Ebenso überzeugt man sich, daß

(25) $$J_2(\Lambda') < d^* \qquad (d^* \text{ konstant})$$

ist. Aus (24) folgt wegen $V'(x', y') = X'(r')$ unter geeigneter Benutzung der Schwarzschen Ungleichheit, daß $\lim\limits_{r'=1} X'(r')$ existiert. Aus (25) schließt man sogleich, daß

$$(26)\qquad \lim_{r'=1} \Lambda'(x', y') = \lim_{r'=1} V'(x', y') = 0$$

sein muß. Ebenso beweist man, daß (27) $\lim\limits_{r'=1} V''(x', y') = 0$ ist. Aus (20), (21), (26) und (27) folgt endlich, wie behauptet,

$$(27^*)\qquad \lim_{r'=1} U'(x', y') = \lim_{l_1=0} U(x, y) = 0.$$

Durch die im Vorstehenden angedeuteten Betrachtungen haben wir für u eine in der Umgebung der Randkomponente $\sum_\nu (\nu = 1, \dots p)$ gültige Beziehung gewonnen

$$(28)\qquad u = v + \gamma + \omega_\nu(l_\nu), \quad \lim_{l_\nu = 0} \omega_\nu = 0.$$

In dem besonderen Falle der Differentialgleichung (1) gilt

$$u = -2\log l_\nu - 2\log 2 + \overline{\omega}_\nu(l_\nu), \quad \lim_{l_\nu = 0} \overline{\omega}_\nu = 0.$$

Die vorhin gefundene Lösung ist die einzige ihrer Art. Es sei etwa $\overline{U}$ eine andere Lösung derselben Natur.

Die Funktion

$$(29)\qquad \Pi(x, y) = U - \overline{U} = \Pi'(x', y)'$$

ist beschränkt ($\Pi < H$) und genügt in Θ' einer Differentialgleichung

$$(30)\qquad \Delta\Pi' = \frac{c'}{(1-r')^2}\Pi' \quad (c'(x', y') > 0 \text{ beschränkt}).$$

Es sei $C'(r')$ eine für $r'_0 \leqq r' \leqq 1$ erklärte analytische und reguläre, der Ungleichheit

$$(31)\qquad 0 < C'\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right) < c'(x', y')$$

genügende Funktion und es möge $Z'_j(r')$ diejenige für $r'_0 \leqq r' \leqq r'_j < 1$ reguläre Lösung der Differentialgleichung

$$(32)\qquad \frac{d^2 Z'_j}{dr'^2} + \frac{1}{r'}\frac{dZ'_j}{dr'} = \frac{C' Z'_j}{(1-r')^2}$$

bezeichnen, die für $r' = r'_0$ und $r' = r'_j$ den Wert H annimmt. Es ist

$$(33)\qquad \Pi'(x', y') < Z'_j(r') \quad (r'^2 = x'^2 + y'^2).$$

Aus der Folge Z'_j kann man eine beschränkte, für $r'_0 < r' < 1$ reguläre Lösung $Z'(r')$ gewinnen. Offenbar ist

(34) $$\Pi'(x', y') \leqq Z'(r').$$

Nach bekannten Sätzen ist die einzige beschränkte Lösung von (32) im Punkte $r' = 1$ gleich Null. In ähnlicher Weise gewinnt man eine für $r' = 1$ verschwindende Funktion $Z''(r')$, sodaß $\Pi'(x', y') \geqq Z''(r')$ ist. Also ist

(35) $$\lim_{r=1} \Pi'(x', y') = \lim_{l_1=1} \Pi(x, y) = 0.$$

Die beschränkte Funktion $\Pi(x, y) = U - U$ genügt einer Differentialgleichung

(36) $$\Delta \Pi = \alpha e^{U + \theta(x, y)(U - U)} \Pi = \alpha \delta \Pi$$
$$(0 < \theta < 1,\ \delta > 0 \text{ beschränkt}).$$

Es sei T^* das Gebiet, das entsteht, wenn man aus T die singulären Punkte entfernt. Es ist leicht zu zeigen, daß die Funktion $\Pi(x, y)$ in T^* überall verschwindet. Es sei im Gegensatz hierzu (x^0, y^0) irgendein Punkt in T^*, sodaß $\Pi(x^0, y^0) > 0$ ist. Es sei K^* ein Kreisgebiet um (x^0, y^0), in dem $\Pi(x, y) \geqq p^0 > 0$ ist. Das größte K^* enthaltende Gebiet in T^*, in dem die Ungleichheit $\Pi > 0$ gilt, heiße τ. Es sei τ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ eine Folge ineinander geschachtelter analytischer Gebiete, die gegen τ konvergieren. Für alle (ξ, η) in K^* ist in naheliegender Bezeichnungsweise

$$\Pi(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\tau_\nu} G_\nu(\xi, \eta; x, y)\, \alpha\delta\, \Pi\, dx\, dy + \omega_\nu(\xi, \eta),$$

(37) $$(\Delta\omega_\nu = 0;\ \omega_\nu = \Pi \text{ auf dem Rande von } \tau_\nu),$$

$$\Pi(\xi, \eta) < -\frac{1}{2\pi}\int_{K^*} G^*(\xi, \eta; x, y)\, \alpha\delta\, \Pi\, dx\, dy + \omega_\nu(\xi, \eta).$$

Geht man zur Grenze $\nu = \infty$ über, so findet man wegen $\lim_{\nu=\infty} \omega_\nu(\xi, \eta) = 0$[1],

(38) $$\Pi(\xi, \eta) < 0,$$

was der Voraussetzung widerspricht. Ebenso überzeugt man sich, daß Π in T negative Werte nicht annehmen kann[2]).

1) Diese Beziehung gilt, wie man sich unschwer überzeugt, trotzdem in den singulären Punkten nur feststeht, daß Π beschränkt ist.

2) Durch den vorstehenden Unitätsbeweis möchte ich den von mir in der Acta-Arbeit, S. 27—31 gegebenen Beweis, den ich mittlerweile in seinen fünf letzten Zeilen als unzureichend erkannt habe, ersetzt wissen.

Über eine neue Weise bestimmte Integrale in der analytischen Zahlentheorie zu gebrauchen.

Von

Georg Pólya in Zürich.

Vorgelegt von Herrn Landau in der Sitzung vom 3. März 1917.

1. Ist $f(t)$ im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbar und wird die Summation über alle Primzahlen p erstreckt, die $\leqq x$ sind, so ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x} \sum_{p \leqq x} f\left(\frac{p}{x}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Ich will im folgenden diesen Satz, bezw. zwei allgemeinere und schärfere Sätze beweisen, um dann zu zeigen, wie sich mit deren Hilfe manche zahlentheoretische Grenzwerte in aller Kürze berechnen lassen.

Der Ausgangspunkt meiner Untersuchung war ein Satz von Herrn Landau[1]), mit dessen Erörterung ich beginnen will. Herr Landau betrachtet eine Folge $q_1, q_2, q_3, \ldots$, deren Anwachsen in den wesentlichsten Zügen mit dem Anwachsen der Primzahlfolge 2, 3, 5, 7, 11, ... übereinstimmt. Genauer gesprochen, betrachtet er eine nicht abnehmende, divergente Folge von positiven Zahlen

$$0 < q_1 \leqq q_2 \leqq q_3 \leqq \cdots, \qquad \lim_{n=\infty} q_n = \infty,$$

und die zugeordnete Funktion $\varkappa(x)$, wo $\varkappa(x)$ die Anzahl derjenigen q bedeutet, die $\leqq x$ sind. (D. h. für $q_m < q_{m+1}$, $q_m \leqq x < q_{m+1}$ ist

1) Landau, Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques, Bulletins de l'Académie royale de Belgique (Classe des Sciences) (1911) S. 443—472. Vgl. Théorème VII.

$\varkappa(x) = m$). Er setzt die Existenz einer positiven, nicht abnehmenden Funktion $w(x)$ von der Eigenschaft

$$\lim_{x=\infty} \frac{w(2x)}{w(x)} = 1 \tag{1}$$

voraus, für welche

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varkappa(x)\, w(x)}{x} = 1 \tag{2}$$

ist.

Unter diesen Bedingungen beweist Herr Landau

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{\varkappa(x)} \sum_{q \leqq x} \left(\frac{x}{q} - \left[\frac{x}{q}\right]\right) = 1 - C.$$

$\left(\sum_{q \leqq x} \varphi(q) \text{ bedeutet } \sum_{\nu=1}^{\varkappa(x)} \varphi(q_\nu),\ C \text{ die Eulersche Konstante.}\right)$

Ich bemerke, daß die Funktion $f(t)$, die für $0 < t \leqq 1$ durch

$$f(t) = \frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]$$

definiert wird (es sei $f(0)$ etwa $= 0$) im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbar ist. Denn sie ist beschränkt und ihre Unstetigkeitspunkte haben den Punkt $t = 0$ zum einzigen Häufungspunkte. Es ist übrigens

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]\right) dt &= \lim_{n=\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]\right) dt \\ &= \lim_{n=\infty} \left\{\log n - 1\left(1 - \frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \cdots - (n-1)\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right\} \\ &= \lim_{n=\infty} \left\{\log n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + 1\right\} \\ &= 1 - C.\end{aligned}$$

Diese Bemerkung zeigt, daß der zitierte Satz von Herrn Landau[1]) als Spezialfall enthalten ist im folgenden

1) Zur Zeit der Abfassung vorliegender Abhandlung war mir die Arbeit von Herrn Landau, Über einige neuere Grenzwertsätze, Rendiconti, Palermo, Bd. XXXIV (1912) leider noch nicht bekannt. Kombiniert man diese letztere mit seiner eben zitierten Arbeit, so erhält man Resultate, die teils mehr, teils weniger besagen, als der Satz I, und die übrigens, wie mir scheint, kürzer zu erhärten sind auf dem Wege, der hier zum Beweise des Satzes I eingeschlagen wird. (Anm. bei der Korrektur, 10. 5. 1917.)

Satz I. Die Funktion $f(t)$ sei im Intervalle $0 \leqq t \leqq 1$ eigentlich integrierbar im Sinne von Riemann. Genügt die Folge $q_1, q_2, q_3, \dots$ den vorhin genannten Landauschen Bedingungen, so ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Der Beweis von Satz I ist überaus einfach. Ich schicke ihm nur die Bemerkung voraus, daß die Zahl 2 in der Bedingung (1) bloß der Einfachheit halber steht. Denn, da $w(x)$ positiv und nicht abnehmend ist, folgt aus (1)

(3) $$\lim_{x=\infty} \frac{w(\beta x)}{w(\alpha x)} = 1,$$

wenn α, β irgend zwei feste positive Zahlen. In der Tat, sei

$$0 < \alpha < \beta < \alpha 2^m,$$

wo m eine geeignet gewählte ganze Zahl, so ist

$$1 \leqq \frac{w(\beta x)}{w(\alpha x)} \leqq \frac{w(\alpha 2^m x)}{w(\alpha x)} = \frac{w(2\alpha x)}{w(\alpha x)} \frac{w(4\alpha x)}{w(2\alpha x)} \cdots \frac{w(2^m \alpha x)}{w(2^{m-1}\alpha x)},$$

und alle m Faktoren rechts streben gegen 1.

2. Ich nenne eine streckenweise konstante, im Intervalle $0 \leqq t \leqq 1$ definierte Funktion kurz „Treppenfunktion", wenn sie nur eine endliche Anzahl Unstetigkeitspunkte hat, denen $t = 0$ nicht angehört, und wenn sie auch in ihren Unstetigkeitspunkten von links stetig ist. Sind also $t_1, t_2, \dots t_{m-1}$ die Unstetigkeitspunkte der Treppenfunktion $\Psi(t)$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{m-1} < t_m = 1,$$

so ist

(4) $$\Psi(t) = l_i \quad \text{für} \quad t_{i-1} < t \leqq t_i,$$

$\Psi(0) = l_1$, wo $l_1, l_2, l_3, \dots l_m$ gewisse Konstanten sind. Es ist

(5) $$\int_0^1 \Psi(t)\,dt = \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1})\, l_i.$$

Die Riemannsche Integrabilitätsbedingung läßt sich, die Erklärung von (5) vorausgesetzt, so fassen: Eine Funktion $f(t)$ ist dann und nur dann integrabel im eigentlichen Sinne, wenn zu

jedem $\varepsilon > 0$ ein Paar von Treppenfunktionen $\psi(t)$ und $\Psi(t)$ bestimmt werden kann, auf die Weise, daß

$$\psi(t) \leqq f(t) \leqq \Psi(t), \tag{6}$$

$$\int_0^1 \Psi(t)\,dt - \int_0^1 \psi(t)\,dt < \varepsilon. \tag{7}$$

Für die Treppenfunktion (4) ist der Satz I offenbar. Denn die Anzahl der q_ν, für welche

$$t_{i-1} < \frac{q_\nu}{x} \leqq t_i, \quad \Psi\left(\frac{q_\nu}{x}\right) = l_i, \quad xt_{i-1} < q_\nu \leqq xt_i,$$

ist $\varkappa(t_i x) - \varkappa(t_{i-1} x)$, also

$$\frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} \Psi\left(\frac{q}{x}\right) = \frac{w(x)}{x} \sum_{i=1}^{m} l_i(\varkappa(xt_i) - \varkappa(xt_{i-1}))$$

$$= \sum_{i=1}^{m} l_i\left(\frac{\varkappa(xt_i)\,w(xt_i)}{xt_i}\,\frac{w(x)}{w(xt_i)}\,t_i - \frac{\varkappa(xt_{i-1})\,w(xt_{i-1})}{xt_{i-1}}\,\frac{w(x)}{w(xt_{i-1})}\,t_{i-1}\right)$$

(für $i = 1$ fällt das zweite Glied in der Klammer weg), also nach (2), (3)

$$\lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} \Psi\left(\frac{q}{x}\right) = \sum_{i=1}^{m} l_i(t_i - t_{i-1}) = \int_0^1 \Psi(t)\,dt.$$

Ist $f(t)$ irgend eine im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion, so bestimme man die zwei Treppenfunktionen $\psi(t)$ und $\Psi(t)$, die (6), (7) erfüllen. Dann ist

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) \leqq \lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} \Psi\left(\frac{q}{x}\right)$$

$$= \int_0^1 \Psi(t)\,dt \leqq \int_0^1 f(t)\,dt + \varepsilon,$$

$$\underline{\lim_{x=\infty}} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) \geqq \lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} \psi\left(\frac{q}{x}\right)$$

$$= \int_0^1 \psi(t)\,dt \geqq \int_0^1 f(t)\,dt - \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, ist Satz I bewiesen.

3. Daß $f(t)$ eigentlich integrierbar sei, ist keine unerläßliche Bedingung. Es ist z. B.

$$\lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} \left(\frac{q}{x}\right)^{\alpha-1} = \int_0^1 t^{\alpha-1}\, dt = \frac{1}{\alpha},$$

wenn $0 < \alpha < 1$. Ich will dies zugleich mit einem allgemeineren Satze beweisen. —

Aus der Bedingung (1) folgt offenbar, daß $w(x)$ nur sehr langsam anwachsen kann. Ich will zeigen, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x^\alpha} = 0 \tag{8}$$

für beliebiges festes $\alpha > 0$. Ich setze

$$f(x) = \begin{cases} w(1) & 0 \leqq x \leqq 1 \\ \dfrac{w(x)}{x^\alpha} & x \geqq 1. \end{cases}$$

Es ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{w(2x)}{2^\alpha w(x)} = \frac{1}{2^\alpha} < 1.$$

Man bestimme zu gegebenem Θ, $\frac{1}{2^\alpha} < \Theta < 1$, eine Zahl $a > 0$ derart, daß für $x > a$

$$\frac{f(x)}{f\left(\frac{x}{2}\right)} < \Theta.$$

Es sei A die obere Schranke von $f(x)$ im Intervalle $0 \leqq x \leqq a$.

Zu jedem gegebenen $x > a$ gehört eine ganze Zahl N, eindeutig bestimmt durch die Bedingung

$$\frac{x}{2^{N-1}} > a \geqq \frac{x}{2^N}.$$

N wächst offenbar mit x ins Unendliche. Aus der Ungleichung

$$f(x) = \frac{f(x)\, f\left(\frac{x}{2}\right)}{f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{4}\right)} \cdots \frac{f\left(\frac{x}{2^{N-1}}\right)}{f\left(\frac{x}{2^N}\right)} f\left(\frac{x}{2^N}\right)$$
$$\leqq \Theta^N A$$

folgt nun die Behauptung (8).

Ich wende mich nun zur Abschätzung der Summe $\sum_{q \leqq x} q^{\alpha-1}$. Es seien $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r$ die verschiedenen Werte, die die

ersten $\varkappa(x)$ Glieder der Folge $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots$ annehmen. Es ist $r_1 = q_1$, $\varkappa(r_l) = \varkappa(x)$, und es ist

$$\sum_{q \leqq x} q^{\alpha-1} = r_1^{\alpha-1}\varkappa(r_1) + r_2^{\alpha-1}(\varkappa(r_2)-\varkappa(r_1)) + \cdots + r_l^{\alpha-1}(\varkappa(r_l)-\varkappa(r_{l-1}))$$
$$= \varkappa(r_1)(r_1^{\alpha-1}-r_2^{\alpha-1}) + \cdots + \varkappa(r_{l-1})(r_{l-1}^{\alpha-1}-r^{\alpha-1}) + \varkappa(r_l)(r_l^{\alpha-1}-x^{\alpha-1}) + \varkappa(x)x^{\alpha-1}$$

(9)
$$= -\varkappa(r_1)\int_{r_1}^{r_2}\frac{dt^{\alpha-1}}{dt}dt - \cdots - \varkappa(r_l)\int_{r}^{x}\frac{dt^{\alpha-1}}{dt}dt + \varkappa(x)x^{\alpha-1}$$
$$= (1-\alpha)\int_{q_1}^{x}\varkappa(t)t^{\alpha-2}\,dt + \varkappa(x)x^{\alpha-1}.$$

Zu jedem gegebenen ε

(10) $$0 < \varepsilon < 2^{\alpha} - 1$$

läßt sich ein Wert $a > 0$ so bestimmen, daß für $x > a$

$$\varkappa(x) < \frac{x}{w(x)}(1+\varepsilon), \qquad \frac{w(x)}{w\left(\frac{x}{2}\right)} < 1 + \varepsilon.$$

Es ist folglich für $x > a$

$$\int_{q_1}^{x}\varkappa(t)t^{\alpha-2}\,dt < \int_{q_1}^{a}\varkappa(t)\,t^{\alpha-2}\,dt + \int_{a}^{x}\frac{t}{w(t)}(1+\varepsilon)t^{\alpha-2}\,dt$$
$$= A + (1+\varepsilon)\int_{a}^{x}\frac{t^{\alpha-1}}{w(t)}\,dt,$$

wo der Sinn der Abkürzung A ersichtlich ist. Es sei N die durch die Ungleichungen

$$\frac{x}{2^{N-1}} > a \geqq \frac{x}{2^{N}}$$

eindeutig bestimmte ganze Zahl. Dann folgt weiter

(11)
$$\int_{q_1}^{x}\varkappa(t)t^{\alpha-2}\,dt < A + (1+\varepsilon)\sum_{\nu=1}^{N}\int_{\frac{x}{2^{\nu}}}^{\frac{x}{2^{\nu-1}}}\frac{t^{\alpha-1}}{w(t)}\,dt$$
$$\leqq A + (1+\varepsilon)\sum_{\nu=1}^{N}\frac{1}{w\left(\frac{x}{2^{\nu}}\right)}\left(\frac{x^{\alpha}}{2^{(\nu-1)\alpha}} - \frac{x^{\alpha}}{2^{\nu\alpha}}\right)\frac{1}{\alpha}$$

$$= A + (1+\varepsilon)\frac{1}{\alpha}\frac{x^\alpha\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)}{w(x)}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{w(x)}{w\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{w\left(\frac{x}{2}\right)}{w\left(\frac{x}{4}\right)}\cdots\frac{w\left(\frac{x}{2^{\nu-1}}\right)}{w\left(\frac{x}{2^\nu}\right)}\frac{1}{2^{(\nu-1)\alpha}}$$

$$(11)\qquad < A + \frac{1+\varepsilon}{\alpha}\frac{x^\alpha\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)}{w(x)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1+\varepsilon)^\nu}{2^{(\nu-1)\alpha}}$$

$$= A + \frac{x^\alpha}{w(x)}\frac{1}{\alpha}\frac{\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)(1+\varepsilon)^2}{1-\frac{1+\varepsilon}{2^\alpha}}.$$

Aus (9) und (11)

$$\frac{w(x)}{x}\sum_{q\leqq x}\left(\frac{q}{x}\right)^{\alpha-1} = \frac{w(x)}{x^\alpha}\int_{q_1}^{x}(1-\alpha)\varkappa(t)t^{\alpha-2}\,dt + \frac{\varkappa(x)w(x)}{x}$$

$$< A(1-\alpha)\frac{w(x)}{x^\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)(1+\varepsilon)^2}{1-\frac{1+\varepsilon}{2^\alpha}} + \frac{\varkappa(x)w(x)}{x}.$$

Aus (2) und (8), und aus der Willkürlichkeit von ε, das bloß (10) genügen muß, folgt

$$(12)\qquad \overline{\lim_{x=\infty}}\frac{w(x)}{x}\sum_{q\leqq x}\left(\frac{q}{x}\right)^{\alpha-1} \leqq 0 + \frac{1-\alpha}{\alpha} + 1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Jetzt bin ich in der Lage den Beweis zu liefern für den

Satz II. *Es sei $f(t)$ in jedem abgeschlossenen Teilintervalle vom Intervalle $0 \leqq t \leqq 1$, das den Punkt $t=0$ nicht enthält, eigentlich integrabel. Es existiere α, $0<\alpha<1$, so beschaffen, daß*

$$\lim_{t=0} f(t)\,t^{1-\alpha} = 0.$$

Dann ist

$$\lim_{x=\infty}\frac{w(x)}{x}\sum_{q\leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ sonst beliebig, nur so gewählt, daß für $0 < t \leqq \varepsilon$

$$f(t) < t^{\alpha-1}.$$

Ich definiere zwei eigentlich integrable Funktionen $f^*(t)$ und $\varphi(t)$ durch die Vorschrift

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für} \quad t > \varepsilon \\ 0 & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq \varepsilon \end{cases} \qquad \varphi(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1} & \text{für} \quad t > \varepsilon \\ 0 & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq \varepsilon. \end{cases}$$

Es ist

$$\sum_{q \leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) = \sum_{q \leqq \varepsilon x} f\left(\frac{q}{x}\right) + \sum_{\varepsilon x < q \leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right)$$

$$\leqq \sum_{q \leqq x} \left(\frac{q}{x}\right)^{\alpha-1} - \sum_{q \leqq x} \varphi\left(\frac{q}{x}\right) + \sum_{q \leqq x} f^*\left(\frac{q}{x}\right),$$

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) \leqq \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} \left(\frac{q}{x}\right)^{\alpha-1}$$

$$- \lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} \varphi\left(\frac{q}{x}\right) + \lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} f^*\left(\frac{q}{x}\right)$$

$$\leqq \frac{1}{\alpha} - \int_0^1 \varphi(t)\, dt + \int_0^1 f^*(t)\, dt$$

$$= \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} + \int_\varepsilon^1 f(t)\, dt,$$

mit Benutzung des Satzes I und der Ungleichung (12). Daraus folgt weiter

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) \leqq \int_0^1 f(t)\, dt,$$

und mit demselben Recht

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} -f\left(\frac{q}{x}\right) = -\underline{\lim_{x=\infty}} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leqq x} f\left(\frac{q}{x}\right) \leqq -\int_0^1 f(t)\, dt,$$

welche beide zusammen den vollen Satz II ergeben.

5. Verstehen wir unter $q_1, q_2, q_3, \ldots$ speziell die Folge der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, ..., so wird $\varkappa(x) = \pi(x)$, d. h. die Anzahl der Primzahlen bis zur Grenze x und $w(x) = \log x$. Es ist nämlich, nach der einfachsten Fassung des Primzahlsatzes

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1. \tag{13}$$

Unter den Bedingungen des Satzes II ist also

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x} \sum_{p < x} f\left(\frac{p}{x}\right) = \int_0^1 f(t)\, dt. \tag{14}$$

Von der asymptotischen Primzahltheorie haben wir zum Beweise von (14) nur den Primzahlsatz (13) ohne spezielle Restabschätzung benutzt. Formel (14) gestattet nun eine Anzahl Folgerungen, die man aus dem Primzahlsatze zu ziehen pflegt oder ziehen kann, völlig durchsichtig und mühelos abzuleiten. Es handelt sich immer einfach darum, eine gewöhnliche Integralformel in einen zahlentheoretischen Grenzwertsatz gleichsam zu übersetzen. Ich gebe einige Beispiele und ich beginne mit den einfachsten und geläufigsten.

I) $$\int_0^1 \log t \, dt = -1$$

ergibt

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x}\left(\sum_{p \leqq x} \log p - \pi(x)\log x\right) = -1,$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x}\sum_{p \leqq x} \log p = \lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1.$$

II) Für $a > -1$ ist

$$\int_0^1 t^a \, dt = \frac{1}{a+1},$$

folglich

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x^{1+a}} \sum_{p \leqq x} p^a = \frac{1}{a+1}.$$

III) Es ist

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]\right) dt = 1 - C$$

(vgl. unter 1), das Integral im eigentlichen Sinne genommen. Daraus folgt

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x} \sum_{p \leqq x} \left(\frac{x}{p} - \left[\frac{x}{p}\right]\right) = 1 - C.$$

Dieses Resultat rührt von Herrn de la Vallée-Poussin[1]) her und gab Anstoß zu der Untersuchung von Herrn Landau, die ihrerseits die gegenwärtige Untersuchung angeregt hat.

---

1) de la Vallée-Poussin, Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, Bd. 22, Teil 1, S. 84—90.

IV) Ich bezeichne mit $\sigma_a(n)$ die Summe der a-ten Potenzen aller verschiedener Primteiler der ganzen Zahl n. Es ist z. B.

$$\sigma_a(1) = 0, \quad \sigma_a(2) = 2^a, \quad \sigma_a(30) = 2^a + 3^a + 5^a.$$

Die Summe

$$\sigma_a(1) + \sigma_a(2) + \sigma_a(3) + \cdots + \sigma_a(n) = \sum_{p \leqq n} \left[\frac{n}{p}\right] p^a$$

läßt sich für $a > 0$ mit Hülfe der Integralformel

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{t}\right] t^a \, dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{a+1} \left(\frac{1}{\nu^{a+1}} - \frac{1}{(\nu+1)^{a+1}}\right) = \frac{\zeta(a+1)}{a+1}$$

asymptotisch auswerten. In der Tat, das Integral ist für $a \geqq 1$ eigentlich und genügt auch für $0 < a < 1$ den Bedingungen der Formel (14). Diese ergibt also für $a > 0$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_a(1) + \sigma_a(2) + \sigma_a(3) + \cdots + \sigma_a(n)}{n^{a+1} (\log n)^{-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{\log n}{n} \sum_{p \leqq n} \left[\frac{n}{p}\right] \left(\frac{p}{n}\right)^a$$
$$= \frac{\zeta(a+1)}{a+1}.$$

V) Zuletzt will ich noch die Verteilung der Reste studieren, die entstehen, wenn eine ganze Zahl n durch alle kleineren Primzahlen dividiert wird. Es sei α gegeben, $0 < \alpha > 1$, dann sind zwei Fälle möglich: der Rest der Division von n durch die Primzahl p ist entweder $< \alpha p$ oder er ist $\geqq \alpha p$ und $< p$. Im ersteren Falle ist

$$\frac{n}{p} - \left[\frac{n}{p}\right] < \alpha, \quad \left[\frac{n}{p}\right] > \frac{n}{p} - \alpha > \left[\frac{n}{p}\right] - 1, \quad \left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p} - \alpha\right] = 1,$$

im zweiten Falle ist

$$\frac{n}{p} - \left[\frac{n}{p}\right] \geqq \alpha, \quad \left[\frac{n}{p}\right] \leqq \frac{n}{p} - \alpha < \frac{n}{p}, \quad \left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p} - \alpha\right] = 0.$$

Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der fragliche Rest $< \alpha p$ ausfällt? Sie ist

$$= \frac{1}{\pi(n)} \sum_{p \leqq n} \left(\left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p} - \alpha\right]\right),$$

da die Anzahl aller in Frage kommenden Primzahlen $\pi(n)$ ist.

Der Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit berechnet sich aus der Formel

$$\left(\int_0^1\left(\left[\frac{1}{t}\right]-\left[\frac{1}{t}-\alpha\right]\right)dt = 1-\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+\alpha}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3+\alpha}+\cdots\right.$$

$$= C+\frac{1}{\alpha}+\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

oder auch $\left.= \int_0^1 \frac{1-t^\alpha}{1-t}dt\right)$. Das Integral ist nämlich eigentlich (die Unstetigkeitspunkte des beschränkten Integranden haben $t = 0$ zur einzigen Häufungsstelle), und daraus folgt

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi(n)}\sum_{p\leqq n}\left(\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n}{p}-\alpha\right]\right)=\int_0^1\frac{1-t^\alpha}{1-t}\,dt.$$

Man kann aber unter $q_1, q_2, q_3, \ldots$ auch die Primzahlen einer arithmetischen Progression, oder die Zahlen verstehen, die nur zwei verschiedene Primfaktoren haben u. s. w.: der Satz II, angewandt auf die betrachteten Integrale und einige andere, liefert mühelos eine Fülle von asymptotischen Auswertungen zahlentheoretisch bedeutsamer Ausdrücke.

Die Resistenzgrenzen der Mischkristalle des Vanadins und Siliciums mit Eisen.

Von

G. Tammann.

(Mit 2 Figuren im Text.)

Vorgelegt in der Sitzung am 17. März 1917.

Zur Bestimmung der Resistenzgrenzen dieser Mischkristallreihen wurde zum Teil ein wenig anders verfahren, als bei der Bestimmung der Resistenzgrenzen der Cu-Au- und Ag-Au-Mischkristalle. Aus diesen ist es leicht Plättchen mit blanker Oberfläche herzustellen und nach Einwirkung verschiedener Agentien die Veränderungen auf den blanken Oberflächen zu beobachten.

Die Mischkristalle des Fe mit Si und V sind zur Herstellung solcher Plättchen zu spröde und können daher nur in Form von Bruchstücken untersucht werden. Die Herstellung von Schliffflächen an diesen Bruchstücken zur Beobachtung ihrer Veränderung durch die Agentien, wäre zeitraubend und würde auch mehr Material erfordern als das folgende Verfahren, bei dem mehr Gewicht auf die Veränderungen in der Lösung als auf die der unregelmäßig gestalteten Oberfläche des zu untersuchenden Stückes gelegt wurde, da auf dieser unregelmäßigen Oberfläche Veränderungen weniger leicht festzustellen sind als auf einer glatten.

Läßt man das Agens in so kleinen Mengen auf Bruchstücke der Mischkristall-Konglomerate wirken, daß die Menge der aktiven Komponente in ihnen mehr als hinreichend ist, um die ganze Menge des Agens in der Lösung zu verändern, so wird, wenn es sich um gefärbte Agentien handelt, die Grenze ihrer Wirkung leicht zu beobachten sein, da sich die Farbe der Lösung über den re-

sistenten Mischkristallen sich nicht ändert wohl aber über den nicht resistenten, wenn die von der nicht resistenten, an der inaktiven Komponente reichsten Mischkristallmenge abgegebene Menge der aktiven Komponente hinreicht die ganze Menge des Agens in der Lösung zu verändern.

Dementsprechend wurden in einzelnen Probierröhrchen Bruchstücke von 0.05 bis 0.3 gr. der durch Zusammenschmelzen der Komponenten erhaltenen Reguli mit je 1 ccm. der betreffenden Lösungen zusammengebracht. Die Menge des aktiven Eisens in den Mischkristallen war also immer erheblich größer als die dem Agens in der Lösung äquivalente Menge. Wenn die Beobachtungszeit länger ausgedehnt werden sollte, wurden die betreffenden Probierröhrchen zugeschmolzen.

Die Resistenzgrenzen der Fe-V-Mischkristallreihe.

Die bisher bestimmten Resistenzgrenzen beziehen sich auf Mischkristallreihen, deren eine Komponente in hohem Grade inaktiv oder edel ist, wie Au oder Fe Si, deren andere Komponente aber mehr oder weniger aktiv ist, wie Ag, Cu oder Fe. Offenbar ist aber das Auftreten von Resistenzgrenzen an diese Beziehung der beiden Komponenten nicht gebunden. Wenn nur die Bedingung erfüllt ist, daß ein Platzwechsel der Atome oder Moleküle des Mischkristalls bei ihrer Untersuchungstemperatur nicht stattfindet, so können Resistenzgrenzen auch in einer Mischkristallreihe auftreten, deren beide Komponenten aktiv sind, sich aber hinsichtlich ihrer Aktivität so weit von einander unterscheiden, daß Reaktionen angegeben werden können, an denen sich nur die eine der beiden Komponenten beteiligt.

Bezüglich der Metallfällungen, die durch die Mischkristalle einer Reihe bewirkt werden, können die allgemeinen Bedingungen angegeben werden, die für diese Reaktionen erfüllt sein müssen, damit bei ihrer Wirkung Resistenzgrenzen einer Mischkristallreihe auftreten. Wenn den beiden Komponenten der Mischkristallreihe, A und B, in der elektrochemischen Spannungsreihe nicht benachbarte Plätze zukommen und A unedler als B ist, so werden durch die A-reichen Mischkristalle alle Metalle, die edler als A sind, aus aus ihren Lösungen gefällt werden, und durch die B-reichen Mischkristalle alle Metalle, die unedler als B sind. Die Metalle, die in der Spannungsreihe zwischen A und B stehen, werden nur von den A-reichen nicht aber von den B-reichen Mischkristallen gefällt werden.

Je weiter die Komponenten A und B in der Spannungsreihe von

einander entfernt sind, für um so mehr Metallfällungen durch A können die Resistenzgrenzen bestimmt werden. Diese allgemeinen Bedingungen wären nicht erfüllt, wenn in der Lösung des zu fällenden Kations das Anion eine Wirkung auf beide Komponenten oder auf die Komponente B ausüben sollte.

Die Stellung des Vanadins in der Spannungsreihe ist nicht sicher bestimmt. L. Marino[1]) gab an, daß ein fast 9 % C-haltiges Vanadin Au und Ag aus ihren Lösungen fällt, nicht aber H_2 aus den Lösungen von Säuren entwickelt. Aus den Lösungen von $HgCl_2$ und $CuCl_2$ fällt dieses Vd nicht die Metalle sondern nur die Chlorüre. Wir werden später sehen, daß die vanadinreichen Mischkristalle auch Hg und Cu aus ihren Lösungen fällen. Dementsprechend würde das Vanadin in der Spannungsreihe seinen Platz zwischen H_2 und Cu erhalten, vom Fe wäre es durch Cd, Tl, Co, Ni, Pb, Sn und H_2 getrennt. Diese Metalle müßten also durch die Fe-reichen Mischkristalle gefällt werden, nicht aber durch die V-reichen.

Von den zu folgenden Versuchen benutzten Fe-V-Mischkristallen waren die mit mehr als 30 % V aluminothermisch aus Fe_2O_3 und V_2O_5 hergestellt; die Fe-reicheren waren durch Zusammenschmelzen von Fe und einer Vd-reicheren Legierung dargestellt. Die analysierten Legierungen sind mit einem Stern bezeichnet[2]). Die Legierungen enthielten außer V und Fe noch durchschnittlich 1 % Si und 0.5 % Al. Wegen dieser Beimengungen, von denen das Al als Fe, das Si als V betrachtet werden können, hätte der Versuch einer genaueren Bestimmung der Resistenzgrenzen keinen Sinn; derselbe wäre erst möglich, wenn man, über hinreichende Mengen reinen V verfügen könnte.

Die untersuchten Mischkristalle hatten folgenden V-Gehalt. Die mit einem Stern bezeichneten Konzentrationen sind durch die Analyse bestimmt, die anderen sind nach diesen korrigiert.

0.0	10.0	26.8	31.5*	41.5	51.5*	56.5	71.3*	% V
0.0	0.11	0.28	0.33	0.43	0.54	0.59	0.73	Mol V.

Nach langsamer, gewöhnlicher Abkühlung sind die Mischkristalle bis einschließlich 0.43 Mol V ferromagnetisch, die Mischkristalle mit 0.54, 0.59 und 0.73 Mol V wirken aber auf eine unempfindliche Magnetnadel nicht ein. Ein Knick oder Haltepunkt, der mit den Umwandlungspunkten des Fe zusammenhängt, ist schon auf der Abkühlungskurve der Legierung mit 0.11 Mol V nicht mehr zu finden[2]). Analog wie bei den Fe-Si-Mischkristallen darf man

1) Zeitschrift f. anorg. Chem. 39, 152, 1904.

2) Vogel u. Tammann, Zeitschr. f. anorg. Chem. 58 S. 73 1908.

annehmen, daß das Gitter, welches den ferromagnetischen Mischkristallen zu Grunde liegt, ein 14-Punkt-Gitter ist, während das Gitter der Mischkristalle von 0.5 bis 1.0 Mol V ein 14-Punkt-Gitter sein muß. Denn nach dem Zustandsdiagramm des Fe-V[1]) liegen die Mischkristalle von 0.5 bis 1.0 Mol V im Zustandsfelde der γ-Mischkristalle, und da das γ-Fe mit Mn eine lückenlose Mischkristallreihe bildet und andererseits das Mn mit Cu, dessen Atome ein 14-Punktgitter besetzen, ebenfalls eine lückenlose Mischkristallreihe gibt, so kommt den Fe-V-Mischkristallen von 0.5 bis 1.0 Mol V ebenfalls ein 14-Punkt-Gitter zu. Die Mischkristallreihe Fe-V zerfällt also bei tieferen Temperaturen in zwei Teile, die ferromagnetische und die nicht ferromagnetische Reihe. Ob in der Nähe der Grenzkonzentration von 0.5 Mol dem Verlust des Ferromagnetismus eine diskontinuierliche Aenderung des Gitterparameters entspricht, mag dahingestellt sein, jedenfalls kann diese Aenderung nur eine sehr geringe sein.

Das Verhalten der Fe-V-Mischkristalle der angegebenen Zusammensetzung gegen die Lösungen der Salze anderer Metalle ist im Folgenden beschrieben. Es bestätigt sich in der Hauptsache, daß die auf Grund der Spannungsreihe aufgestellten Forderungen zutreffen, doch werden die Erscheinungen ein wenig dadurch geändert, daß in gewissen Fällen auch das Anion des gelösten Salzes eine Wirkung sowohl auf das Fe als auch auf das V ausübt, und dadurch, daß das Anion passivierend auf das Fe einwirkt.

Aus den Lösungen von $AuCl_3$ (2 gr Au in 100 ccm.) fällen alle Mischkristalle der angegebenen Konzentrationen das Au schnell; nach 1 Tage ist alles Au gefällt und die Lösungen über den V-haltigen Stücken sind blau.

Auch aus einer gesättigten Lösung von Ag_2SO_4 wird das Ag schnell gefällt; nach 1 Tage ist alles Ag gefällt, die Lösungen sind aber über allen Stücken farblos. Aus einer Lösung mit 0.5 Mol $AgNO_3$ wird das Ag ebenfalls schnell von den V-haltigen Stücken gefällt nur das Fe wird in dieser Lösung passiv. Nach 2 Tagen ist alles Ag gefällt, die Lösung über dem Stück mit 0.11 Mol ist farblos, über den Stücken mit 0.21 u. 0.28 Mol V sind sie grün, die Lösungen über den anderen Stücken sind blau.

Aus einer Lösung mit 0.5 Mol $HgNO^3$ hat sich auf den Stücken mit 0.43, 0.54, 0.59 und 0.73 Mol V eine merkliche Menge von Hg ausgeschieden und die Lösungen sind blau geworden. Nach 2 Tagen sind nun die Stücke mit 0.0 u. 0.11 Mol V blank und ihre Lö-

1) Vogel u. Tammann Zeitschr. f. anorg. Chem. 58 S. 73 1908.

sungen farblos, während die anderen mit Hg-Pulver bedeckt und ihre Lösungen blau sind.

Eine Lösung mit 0.5 Mol $Hg(NO_3)_2$ wirkt ganz ähnlich nur langsamer.

Das Verhalten einer Lösung mit ¼ $HgCl_2$ beschreibt folgende Tabelle:

	0.0	0.11	0.21	0.28	0.33	0.40	0.54	0.59	0.73 Mol V
Fällung	rein		grau	grau und weiß			rein weiß		
Lösung	farblos		hellgrün	grün	blau		blau		

Nachdem nach einem Tage diese Veränderungen eingetreten waren, änderte sich während der Beobachtungsdauer von 8 Tagen das Bild nur insofern, als sich die Fällungen vermehrten und die Farbe der Lösungen vertiefte.

Aus den Lösungen der beiden Nitrate des Hg fällen die Fe-V-Mischkristalle bis auf die Fe-reichsten des Hg als Metall. Aus der an Hg-Jonen armen Lösung des $HgCl_2$ fällen nun die Fe-reicheren Mischkristalle das Hg; bei den V-reicheren Mischkristallen, von 0.50 Mol V an, überwiegt die Wirkung der $HgCl_2$-Moleküle die der Hg-Jonen, so daß es nur zur Ausscheidung von $HgCl$ kommt.

Auch das Cu wird aus seinen Lösungen von allen aufgezählten Fe-V-Mischkristallen gefällt. In einer Lösung mit 0.5 $CuSO_4$ wurden in einem Tage die Fe-reicheren Stücke gleichmäßig rot, die V-reicheren an einigen Stellen rot, an anderen braun. In einer Lösung mit 1 $Cu(NO_3)_2$ ist die Wirkung dieselbe, nur das Fe selbst hält sich hier verschieden lange Zeit passiv. Die Wirkung einer Lösung von 0.4 $CuCl_2$ ist der der $HgCl_2$-Lösung ähnlich. Die Stücke bis 0.43 Mol V fällen Cu und außerdem auch $CuCl$; an den Stücken mit 0.54 und mehr Mol V wurde die Fällung von Cu nicht beobachtet, sie kann aber durch die reichliche Abscheidung von $CuCl$ verdeckt gewesen sein.

Da Lösungen von Au, Ag, Hg u. Cu auch durch die V-reicheren Mischkristalle gefällt werden, so ist das V unedler als Cu.

Während aber die Fe-reichen Mischkristalle bis einschließlich 0.43 V aus einer Lösung mit 1 Mol H_2SO_4 Wasserstoff entwickeln, ist eine Gasentwicklung an den Stücken mit 0.54 und mehr Mol V nicht zu beobachten. Nach etwa 24 Stunden hört die Gasentwicklung auf und die Lösungen über den V-haltigen Stücken sind grün oder blau, während über den Stücken mit 0.54 und mehr Mol V die Lösungen farblos sind; erst nach 2 Tagen wird die Lösung über dem Stück mit 0.54 schwach blau und nach 14 Tagen ist diese Lösung blau und die über dem Stück mit 0.59 V hellblau,

während die über dem Stück mit 0.73 V noch farblos ist. Es scheint neben der Wasserstoffentwicklung eine Oxydationswirkung durch den gelösten O_2 vor sich zu gehen, indem das fein verteilte V an der Oberfläche der Stücke nach Entfernung des Fe oxydiert wird und in Lösung geht.

Bei Einwirkung einer Lösung mit 1 Mol HCl ist die H_2-Entwicklung an den Stücken mit weniger als 0.5 Mol V langsamer als in der Lösung der H_2SO_4. Nach 9 Tagen sind aber die Lösungen über den V-reicheren Stücken noch farblos, während sie über den Stücken, an denen sich anfänglich Wasserstoff entwickelte, schon nach 1 Tage grün oder blau werden. Nach 10 tägiger Einwirkung wurde die Lösung über den Stücken mit 0.54 u. 0.59 V ebenfalls schwach blau.

Für die Wirkung der Lösungen von HCl u. H_2SO_4 besteht also für die Reaction der Wasserstoffentwicklung eine deutliche Grenze zwischen 0.43 u. 0.54 Mol V, neben dieser Reaction verläuft die viel langsamere Oxydation des V.

Das V steht also, wie schon früher vermutet wurde, in der Spannungsreihe zwischen Cu u. H_2.

Dementsprechend wäre ein den Säuren analoges Verhalten auch für die Lösungen von Sn, Sb, Pb, Ni, Co, Tl und Cd zu erwarten. Das trifft in der Hauptsache auch zu, sofern nicht durch Nebenreaktionen oder andere Störungen die Verhältnisse geändert werden.

In den Lösungen der Salze des Co u. Ni bedecken sich Fe-Stücke anfangs mit Gasblasen, die nach 1—2 Tagen verschwinden. Hierauf tritt langsam die Fällung von $Fe(OH)_3$ ein, welche wohl als Anzeichen eines Austausches von Co oder Ni gegen Fe aufgefaßt werden darf. Die Wahrnehmung der Metallfällung selbst ist aber schon durch den Niederschlag von $Fe(OH)_3$ sehr erschwert. Daher würde die Untersuchung der Wirkung dieser Lösungen kaum zu einem Resultat führen.

Bei der Einwirkung einer gesättigten Lösung von $PbCl_2$ tritt die Pb-Fällung durch die Stücke mit 0.0, 0.11 u. 0.21 V nach 1 Minute ein, bei den V-reicheren Stücken ist es fraglich, ob sie überhaupt eintritt; denn nach 2—3 Tagen hat sich auf allen V-haltigen Stücken ein weißer Niederschlag, wahrscheinlich Bleivanadat, gebildet. Hierdurch wird die Feststellung einer Pb-Fällung sehr erschwert. Dieser weiße Niederschlag bildet sich, wenn auch in geringerer Menge, in den Lösungen von $Pb(NO_3)_2$ und $Pb(OOCCH_3)_2$,

---

1) Abeggs Handbuch der anorg. Chem. III 1. S. 689 Abschnitt: Das elektromotorische Verhalten des V, von Chilesotti.

in denen die Pb-Fällung erheblich langsamer als in den Lösungen des $PbCl_2$ vor sich geht.

In einer Lösung von $SbCl_3 + 3\,NH_4Cl$ im Liter werden in zwei Tagen die Stücke mit weniger als 0.5 Mol V grau und verlieren ihren Glanz, während die V-reicheren Stücke glänzend bleiben.

In einer gesättigten Lösung von Tl_2SO_4 entwickelt sich an den Stücken mit 0 bis einschließlich 0.43 V deutlich Gas. Diese Gasentwicklung ist allerdings am Stück mit 0.43 V schwach, aber bei leichtem Stoß des Probierglases mit diesem Stück auf den Probierglasständer ist die Ablösung einiger Gasblasen vom Stück während eines Tages zu beobachten. An den Stücken mit mehr als 0.5 V ist eine Gasentwicklung nicht zu bemerken. Im Laufe von 23 Tagen bleiben diese Stücke blank und ihre Lösungen farblos, während die V-ärmeren Stücke ihren Glanz verlieren, an einzelnen Stellen schwarz werden und ihre Lösungen bis auf die über dem Fe und dem Stück mit 0.11 V blau werden. Die Wasserstoffentwicklung wird offenbar durch gefälltes Tl veranlaßt.

In einer Lösung mit 0.2 Mol $CdSO_4$ ist nach 5 Min. die Cd-Fällung auf den Stücken mit O, 0.11 und 0.21 V deutlich. Nach 6 Tagen hat sich auf den Stücken mit weniger als 0.5 Mol V ein Niederschlag von $Fe(OH)_3$ abgeschieden, während über den V-reicheren Stücken sich nur wenige weiße Flecken gebildet haben. Nach 24 Tagen ist der Unterschied in der Färbung der Stücke mit weniger als 0.5 Mol. V durch den $Fe(OH)_3$ Niederschlag gegen die V-reicheren Stücke sehr deutlich. Die V-ärmeren Stücke geben Fe im Austausch gegen Cd ab; das Fe wird dann oxydiert und scheidet sich aus der neutralen Lösung als $Fe(OH)_3$ ab. Da die Abgabe von Fe wohl nur durch die Fällung von Cd vermittelt wird, so ist die deutlich sichtbare Bildung von $Fe(OH)_3$ ein viel empfindlicherer Indikator auf die Cd-Fällung als die direkte Beobachtung der Cd-Fällung selbst.

Die Resistenzgrenze g_1 der Fe-V-Mischkristalle gegenüber den durch die Stellung des V in der Spannungsreihe angezeigten Reaktionen, bei welchen Resistenzgrenzen zu erwarten sind, liegt zwischen 0.43 und 0.54 Mol V, oder bei 0.50 ± 0.05 Mol V.

Diese Grenze ergab sich für sechs verschiedene Agentien, nämlich für die Wirkung der Lösungen von $HgCl_2$, HCl, H_2SO_4, $SbCl_3 + 3\,NH_4Cl$, Tl_2SO_4 u. $CdSO_4$.

Die Resistenzgrenze g_1, der Fe-V-Mischkristalle ist dieselbe, die für die Wirkung einfacher Agentien bei den Cu-Au- und Ag-Au-Mischkristallen gefunden wurde. Es scheint, daß diese Grenze nur von der Art des Gitters der Mischkristallreihe bestimmt wird,

daß also außer der Atomverteilung, die in den 14-Punkt-Gittern verschiedenen Gitterparameters natürlich dieselbe ist, auch die Affinitätsvektore der aktiven Atome dieselben Richtungen haben, auch wenn ganz verschiedene Atome die Gitterpunkte besetzen.

Bei 0.5 Mol V liegt auch die Grenze für den Ferromagnetismus.

Das Zusammenfallen der Resistenzgrenze und der Grenze des Ferromagnetismus ist nicht notwendig. Bei der mit dem Auftreten des Ferromagnetismus verbundenen Umwandlung ändert sich wahrscheinlich nur der Abstand der Fe-Atome im 14-Punkt-Gitter um einen kaum merklichen Betrag. In einem unterkühlten nichtferromagnetischen Mischkristall und einem ferromagnetischen derselben Zusammensetzung sind also die Atomverteilungen dieselben und daher werden für dasselbe Agens die Resistenzgrenzen der ferromagnetischen und nicht ferromagnetischen Mischkristalle wahrscheinlich dieselben sein.

Die Grenze des Ferromagnetismus in der Mischkristallreihe, Fe-V, ist wahrscheinlich nicht darauf zurückzuführen, daß die Umwandlungskurve des γ- und α-Fe bei Zimmertemperatur zufällig die Konzentration 0.5 Mol V trifft, sondern ist wohl in früher[1]) beschriebenen Verhältnissen, die als atomistische Behinderung der Umwandlung bezeichnet wurden, begründet.

Die Resistenzgrenzen der Fe-Si-Mischkristalle.

Die zur Herstellung der Fe-Si-Reguli zur Verfügung stehenden Ausgangsmaterialien hatten folgende Zusammensetzung:

Silicium kryst. Kahlbaum		Flußeisen	
Si	98.07 %	C	0.07 %
Fe	0.95	Si	0.06
Al	0.35	Mn	0.05
Rückstand	1.27	andere Beimengungen	0.06

Bei der Berechnung des Si- und Fe-Gehaltes in den Mischkristallen, die aus den Ausgangsmaterialien durch Zusammenschmelzen hergestellt wurden, ist angenommen worden, daß in den Mischkristallen einerseits die Beimengungen von Mn und Al sich analog dem Fe als aktive Komponente und anderseits die Beimengung von C sich analog dem Si als inaktive Komponente verhalten werden. Man hat also nur die dem Al-und Mn-Gehalt aequivalente Fe-Menge und die dem C-Gehalt aequivalente Menge Si zu berechnen und diese bei der Berechnung des Si- und Fe-

1) Nachricht. der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1915 S. 35.

Gehaltes in Rechnung zu bringen. Der Gehalt an inaktiven Komponenten ist im Folgenden kurz als Si-Gehalt und der an den aktiven Komponenten kurz als Fe-Gehalt bezeichnet.

Aus dem flüssigen Eisen entwickelten sich kleine Gasblasen, welche Eisentröpfchen an die Rohrwand verspritzten. Das Silicium wurde, um Abbrand beim Eintragen in das geschmolzene Eisen möglichst zu vermeiden, zuerst für sich im Rohr aus Haldenwanger-Masse zusammengeschmolzen und dann in Stückchen in das geschmolzene Eisen eingeführt. Dicht über dem Fe-Si-Regulus hatte sich an der Rohrwand ein leichter Ring von SiO_2 gebildet. Das Gewicht der Reguli war um 0.01 kleiner als es nach dem Einwägen sein sollte. Da der Verlust an Eisen durch Verspritzen größer war als der an Silicium durch Abbrennen, so dürfte der angegebene Si-Gehalt sich vom wahren um nicht mehr als ± 0.005 unterscheiden. Während der Kristallisation der Schmelzen wurden dieselben umgerührt und ziemlich langsam gekühlt, so daß die Kristallisation mindestens 5 Minuten zu ihrer Vollendung brauchte. Da die Unterschiede der Zusammensetzung der Mischkristalle und ihren Schmelzen, mit denen sie sich im Gleichgewicht befinden, in diesem Fall nur wenige Prozente beträgt und die Diffusionsgeschwindigkeit jedenfalls sehr erheblich ist, so erhält man Mischkristalle deren Heterogenitäten ohne weiteres Tempern, wie aus ihren Resistenzgrenzen hervorgeht, nicht größer als 0.02 der Gesamtmasse sind.

a. Wirkung von Kupfersalzen.

Die Lösung von $CuSO_4$ wirkt auf die Fe-Si-Mischkristalle mit der Resistenzgrenze $g_1 = 0.241 - 0.251$ Mol Si $= \frac{1}{4}$ Mol Si. Bei der Einwirkung einer Lösung von $Cu(NO_3)_2$ wird aber diese Grenze nicht ganz erreicht und bei der einen Lösung von $CuCl_2$ scheint Cu nur von den Stücken bis 0.241 Mol Si einschließlich gefällt zu werden, während die Si-reicheren Stücke aber CuCl zur Ausscheidung bringen.

Die erste Abnormität ist darauf zurückzuführen, daß in der $Cu(NO_3)_2$-Lösung, wie auch in den anderen Nitraten, das Fe passiv wird. Mit wachsendem Gehalt an Si nimmt die Fähigkeit des Fe passiv zu werden zuerst stark ab, in der Nähe der Resistenzgrenze $g_1 = \frac{1}{4}$ Mol Si scheint sie aber sich wieder geltend zu machen (siehe die folgende Tabelle), jedenfalls werden Stücke mit 0.241 und mehr Mol Si im Laufe von 90 Tagen durch die $Cu(NO_3)_2$-Lösung nicht verändert.

Die Eisenstücke selbst, die aus der Eisenstange der oben an-

gegebenen Zusammensetzung stammten, verhielten sich recht verschieden, während ein Stück 10 Tage passiv blieb, trat auf einem anderen nach einem Tage eine schwache Cu-Fällung auf, die sich während dreier Tage nicht merklich verstärkte und dann nachts vollständig wurde.

Die zweite Abnormität hat ihren Grund in einer zweifachen Wirkungsart der $CuCl_2$-Lösung auf die Fe-Si-Mischkristalle. Auf die Fe-reicheren Mischkristalle wirkt sie unter Austausch des Fe gegen Cu ein, auf die Mischkristalle deren Si-Gehalt in der Nähe von $\frac{1}{4}$ Mol Si liegen, wirkt sie unter Bildung vou $CuCl$ ein. Die Grenze der Cu-Fällung zu bestimmen stößt auf Schwierigkeiten, weil die $CuCl$-Fällung eine geringe Cu-Fällung verdeckt. Die Fällung von $CuCl$ aus der Lösung mit 1 Mol $CuCl_2$ im Liter verläuft so langsam, daß ihre Grenze nur bei großem Zeit- und Materialaufwand bestimmt werden könnte.

Tabellen.

0.5 Mol $CuSO_4$ im Liter

Mol Si in den Mischkristallen	nach 1 Min.	nach 1 Tage	nach 6 Tagen	nach 23 Tagen		nach 90 Tagen
0.0 0.104 0.200	Stücke rot Cu-Fällung nimmt mit abnehmendem Si-Gehalt ab	Lösung farblos	Lösung farblos	Lösung farblos		
0.230		Stück an einer Stelle rot an ein. and. braun	Cu-Fällung stärker	Lösungen blau	Abscheidung von $Fe(OH)_3$ auf d. Stücke u. d. Glaswand	Abscheidung von Cu u. $Fe(OH)_3$
0.241	Stücke unverändert	an einer Stelle rot				
0.251 0.261 0.291 0.312 0.450		Stücke unverändert	Stücke unverändert		Stücke blank	Lösung unverändert Stücke blank

1.0 Mol $Cu(NO_3)_2$ im Liter

Mol Si in den Mischkristallen	nach 1 Min.	nach 1 Tage	nach 7 Tagen	nach 23 Tagen	nach 90 Tagen
0.0	unverändert	unverändert	Lösung farblos		Cu vollständig gefällt
0.104 0.200	rot	Lösung farblos			
0.230				Cu-Fällung u. $Fe(OH)_3$-Abscheidung	Cu teilweise gefällt $Fe(OH_3)_3$ abgeschieden Lösung blau
0.241 0.251 0.261 0.291 0.312 0.450	unverändert	Lösung und Stücke unverändert	unverändert	Stücke und Lösung unverändert	Stücke und Lösung unverändert

0.4 Mol $CuCl_2$ im Liter

	nach 1 Min.	nach 2 Tagen	nach 23 Tagen	nach 90 Tagen
0.0	Stücke rot	Lösung farblos Cu gefällt	Lösung. farblos Cu gefällt	Lösungen farblos an d. Stücken Cu
0.104				
0.200				
0.230	unverändert	Lösung hellblau Stücke grau mit viel Cu Cl bedeckt	Cu Cl und $Fe(OH)_3$-Fällung	
0.241				$Fe(OH_3)$ in blauer Lösung
0.251				
0.261				
0.291		unverändert	Stücke und Lösung unverändert	Lösung und Stücke unverändert
0.312				
0.450				

b. Wirkung von Silbersalzen.

Die gesättigte Lösung von Ag_2SO_4 wirkt auf die Mischkristalle mit 0.104 u. 0.200 Mol Si sehr schnell ein: schon nach einer Minute sind diese Stücke von einem dichten, weißen Pelz aus Ag. Nädelchen umgeben und bald wird das Ag vollständig gefällt. Dagegen wirken die Mischkristalle von 0.230 bis 0.33 Mol Si sehr langsam auf die Ag_2SO_4-Lösung ein. Nach zwei Tagen können auf den Stücken vereinzelte Ag-Kriställchen wahrgenommen werden, die sich beim Schütteln von den Stücken trennen und in den Lösungen als Flitter am leichtesten erkannt werden können. Nach 6 Tagen und recht erst nach 20 Tagen wird die Ag-Ausscheidung deutlicher. Da auch das Stück mit 0,450 Mol Si, welches viele Kristallite der Verbindung Fe Si und wenige gesättigte Mischkristalle mit 0.33 Mol Si enthält, die Fällung allerdings in geringerem Maße als das Stück mit 0.312 Mol Si bewirkt, so folgt, daß alle Mischkristalle von 0.00—0.33 Mol Si Ag aus der Ag_2SO_4-Lösung fällen. Eine Resistenzgrenze in dieser Mischkristallreihe gibt es also für diese Reaktion nicht, aber die Geschwindigkeit der Ag-Fällung wird durch wachsenden Si-Gehalt der Mischkristalle verkleinert und hat bei einem Si-Gehalt, der ein wenig unter 0.25 Mol Si liegt, einen geringen Wert, der sich mit weiterwachsendem Si-Gehalt nicht mehr erheblich zu ändern scheint.

Ganz anders wirkt eine Lösung von 0.5 $AgNO_3$ im Liter. Bei einer Versuchsreihe rief ein Stück mit 0.200 Mol Si, bei der anderen ein Stück mit 0.104 Mol Si eine schnelle und vollständige Fällung des Ag hervor, während alle anderen Stücke, auch die des Eisens, im Laufe von 10 Tagen keine Fällung bewirkten.

Hier ist es wieder die Gruppe NO_3, welche die Ag-Fällung hindert, und zwar ist hier die passivierende Wirkung stärker als beim $Cu(NO_3)_2$.

c. Wirkung von Quecksilbersalzen.

Die Lösungen von 0.5 $HgNO_3$ und 0.5 $Hg(NO_3)_2$ im Liter wirken auf die Fe-Si-Mischkristalle nicht ein, dagegen wirken die

Lösungen von $HgCl_2$ und $Hg(CN)_2$. Eine Lösung von 0.25 Mol $HgCl_2$ im Liter wirkt auf die Mischkristalle der ganzen Reihe ein. Wie beim $CuCl_2$ ist auch hier die Wirkung eine zweifache, indem die Fe-reicheren Mischkristalle mit mehr als $\frac{1}{4}$ Mol Si nur HgCl fällen. Die graue Hg-Fällung wurde bei den Stücken mit 0.0, 0.104, 0.200. 0.230 u. 0.241 Mol Si beobachtet; bei den Stücken mit 0.251, 0.261, 0.291, 0,312 u. 0.450 Mol Si wurde sie weder nach 2 und 4 noch nach 10 Tagen gefunden. Hier war die Fällung auf den Stücken auch dicht an der Oberfläche derselben rein weiß. Für die Hg-Fällung besteht also die Resistenzgrenze $g_1 = \frac{1}{4}$ Mol Si, während die HgCl-Fällung von den Mischkristallen der ganzen Reihe, von 0.0 bis 0.33 Mol Si, bewirkt wird.

Die Wirkung einer Lösung von $Hg(CN)_2$ beschreibt die folgende Tabelle. Die Fällungsgrenze des Hg liegt auch hier wie die aus der $HgCl_2$-Lösung bei $\frac{1}{4}$ Mol Si.

Tabelle.

Mol Si der Mischkristalle	0.1 $Hg(CN)_2$ im Liter nach 2 Tagen	nach 4 Tagen	nach 24 Tagen	nach 90 Tagen
0.0	Stück blank	ebenso		
0.104 0.200 0.230	viel dunkele Fällung	ebenso	ebenso	reichl. schwarze Fällung
0.241	Trübung	Trüb. stärker	Lösung trübe, auf dem Stück graue Flecke	Lös. trübe auf d. Stück braune u. graue Flecke
0.251 0.261 0.291 0.312 0.450	Lösung klar Stücke blank	ebenso	Lösungen klar Stücke blank	Lösungen klar Stücke blank

d. Wirkung einer Lösung von $AuCl_3$ (2 gr Au in 100 ccm).

Die Stücke mit 0.0, 0.104 u. 0.200 Mol Si bedecken sich in der Lösung während einer Minute mit einem dichten, braunen Pelz und nach 12 Stunden sind die Lösungen farblos. Die Stücke mit 0.230 u. 0.241 Mol Si zeigen nach einem Tage an einigen Stellen Au-Fällung, die mit der Zeit sich auffallend langsam vermehrt, während die Stücke mit 0.251, 0.261, 0.291 und 0.312 Mol Si nach 1, 10 und 30 Tagen unverändert in den klaren gelben Lösungen bleiben. Bei Wiederholung der Versuche kam es vor, daß einerseits einzelne Stücke mit 0.251 u. 0.261 Mol Si die Au-Fällung bewirkten, anderseits Stücke mit 0.230 und 0.241 Mol. Si sehr wenig Au fällten. Es bestehn also unter den Stücken ein und desselben Regulus Konzentrationsunterschiede, die bis zu 0.02 Mol Si betragen.

e. Fällung von Blei, Antimon und Zinn.

Ganz ähnlich der Wirkung der $AuCl_3$-Lösung ist die der Lösungen von $PbCl_2$ (gesättigt), der von 0.5 $SbCl_3 + 3\ NH_4Cl$ im Liter und der von 1 $SnCl_2$ im Liter. In diesen Lösungen werden die Stücke 0.0, 0.104, 0.200, 0.230 u. 0.241 Mol Si mit einer grauen Fällung bedeckt, während die Stücke mit 0.251 und mehr Mol Si blank bleiben. Besonders deutlich unterscheiden sich die Stücke mit der blaugrauen Pb-Fällung von den graugelben, unveränderten Stücken. Bei der Sb und Sn-Fällung kann man dem äußeren Ansehen der Stücke nach in Zweifel sein, ob die Veränderung der Stücke durch eine Fällung oder eine Korrosion der Stücke verursacht wird. Auch bei diesen Fällungen kam es vor, daß einzelne Stücke mit 0.251 und 0.261 Mol Si eine schwache Metallfällung bewirkten, doch der größte Teil dieser Stücke vermag auch im Laufe von 25 Tagen keine merklichen Mengen von Pb, Sb oder Sn zu fällen. Die Fällungsgrenze dieser Metalle reicht also wie die des Au bis zu $\frac{1}{4}$ Mol Si.

f. Aus den Lösungen von $PdCl_2$ (1 gr Pd in 100 ccm) und 2 NaCl, $PtCl_4 + x\,NaCl$ (1 gr Pt in 100 ccm) wird durch die Mischkristalle mit 0.0, 0.104 und 0.200 Mol Si das Pd und Pt im Laufe eines Tages vollständig gefällt, während die Färbung dieser Lösungen über den Si-reicheren Mischkristallen sich auch nach drei Tagen nicht merklich geändert hat. Nach sechs Tagen sind die Lösungen über den Mischkristallen mit 0.230 Mol Si merklich heller geworden, aber auch nach 25 Tagen sind die Lösungen über den Stücken mit 0.230 und 0.241 Mol Si, wie über den Si-reicheren Stücken noch lange nicht entfärbt. Ein wenig Pd schied sich aus den Lösungen über allen Stücken als Spiegel auf den Wänden der Probiergläser ab. Wenn es sich auf den Stücken mit 0.230 und 0.241 Mol Si ebenfalls in dieser Form ausscheidet, so würden dadurch die Stücke vor weiterem Angriff geschützt werden können. In den Lösungen des Pt trat eine solche Abscheidung nicht ein. Die Fällungsgrenze für diese Lösungen ist durch diese Versuche nicht festgestellt worden.

g. Die Wirkung von Säuren.

Die Lösungen von 1 Mol H_2SO_4 und 1 Mol HCl pro Liter wirken anfangs auf die Stücke bis 0.312 Mol Si einschließlich unter H_2-Entwicklung, die mit zunehmendem Si-Gehalt sich abschwächt. Nur am Stück mit 0.450 Mol Si ist auch anfangs keine H_2-Entwicklung bemerkbar, obwohl es wenn auch nur 30% des gesättigten Mischkristalls mit 0.33 Mol Si enthält. Offenbar ist die gebildete H_2-Menge hier so gering, daß sie ohne Blasenbildung abdiffundieren kann.

Nach 10 Tagen war die H_2-Entwicklung an den Stücken mit

0.104 bis 0.251 Mol Si noch im Gange, an den Stücken mit 0.261, 0,291 u. 0.312 Mol Si hatte sie aufgehört. In den Lösungen der Stücke, an denen die H_2-Entwicklung 10 Tage gedauert hatte, waren Flocken von Kieselsäurehydrat vorhanden, deren Menge mit zunehmendem Si-Gehalt von 0.200 Mol Si an deutlich abnahm.

Anders wirkt eine Lösung von 2 Mol HNO_3 im Liter. Anfangs war eine mit zunehmendem Si-Gehalt abnehmende Gasentwicklung in den Stücken bis 0.251 Mol Si einschließlich zu bemerken. Nach 10 Tagen hatte die Gasentwicklung an allen Stücken aufgehört, die Lösungen über den Stücken 0.0, 0.104 u. 0.200 Mol Si waren braun gefärbt, enthielten aber wie die folgenden Lösungen noch freie Säure. Die Lösungen über den Stücken von 0.230 bis 0.450 Mol Si waren farblos und die Stücke anscheinend unverändert; hier war die Passivierung des Fe schon nach Lösung sehr geringer Fe-Mengen eingetreten. Die Lösungen von H_2SO_4 und HCl wirken anfangs auf alle Glieder der Mischkristallreihe von 0—0.33 Mol Si, dann hört mit der Zeit die H_2-Entwicklung um so früher auf, je reicher der Mischkristall an Si ist, weil sich eine schützende Haut von Kieselsäurehydrat bildet. Die Wirkung der Lösung von HNO_3 hört ähnlich mit der Zeit um so früher auf, je reicher der Mischkristall an Si ist. Mit abnehmendem Fe-Gehalt in den Mischkristallen wächst also die Fähigkeit des Eisens, passiv zu werden.

Gegenüber der Wirkung von Säuren ist also die ganze Mischkristallreihe des Fe-Si nicht resistent, wie die Gold reicheren Mischkristalle der Cu-Au- oder Ag-Au-Reihe, die wegen ihres molekularen Aufbaues und der Richtung der Affinitätsvectore der Cu-Atome oder der Ag-Atome resistent sind. Bei den Si-reicheren Fe-Si-Mischkristallen tritt aber doch nach kürzerer oder längerer Zeit eine hohe Resistenz Säuren gegenüber auf, nämlich infolge von Bildung schützender Häute von Kieselsäurehydrat oder bei der Wirkung von Salpetersäure infolge der Passivierung des Eisens.

h. Die Wirkung von Oxydationsmitteln.

Bei der Einwirkung einer Lösung von $0.5\,K_2Cr_2O_7 + 1\,H_2SO_4$ und einer alkoholischen Pikrinsäure-Lösung waren die Lösungen über den Stücken mit 0.0, 0.104 u. 0.200 Mol Si nach einem Tage dunkelgrün geworden und auch die Lösung über dem Stück mit 0.231 Mol Si war deutlich dunkler geworden. Nach 20 Tagen war die Reduktion in den Lösungen der ersten Gruppe beendigt und die Lösungen über den Stücken mit 0.230 Mol dunkler geworden, aber die Lösungen über den Stücken mit 0.241 und mehr Mol Si hatten ihre ursprüngliche orange oder gelbe Farbe unverändert behalten und die

betreffenden Stücke selbst hatten sich auch nicht verändert. Auch nach 90 Tagen waren die Lösungen über den Stücken mit 0.241 und 0.251 Mol Si kaum dunkler als über den Si-reicheren Stücken.

Eine Lösung von 0.1 Mol $KMnO_4 + 1\ H_2SO_4$ war in einem Tage durch Stücke mit 0.0, 0.104 u. 0.200 Mol Si entfärbt worden. Über dem Stück mit 0.230 Mol Si war die Lösung heller geworden, währendsie über den Stücken mit 0.241 und mehr Mol Si ihre ursprüngliche Färbung beibehalten hatte. Auch nach 20 Tagen war eine Veränderung nicht eingetreten, es sei denn, daß die Lösung über dem Stück mit 0.230 Mol Si noch heller geworden war.

Eine gesättigte Lösung von $(NH_4)_2MoO_4$ wird in 1 Stunde über den Stücken mit 0.104 blau, mit 0.200 grün, mit 0.230 hellgrün und mit 0.241 Mol Si kaum grünlich. Nach 20 Tagen befand sich in den Lösungen der beiden ersten Stücke ein brauner Niederschlag, die Lösungen der beiden anderen Stücke waren blau und sogar die Lösung des Stückes mit 0.251 Mol Si war schwach grünlich geworden, während die Lösung über den Si-reicheren Stücken von 0.261 Mol Si an farblos war und sich auch das Aussehen der Stücke nicht geändert hatte.

Die Wirkungslosigkeit der H_2SO_4-haltigen Lösungen der Chromsäure und Uebermangansäure auf die Stücke mit mehr als 0.230 Mol Si ist im Vergleich mit der Wirkung der H_2SO_4-Lösungen nicht zu erwarten. Würde die Chromsäure und die Uebermangansäure nur den bei der H_2SO_4-Wirkung sich entwickelnden H_2 oxydieren, so sollten die Mischkristalle der ganzen Reihe die Chromsäure und Uebermangansäure reduzieren. Da das aber nicht der Fall ist, so liegt eine Behinderung der H_2-Entwicklung vor, die auf eine Passivierung des Eisens geschoben werden kann. Hiermit steht offenbar die Tatsache im Zusammenhang, daß die Lösungen der Chrom- und Uebermangansäure nicht bis zur Grenze $\frac{1}{4}$ Mol Si wirken.

i. Die Wirkung einer Lösung von $FeCl_3$.

Eine Lösung mit $\frac{1}{3}$ Mol $FeCl_3$ im Liter wird in 2 Tagen durch die Stücke mit 0.0 bis 0.241 Mol Si einschließlich entfärbt. Über diesen Lösungen befindet sich ein wenig Schaum mit Kieselsäurehydrat vermengt. Die Lösungen über den anderen Stücken haben sowohl nach 2 als auch nach 23 Tagen ihre gelbe Farbe behalten und die Stücke selbst sind nicht verändert worden. Nach 90 Tagen ist auch die Lösung über dem Stück mit 0.251 Si farblos geworden und das Stück hat sich dunkel gefärbt.

k. Die Wirkung einer Jod-Lösung.

Eine Lösung von J_2 in 0.5 KJ-Lösung mit einem J_2-Gehalt, der die Lösung in einer Schichtdicke von 1 cm Dicke noch durch-

sichtig erscheinen läßt, wird von den Stücken von 0.0 bis 0.230 Mol Si einschließlich in zwei Tagen entfärbt. Die Lösung über dem Stück mit 0.241 Mol Si wird ein wenig heller; nach 23 und 90 Tagen hat sich in dieser Lösung ein Niederschlag von $Fe(OH)_3$ gebildet. Die Lösungen über den Stücken mit 0.251 und mehr Mol Si sind in 23 Tagen nicht verändert worden. Die Resistenzgrenze liegt auch hier bei $\frac{1}{4}$ Mol Si.

Die 24 Agentien, deren Wirkung auf die Fe-Si-Mischkristalle beschrieben wurde, lassen sich in vier Gruppen ordnen.

1. 13 Agentien wirken mit der Resistenzgrenze $g_1 = \frac{1}{4}$ Mol Si, dieselben sind: die Lösungen von $Cu\,SO_4$, $Hg\,Cl_2$ (Metallfällung), $Hg(CN)_2$, $Au\,Cl_3$, $Pb\,Cl_2$, $Sb\,Cl_2$, $Sn\,Cl_2$, $Fe\,Cl_3$, J_2 und $(NH_4)_2\,Mo\,O_4$. Die Lösungen von Chromsäure, Uebermangansäure und Pikrinsäure wirken nicht ganz bis zu dieser Resistenzgrenze.

2. Die Lösungen von HCl, $H_2\,SO_4$, $Ag_2\,SO_4$ und $Hg\,Cl_2$ (Cl-Wirkung) wirken auf die Mischkristalle der ganzen Reihe von 0—0.33 Mol Si.

3. Die Agentien mit der Gruppe NO_3: die Lösungen von $Ag\,NO_3$, $Cu\,(NO_3)_2$, $Hg\,NO_3$, $Hg\,(NO_3)_2$ und HNO_3, zeigen abnorme Wirkungen, bedingt durch die Passivierung des Fe in den Mischkristallen.

Die Resistenzgrenzen und der molekulare Aufbau der Fe-Si-Mischkristalle.

Vor allem ist die Vorfrage zu entscheiden, welches Raumgitter den Fe-Si-Mischkristallen zu Grunde liegt.

Mangan und Kupfer bilden eine lückenlose Reihe von Mischkristallen. Hieraus folgt, daß die Mn-Atome wie die Cu-Atome das kubische 14-Punkt-Gitter besetzen.

Mn und γ-Fe bilden ebenfalls eine lückenlose Reihe von Mischkristallen, woraus folgt, daß auch die Atome des γ-Fe das kubische 14-Punkt-Gitter besetzen, und daß den γ-Fe-Si-Mischkristallen ebenfalls dieses Gitter zu Grunde liegt.

Bei Temperaturen unter 760° bis 720° werden die γ-Fe-Si-Mischkristalle ferromagnetisch; sie gehen hierbei in den α-Zustand über. Die Aenderung der magnetischen Permeabilität ist die einzige Eigenschaftsänderung, welche bei dem Uebergang aus dem γ- in den α-Zustand nachgewiesen werden konnte; weder thermische Effekte auf den Abkühlungskurven noch Aenderungen der Konzentration konnten beim Auftreten des Ferromagnetismus in den Mischkristallen mit mehr als 1 % Si nachgewiesen werden. Daher darf man vermuten, daß das Gitter der ferromagnetischen α-Fe-

Si-Mischkristalle sich von dem der γ-Fe-Si-Mischkristalle nicht wesentlich unterscheidet, daß es sich also auch hier um ein 14-Punkt-Gitter handelt, welches sich von dem der γ-Fe-Si-Mischkristalle nur durch eine sehr geringe Differenz in den Abständen der Gitterpunkte unterscheidet. Die fast gleichen Gitter der α- und γ-Fe-Kristalle würden von isomeren Fe-Atomen besetzt werden.

Das Zustandsdiagramm des Fe-Si[1]) läßt hinsichtlich der beiden Komponenten der Fe-Si-Mischkristallreihe zwei Möglichkeiten zu. Entweder treffen sich die Kurven des Anfangs und des Endes der Kristallisation, die Kurven a und e Fig. 1 und 2, in einem Punkte

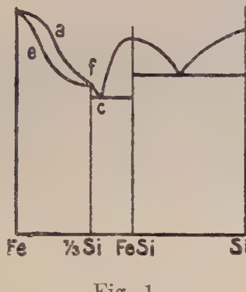


Fig. 1

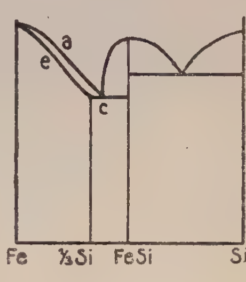


Fig 2

f oberhalb des eutektischen Punktes c, dann wäre die Molekülart Fe_2 Si als zweite Komponente der Mischkristallreihe zu betrachten; der Punkt f liegt jedenfalls, wenn er existiert, sehr nahe beim Si-Gehalt von 0.33 Mol Si. Oder die beiden Kurven a und e schneiden die eutektische Horizontale, dann wäre die Annahme der Molekülart Fe_2 Si als zweite Komponente der Mischkristallreihe nicht notwendig, als solche könnte dann die sich auch sonst kristallbildend betätigende Molekülart Fe Si angesprochen werden.

Die Frage nach der Existenz und Lage des Punktes f auf Grund der thermischen Analyse zu entscheiden, stößt auf Schwierigkeiten, weil die Konzentrationsdifferenz der Punkte f und c, wenn der Punkt f existiert, kaum größer als 0.02 Mol Si oder etwa 1 Gewichtsproz. Si sein kann. Daher wäre es recht aussichtslos mittelst der thermischen Analyse die Entscheidung der Frage zu versuchen.

Auf Grund der Resistenzgrenzen kann man die Entscheidung dieser Frage versuchen. Dem Mischkristall mit $\frac{1}{4}$ Mol Si könnten folgende Arten des Aufbaues zukommen:

1. Auf 1 Atom Si könnten 3 gleichartige Atome Fe kommen,

1) Zeitschr. f. anorg. Chemie 47. 163 1905 u. Lehrbuch d. Metallographie S. 264.

diese könnten freie Fe-Atome sein, oder sie könnten zu je drei mit einem Si-Atom verbunden und daher inaktiv sein.

2. Auf 1 Molekül Fe Si könnten 2 freie Fe-Atome oder auf 1 Molekül Fe_2 Si könnte 1 freies Fe-Atom kommen. Den Molekülen Fe-Si und Fe_2 Si ist Resistenz gegenüber Agentien, die auf den Mischkristall mit $\frac{1}{4}$ Mol Si nicht wirken, zuzuschreiben.

Den beiden unter 1) genannten Fällen entspricht für den Si-Gehalt $\frac{1}{4}$ Mol Si eine bestimmte Atomverteilung im Gitter, nämlich die für $p = \frac{2}{8}$, bei der auf abwechselnden Würfelebenen abwechselnde Gerade parallel den Würfelkanten nur mit Si-Atomen besetzt sind[1]). Jede dieser Geraden wird von drei Geraden begleitet, die nur mit Fe-Atomen besetzt sind.

Wenn bei dieser Atomverteilung die Fe-Atome freie Fe-Atome wären, so könnte der Mischkristall mit $\frac{1}{4}$ Mol Si einfachen Agentien gegenüber in Analogie mit der entsprechenden Resistenzgrenze der Cu-Au- oder Ag-Au-Mischkristalle nicht resistent sein: die Resistenzgrenze der Fe-Si-Mischkristalle wäre bei $p = \frac{1}{2}$ Mol Si zu erwarten.

Wenn andererseits alle Fe-Atome an die Si-Atome gebunden wären, so müßte die Resistenzgrenze g_1 nicht bei $\frac{1}{4}$ Mol Si sondern in Analogie mit der der Mischkristalle des Au bei erheblich kleinerem Si-Gehalt, nämlich bei $\frac{1}{8}$ Mol Si liegen.

Die Annahme der Molekülart Fe_2 Si in den Fe-Si-Mischkristallen würde im Mischkristall mit $\frac{1}{4}$ Mol Si der Atomgruppierung $\frac{1}{4}$ Mol Si, $\frac{2}{4}$ Mol gebundenes Fe und $\frac{1}{4}$ Mol freies Fe entsprechen, der Molenbruch der inaktiven Atome würde also $p = \frac{3}{4}$ sein und ebenfalls nicht der in Analogie mit den Mischkristallen des Au zu erwartenden Resistenzgrenze $g_1 = \frac{1}{2}$ Mol aktiver Atome entsprechen.

Dagegen würde die Annahme der Molekülart Fe Si in den Fe-Si-Mischkristallen zur gefundenen Resistenzgrenze $g_1 = \frac{1}{4}$ Mol Si führen. Wenn im Mischkristall mit $\frac{1}{4}$ Mol Si $\frac{1}{4}$ der Atome Si-Atome, $\frac{1}{4}$ der Atome an Si gebundene Fe-Atome und $\frac{2}{4}$ freie Fe-Atome sind, so ist die Hälfte der Atome aktiv, die andere inaktiv. Die freien Fe-Atome können die Punkte des Gitters der aktiven Atome für $p = \frac{4}{8}$ besetzen, und die Analogie mit den Mischkristallen des Au würde bestehen. Es ist aber fraglich, ob die Si-Atome und die des gebundenen Fe bei dieser Vorschrift so verteilt werden können, daß ihre Verteilung der Symmetrie des Gitters entspricht. Mir ist es nicht gelungen eine solche Verteilung zu finden. Durch Untersuchung mit Röntgenlicht könnte die Frage

---

1) Nachrichten d. Königl. Ges. d. Wiss. Göttingen 1916 S. 253.

nach der Verteilung der Atome im Mischkristall mit $\frac{1}{4}$ Mol Si entschieden werden und entsprechend den diesbezüglichen Resultaten hätte man sich speziellere Vorstellungen über die Gründe der Resistenzgrenze zu bilden.

In einer Beziehung besteht zwischen den Resistenzgrenzen der Mischkristalle des Cu und Ag einerseits und der des Fe anderseits keine Analogie. In folgender Tabelle sind die Resistenzgrenzen der Agentien, deren Wirkung für mindestens zwei Mischkristallreihen untersucht wurde, zusammengestellt.

Resistenzgrenzen in Mol der inaktiven Komponente.

	Fe-Fe Si	Fe-V	Cu-Au	Ag-Au
$Hg\,Cl_2$ Metallfällung	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$Hg\,(CN)_2$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$Fe\,Cl_3$	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$
Pikrinsäure	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$	
Uebermangansäure	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	

Bei den Mischkristallen des Fe findet sich auch für andere Agentien immer nur *eine* Resistenzgrenze $g_1 = \frac{1}{2}$, bei den Mischkristallen des Cu und Ag mit Au aber mehrere, für die aufgeführten Agentien die Grenzen $g_1 = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$.

Der Grund dieses Unterschiedes liegt in der verschiedenen Wertigkeit der Fe-Atome einerseits und der Cu- und Ag-Atome andererseits. Auf eine nur mit Fe-Atomen besetzte Gittergerade können Moleküle, die zu ihrer Wirkung eine und zwei Valenzen gebrauchen, wirken, während auf eine nur mit Cu- oder Ag-Atomen besetzte Gittergerade nur *eine* Valenz betätigende Moleküle wirken können. Diejenigen Moleküle, welche zu ihrer Wirkung zwei Valenzen betätigen müssen, brauchen hierzu zwei benachbarte nur mit aktiven Atomen besetzte Gittergerade. Die Konzentrationen der Mischkristalle, bei denen einzelne Gittergerade, die nur mit aktiven Atomen besetzt sind, und die, bei denen zwei benachbarte, nur mit aktiven Atomen besetzte Gittergerade auftreten, sind aber verschieden.

Erst für die Wirkung eines dreiwertigen Agens, das gleichzeitig mit allen drei Valenzen wirken muß, ist für die Mischkristalle mit zweiwertigen aktiven Atomen, wie die Mischkristalle des Fe, eine Verschiebung der Resistenzgrenze zu kleinerem Gehalt der inaktiven Komponente zu erwarten.

Über die Konstitution von Graphit und amorpher Kohle.

Von

P. Debye und P. Scherrer.

Vorgelegt von P. Debye in der Sitzung vom 23. Dezember 1916.

Vor Jahresfrist konnten wir an dieser Stelle [1]) Bericht erstatten über Versuche, welche angeregt durch theoretische Überlegungen, die ebenfalls in den Göttinger Nachrichten Aufnahme fanden [2]), zu einer Methode der Ultramikroskopie des Molekülinnern führten und darüber hinaus ein messendes Eindringen in das Atom selbst in den Bereich der experimentellen Möglichkeit rückten. Die zur Zeit herrschenden äußeren Umstände haben bis jetzt eine gründliche experimentelle Bearbeitung des letztgenannten Punktes verhindert, dagegen ist nunmehr eine weitere die Atomanordnung im Molekül betreffende, in Angriff genommene Frage endgültig erledigt worden. Sie bezog sich auf die Konstitution der verschiedenen Kohlenstoffmodifikationen. Dabei gingen wir aus von der nunmehr vollends bestätigten Erwartung, daß den erstrebten Aufschlüssen über die Bauart der Selbstbindung eines chemischen Elementes, welches die Grundlage der ganzen organischen Chemie bildet, ein weitreichender Anwendungsbereich offen stehen würde.

Über unsre diesbezüglichen Untersuchungen soll im folgenden berichtet werden und zwar in der Weise, daß an dieser Stelle nur Resultate mitgeteilt werden. Belege, sowie ausführliche Angaben über ihre Verwertung hoffen wir in den Ann. d. Phys. baldigst folgen lassen zu können.

1) Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen 4. Dez. und 18. Dez. 1915.

2) Ebenda 27. Febr. 1915.

§ 1. Graphit.

a) Einige Literaturangaben.

Daß Graphit ebenso wie Diamant krystallinisch ist, ist bekannt. Über das Krystallsystem und die demselben zugehörigen Zahlenwerte der bestimmenden Parameter liegen indessen von krystallographischer sowie physikalischer Seite nur einander widersprechende Angaben vor.

Nach Kenngott[1]) krystallisiert Graphit trigonal (drei gleiche Axen unter gleichen Winkeln gegeneinander geneigt) mit einem Winkel $\alpha = 85^{0}\,6'$; Nordenskjöld[2]) dagegen schließt auf das monokline System mit dem Axenverhältnis $a:b:c = 0{,}7069:1:0{,}5089$ und dem Winkel $\beta = 88^{0}\,14'$, H. Sjögren[3]) andererseits hält Graphit für hexagonal. Die Angabe von Kenngott hat am meisten Beachtung gefunden und ist z. B. in der chemischen Krystallographie von Groth[4]) übernommen. In neuerer Zeit hat P. P. Ewald[5]) versucht die v. Lauesche Methode der Krystallbestimmung dienstbar zu machen. Er benutzte ein ihm von Prof. H. du Bois zur Verfügung gestelltes ausgesuchtes Graphitkryställchen von $2 \times 2\,\mathrm{mm}^2$ Querschnitt und 0,1 mm Dicke und schließt aus seiner Interferenzaufnahme auf das hexagonale System mit einem Axenverhältnis $c:a = 1{,}63$. Herr Prof. Jaeger, in dessen Besitz sich ein Abdruck des Ewaldschen Photogramms befindet, schreibt uns dagegen, daß Graphit nach der Ewaldschen Aufnahme nicht hexagonal sondern trigonal sei.

Alle diese einander widersprechenden Angaben wurden erreicht mittels Methoden, welche die Verfügung über einen wohl ausgebildeten Graphitkrystall von genügender Größe zur Voraussetzung haben. Hierin liegt die große Schwierigkeit, welche diesen Bestimmungen anhaftet, denn Stücke, welche ihrem äußeren Aussehen nach als gute bezeichnet werden können, kommen nur selten vor.

b) Die Berechnung von Interferenzaufnahmen nach unserer Methode.

Schon für die krystallographische Bestimmung zeigt sich hier unsre Methode den anderen überlegen, da die Substanz nur in

1) Ber. d. Akad. Wien 13, S. 469, 1854.
2) Pogg. Ann. 96, S. 110, 1855.
3) Öfr. Akad. Stockholm 41, Nr. 4, S. 29, 1884.
4) P. Groth, Chemische Krystallographie, Leipzig 1906, Bd. 1, S. 13.
5) Sitzungsber, der K. B. Akad. d. Wiss. 1914, S. 325.

Pulverform ohne äußerlich erkennbare Krystalleigenschaften zur Verwendung kommt[1]).

Tatsächlich lieferten kleine aus Graphitpulver gepreßte Stäbchen von etwa 1 mm Durchmesser bei Bestrahlung mit monochromatischer Röntgenstrahlung ohne weiteres die für die krystallinische Struktur charakteristischen scharfen Linien. Sie erstreckten sich über den ganzen Bereich von 0° bis 180°.

Zunächst überzeugten wir uns davon, daß Graphitsorten verschiedener Herkunft dieselben Interferenzen ergeben, dann galt es aus der Lage der Linien auf das Krystallsystem zu schließen.

Dem hierbei zu befolgenden Verfahren liegt der folgende allgemeine Satz zugrunde. Sind h_1, h_2, h_3 ganze Zahlen (die krystallographischen Indices der „reflektierenden Ebene") und ist ϑ der Winkel unter dem eine Interferenzlinie auftritt, dann ist bei beliebigem Krystallsystem $\sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ stets eine quadratische Funktion der drei eben genannten ganzen Zahlen, sodaß

$$(1) \quad 4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = k_{11} h_1^2 + k_{22} h_2^2 + k_{33} h_3^2 + 2 k_{23} h_2 h_3 + 2 k_{31} h_3 h_1 + 2 k_{12} h_1 h_2.$$

Die in beliebiger Menge vorhandene Zahl von Interferenzlinien muß sich also auf alle Fälle mittels (1) unter Heranziehung von im allgemeinen sechs Koëffizienten $k_{11} \ldots k_{12}$ ihrer Lage nach darstellen lassen. Diese sechs Koëffizienten charakterisieren das Krystallsystem vollkommen und zwar gelten die folgenden Beziehungen.

Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die drei Vektoren, welche den drei Kanten des Elementarparallelepipeds der Lage und Größe nach gleich sind, außerdem sei λ die benutzte Wellenlänge. Die Rechenvorschrift lautet dann:

Man setze abkürzend

$$(2) \qquad \mathsf{K} = k_{11} k_{22} k_{33} - k_{11} k_{23}^2 - k_{22} k_{31}^2 - k_{33} k_{12}^2 + 2 k_{23} k_{31} k_{12},$$

dann ist

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{a^2}{\lambda^2} &= \frac{k_{22} k_{33} - k_{23}^2}{\mathsf{K}}, & \frac{bc}{\lambda^2} \cos(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) &= \frac{k_{21} k_{31} - k_{23} k_{11}}{\mathsf{K}}, \\ \frac{b^2}{\lambda^2} &= \frac{k_{33} k_{11} - k_{31}^2}{\mathsf{K}}, & \frac{ca}{\lambda^2} \cos(\mathfrak{c}, \mathfrak{a}) &= \frac{k_{32} k_{12} - k_{31} k_{22}}{\mathsf{K}}, \\ \frac{c^2}{\lambda^2} &= \frac{k_{11} k_{22} - k_{12}^2}{\mathsf{K}}, & \frac{ab}{\lambda^2} \cos(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) &= \frac{k_{13} k_{23} - k_{12} k_{33}}{\mathsf{K}}. \end{aligned} \right.$$

---

1) Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen 4. Dez. 1915, Phys. Ztschr. **17**, 277, 1916.

c) Das Krystallsystem von Graphit.

Aus einigen Aufnahmen mit einer größeren Kamera (vom Radius 6,5 cm) wurden die fünf stärksten Linien herausgegriffen und die zugehörigen Winkel ϑ gemessen. Dann zeigte sich, daß sich $\sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ darstellen ließ durch die quadratische Funktion

$$(4) \quad \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = 0{,}03724\,(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) - 0{,}02001\,(h_2 h_3 + h_3 h_1 + h_1 h_2).$$

Die in dieser Weise erreichte Genauigkeit erhellt aus folgender Tabelle:

$\sin \frac{\vartheta}{2}$ beobachtet	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ berechnet	Differenz	Indices der reflekt. Ebene
0,2265	0,2273	− 0,0008	1 1 1
0,3617	0,3629	− 0,0012	$\bar{1}$ 1 1
0,4550	0,4547	− 0,0003	2 2 2
0,6141	0,6148	+ 0,0007	0 $\bar{2}$ 2
0,6545	0,6555	+ 0,0010	$\bar{1}$ 1 3

Die in (4) angegebene Form ist charakteristisch für ein rhomboëdrisches Gitter, für dessen Kantenlänge und Winkel man nach (3) die Werte erhält

$$a = b = c = 4{,}48 \cdot 10^{-8}\ \text{cm},$$
$$\alpha = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{c}, \mathfrak{a}) = 68^\circ\, 26',$$

wenn für die benutzte Wellenlänge (α-Linie der Kupfer K-Strahlung) der Wert $\lambda = 1{,}55 \cdot 10^{-8}$ cm angenommen wird.

Wir bestätigen somit die von Groth angenommene und nach Jaeger auf Grund der Ewaldschen Aufnahme zu erschließende trigonale Struktur des Graphits, finden aber den Winkel der Axen wesentlich anders als von Kenngott angegeben.

In der Tabelle sind in der letzten Zeile die Indices h_1, h_2, h_3 der jeweiligen reflektierenden Ebene angegeben, bezogen auf die Rhomboëderkanten.

Die Ebene 1 1 1 ist diejenige nach welcher der Graphit außerordentlich leicht gespalten werden kann. Die in der Natur auftretenden Plättchen haben 1 1 1 als obere und untere Begrenzungs-

ebene. Es ist hier eine Bemerkung von Bragg[1]) von Interesse, wonach er für den Abstand zweier solcher 1 1 1-Ebenen bei der nach seiner Methode beobachteten Reflexion an dieser Ebene (allerdings auf Grund einer einzigen Messung) den Wert $3{,}42 . 10^{-8}$ cm fand. Aus unsren Angaben folgt dieser Abstand zu $3{,}41 . 10^{-8}$ cm.

d) Lagerung der *C*-Atome im Graphit.

Nachdem nunmehr auch das Volumen des Elementarparallelepipeds bekannt ist, folgt aus der beobachteten Dichte des Graphits (ungefähr 2,25), daß in demselben acht *C*-Atome enthalten sind.

Die Tabelle auf der vorigen Seite, welche keine gemischten Indices enthält, legt es nahe, daß dieselben dem flächenbesetzten Gitter angehören werden. Da nun zu jedem flächenbesetzten Elementarbereich nur vier Atome gehören, muß Graphit aus zwei solchen in einander gestellten Gittern aufgebaut sein. Was noch übrig bleibt ist die Ausführung einer Untersuchung die nur darüber belehrt in welcher Form diese gegenseitige Durchdringung auftritt, eine Frage, welche nur durch Heranziehung der Intensitäten der Interferenzlinien zu entscheiden ist.

Es wurde jetzt eine Tabelle entworfen für die Werte, welche die Intensität jeder möglichen Linie zwischen 0° und 180° annehmen kann, wobei die gegenseitige Verschiebung der Gitter längs der Diagonale um den γ-fachen Wert derselben angenommen wurde und γ die Werte 0, 0,03, 0,06, . . . u.s.w. erteilt wurde.

Die Intensität selbst wurde proportional gesetzt einmal dem Quadrate des absoluten Betrages des zu γ gehörigen Strukturfaktors, andererseits wurde der Lorentzsche Intensitätsfaktor als zweites Bestimmungsstück herangezogen. (Derselbe ist einfach umgekehrt proportional der für $4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ gefundenen quadratischen Funktion.) Die Tabelle wurde verglichen mit neuen Aufnahmen, welche den ganzen Bereich von 0° bis 180° umfaßten. Dabei zeigte sich, daß man γ den Wert 0,33 zuerkennen muss.

Damit ist die Aufgabe gelöst und zwar ergibt sich für die Struktur von Graphit nun ein sehr einfaches Bild, daß man folgendermaßen beschreiben kann.

In gleich bleibenden Abständen von je $3{,}41 . 10^{-8}$ cm folgen Ebenen aufeinander, welche die *C*-Atome enthalten. In jeder dieser Ebenen bilden die *C*-Atome

---

1) W. H. Bragg a. W. L. Bragg: *X*-Rays and Crystallstructure. London 1916, S. 174.

die Eckpunkte von regulären Sechsecken (Seitenlänge $= 1{,}45 . 10^{-8}$ cm) welche die Ebene lückenlos überdecken[1]).

e) Die Anordnung der Valenzen.

In den eben genannten Ebenen gehen von jedem *C*-Atom drei gleichwertige Valenzen aus, welche dasselbe mit den nächsten *C*-Atomen koppeln. Die vierte Valenz aber ist jetzt völlig ungleichwertig geworden; sie dient dazu, abwechselnd nach oben oder nach unten zeigend, die *C*-Ebenen mit einander zu verbinden.

Aus dem verhältnismäßig großen Abstand aus dem diese vierte Valenz ihre Wirkung ausüben soll, wird man schließen, daß die Bindung der *C*-Ebenen aneinander eine lockere sein wird. Das ist auch tatsächlich der Fall. Die hervorgehobene außerordentlich leichte Spaltbarkeit des Graphits in den (1 1 1)-Ebenen bedeutet nichts anderes als die außerordentlich leichte Trennbarkeit der mit Sechserringen besetzten Ebenen von einander. Aber noch viel drastischer zeigt sich die Schwäche der vierten Valenz.

Einige Zeit lang wollte es nicht gelingen, die bei Graphit beobachteten Interferenzlinien in das notwendige System der quadratischen Form einzufügen. Insbesondere war die nunmehr als Reflexion an 1 1 1 erkannte Linie nicht einfach sondern doppelt und dabei unsymmetrisch in Bezug auf die Längsrichtung des zerstreuenden Stäbchens ausgebildet. Sie wurde aber einfach, nachdem wir das Graphitpulver ganz locker in eine feine Papierhülse einschichteten und so durchstrahlten. Besonders schön wurden die Aufnahmen, wenn das Graphitpulver einige Stunden geglüht war und nachher vorsichtig behandelt wurde. Weitere Versuche zeigten dann, daß durch geringere oder stärkere Pressung bei der Herstellung der Stäbchen die 1 1 1-Linie nach Belieben weniger oder mehr aufgespalten werden konnte.

Diese Beobachtung heißt aber nur, daß es mit verhältnismäßig kleinen mechanischen Kräften gelingt, den Abstand der *C*-Ebenen abzuändern und zwar dauernd fortbestehend, nachdem die mechanische Kraft zu wirken aufgehört hat. Bedenkt man nun noch, daß die beobachteten Abstandsänderungen mit Leichtigkeit bis auf 15 % des ursprünglichen Abstandes zu steigern waren, so sieht man, wie locker die Bindung der *C*-Ebenen untereinander ist.

---

1) In aufeinander folgenden Ebenen liegen die *C*-Atome nicht senkrecht übereinander. Von einem Eckpunkte eines Sechsecks ausgehend, findet man senkrecht darüber erst zweimal die unbesetzte Mitte eines Sechsecks, dann folgt wieder eine Ecke, u.s.w.

Auch dürfte der Umstand, daß hier eine rein mechanische Einwirkung solche erhebliche Erfolge nach sich ziehen kann, als äußerst merkwürdig angesehen werden.

§ 2. Amorphe Kohle.

a) Gibt es Kohlenstoffmoleküle?

In der bekannten Weise[1]) wurde nunmehr die amorphe Kohle mit monochromatischer Strahlung bestrahlt um auch deren Konstitution zu erkennen.

Die erste Frage, welche man sich hier vorzulegen hat ist diese:

Liegen in amorpher Kohle die C-Atome locker nebeneinander, oder existiert ein Kohlenstoffmolekül mit charakteristischen Verkettungen der C-Atome?

Die erste Aufnahme schon entschied zugunsten der letzteren Alternative; in amorpher Kohle sind die C-Atome zu Molekülen zusammengefaßt. Eine Aufnahme im Lichte der Kupferstrahlung gab nämlich ein Bild mit Maxima und Minima. Die Maxima lagen bei $\vartheta = 24^0$, $\vartheta = 43^0$, $\vartheta = 80^0$, während nach 180^0 hin eine so starke Schwärzung auftrat, daß auch in dieser Gegend noch ein viertes Maximum liegen mußte. Krystallinisch durfte man die „amorphe" Kohle nicht nennen, denn die Breite der Maxima war sehr groß, sodaß dieselben nicht vergleichbar waren mit den scharfen für Krystalle charakteristischen Interferenzen. Im Kohlenstoffmolekül können dementsprechend nur verhältnismäßig wenig Kohlenstoffatome enthalten sein.

An dieser Stelle, wo wir zunächst die Frage nach der Existenz eines Kohlenstoffmoleküls bejahend beantwortet haben, begegnen wir uns mit gelegentlich ausgesprochenen Ansichten von chemischer Seite. Van 't Hoff[2]) spricht sich auf Grund verschiedener chemischer Tatsachen dafür aus, daß das Element Kohlenstoff in Form von Molekülen auftrete und zitiert u. a. Groshanns, der durch Extrapolation der Siedepunkte einer Kohlenwasserstoffreihe von der Formel $C_{n+2}H_{2n-2}$ schließt, daß ein Körper C_3 schon bei 20^0 sieden müßte.

Es war nun die Frage zu erledigen ob das Molekül C_n etwa von den Bedingungen bei der Darstellung der amorphen Kohle abhängt. Zu diesem Zwecke wurde amorphe Kohle auf verschie-

1) Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen 18. Dez. 1915.

2) Ansichten über die organische Chemie, Braunschweig 1881, S. 23.

denen Wegen erzeugt. Wir machten Kohle

a) aus Zucker durch Schmelzen, Verkohlen und Glühen,

b) aus Acetylen (C_2H_2) durch Verbrennung,

c) aus Naphtalin ($C_{10}H_8$) durch Verbrennung,

d) aus Petroleum durch Verbrennung,

e) aus Zucker durch Behandlung mit Schwefelsäure,

f) schließlich hatte uns Herr Tammann am Anfang unsrer Untersuchungen ein Kohlepräparat zur Verfügung gestellt, daß aus Anthracit gewonnen war.

Unsre Absicht dabei war, in den Ausgangsprodukten möglichst verschiedenartig gebundene C-Ketten und Ringe zugrunde zu legen.

Alle Präparate wurden durchstrahlt. Sie gaben alle wesentlich dasselbe Bild: Die Maxima immer an derselben Stelle.

Damit ist die Existenz eines charakterisierbaren Kohlenstoffmoleküls, wie uns scheint, dargetan.

b) Der Bau des Kohlenstoffmoleküls.

Als letzte Frage kommt nun die nach der Lagerung der Atome im Molekül.

Die Graphitaufnahmen zeigen alle neben vielen Interferenzen mit verhältnismäßig kleiner Intensität, vier Linien die sehr stark hervortreten. Sie entsprechen in der Tabelle den Indices (1 1 1), ($\bar{1}$ 1 1), (0 $\bar{2}$ 2) und ($\bar{1}$ 1 3) und liegen bei

$$\vartheta = 26^\circ, \quad \vartheta = 43^\circ, \quad \vartheta = 76^\circ \quad \text{und} \quad \vartheta = 82^\circ.$$

Ein Vergleich dieser Winkel mit der angegebenen Lage der Maxima für amorphe Kohle:

$$\vartheta = 24^\circ, \quad \vartheta = 43^\circ, \quad \vartheta = 80^\circ$$

zeigt sofort eine überraschende Übereinstimmung.

Es ist bei der Breite der Maxima nicht zu verwundern, daß die Graphitlinien $\vartheta = 76^\circ$ und $\vartheta = 82^\circ$ zu einem einzigen Band in der Mittellage $\vartheta = 79^\circ$ verschmolzen sind. Auch sind Abweichungen von 2°, welche oben auftreten, durchaus zulässig.

Auf Grund dieser Tatsache kommen wir zum Schluß, daß Graphit und amorphe Kohle nicht wesentlich verschieden sind. Der einzige Unterschied ist physikalischer Natur und besteht darin, daß nur eine verschieden feine Pulverisierung desselben Krystallgitters vorliegt. Tatsächlich läßt die Breite der Kohlenstoffinterferenzen den Schluß zu, daß im Mole-

kül oftmals nur etwa 30 Atome enthalten sind, amorphe Kohle ist also Graphit in einer so feinen Verteilung, wie dieselbe durch mechanische Mittel niemals erreicht werden kann. Eine Stütze für diese Anschauung ergibt schließlich noch die Tatsache, daß es gelingt bei amorpher Kohle je nach der Herstellung zwar nicht die Lage der Maxima zu ändern, aber wohl die Breite derselben in gewissen Grenzen zu variieren. Man hat also je nach Umständen nur eine gröbere oder feinere Pulverisierung erreicht, aber der Molekülaufbau als Ganzes ist erhalten geblieben.

c) Das Charakteristische der beiden Kohlenstoffmodifikationen.

Wir sind also zu der Überzeugung gekommen, daß es nur zwei Kohlenstoffmodifikationen gibt: Diamant und Graphit.

Ersterer ist nach den Braggschen Untersuchungen ausgezeichnet durch die Reinheit mit welcher das Tetraëder, d. h. die vier völlig gleichwertigen Valenzen zum Ausdruck kommen. Letzterer dagegen zeigt das Kohlenstoffatom mit drei Hauptvalenzen in einer Ebene unter 120° gegeneinander geneigt und einer vierten nicht mehr gleichberechtigten Nebenvalenz [1]).

Auch chemisch kommt diese Tatsache klar zum Ausdruck. Während eine Oxydation von Diamant durch oxydierende Mittel wie z. B. Salpetersäure nicht gelingt, werden sowohl Graphit wie amorphe Kohle angegriffen, beide liefern Mellithsäure, die als Benzolhexacarbonsäure noch das reguläre Sechseck der Muttersubstanz im Benzolkern bewahrt hat.

Sieht man unsre Resultate von diesem Standpunkte an, dann erscheint Kohle in Diamantform als das Prototyp der aliphatischen Chemie mit dem an der Spitze der Überlegungen stehenden Kohlenstofftetraëder. Graphit und amorphe Kohle dagegen bilden die in dem Auftreten der Sechseckstruktur augenfällig gekennzeichneten einfachsten Stufen der aromatischen Chemie, welche den Benzolkern als Hauptmerkmal führt.

1) Wie stark die vierte Valenz zurücktreten kann, zeigt der Fall des Triphenylmethyls $C(C_6H_5)_3$, in welchem von chemischer Seite der Kohlenstoff als dreiwertig bezeichnet wird. Daß die vierte Valenz sich auch hier betätigen kann, zeigt z. B. das Molekül $(C_6H_5)_3 \equiv C-C \equiv (C_6H_5)_3$.

Göttingen, Physik. Institut, 23. Dezember 1916.

Nochmals die allgemeinen Integrale der klassischen Mechanik.

Von

F. Engel in Gießen.

(Aus einem Briefe an Herrn F. Klein.)

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 17. März 1917.

Sie wünschen festgestellt zu sehen, was es im Sinne der Lieschen Theorie bedeutet, daß die Differentialgleichungen des gewöhnlichen n-Körperproblems außer der bekannten zehngliedrigen Gruppe auch noch die eingliedrige:

$$(1) \qquad x' = \lambda^2.x, \quad y' = \lambda^2.y, \quad z' = \lambda^2.z, \quad t' = \lambda^3.t$$

gestatten.

Wende ich die in meinem ersten Briefe[1]) benutzten Bezeichnungen an, so erhalte ich aus der neuen eingliedrigen Gruppe die infinitesimale Transformation:

$$(2) \quad \delta x_i = 2x_i\,\delta\lambda, \quad \delta y_i = 2y_i\,\delta\lambda, \quad \delta z_i = 2z_i\,\delta\lambda, \quad \delta t = 3t\,\delta\lambda$$

und finde überdies:

$$(2') \qquad \delta p_i = -p_i\,\delta\lambda, \quad \delta q_i = -q_i\,\delta\lambda, \quad \delta r_i = -z_i\,\delta\lambda.$$

Es ergibt sich sofort, daß jetzt nicht mehr jede Gleichung: $X+p = \text{const.}$ invariant bleibt, sondern daß man der Konstanten einen bestimmten Wert erteilen muß. Ich setze sie gleich Null und finde, daß die Gleichung: $X+p = 0$ bei unsrer infinitesimalen Transformation invariant bleibt, wenn

$$(2'') \qquad \delta p = -2p\,\delta\lambda$$

1) Diese Nachrichten, Sitzung vom 11. November 1916.

gewählt wird; dann ergibt sich nämlich:

$$\delta(p+H) = -2(p+H)\,\delta\lambda.$$

Unsre infinitesimale Transformation hat offenbar nicht die früher betrachtete Form: (Φf), wo Φ eine Funktion der $x_i, y_i, z_i, p_i, q_i, r_i, t, p$ ist, doch entspringt sie ebenso wie die Transformationen:

$$(3)\quad \begin{cases} \delta x_i = \Phi_{p_i}\delta\lambda, & \delta y_i = \Phi_{q_i}\delta\lambda, \quad \delta z_i = \Phi_{r_i}\delta\lambda, \quad \delta t = \Phi_p\,\delta\lambda, \\ \delta p_i = -\Phi_{x_i}\delta\lambda, & \delta q_i = -\Phi_{y_i}\delta\lambda, \quad \delta r_i = -\Phi_{z_i}\delta\lambda, \quad \delta p = -\Phi_t\,\delta\lambda \end{cases}$$

aus einer infinitesimalen Berührungstransformation dadurch, daß man eine Veränderliche — die unbekannte Funktion der Gleichung $p+H=0$, die Z heißen möge — wegläßt. In der Tat, erteilt man Z den Zuwachs:

$$(3')\qquad \delta Z = \left\{\sum_i^{1\ldots n}(p_i\Phi_{p_i}+q_i\Phi_{q_i}+r_i\Phi_{r_i})+p\,\Phi_p-\Phi\right\}\delta\lambda,$$

so stellen die Gleichungen (3), (3′) eine infinitesimale Berührungstransformation dar, bei der der Pfaffsche Ausdruck:

$$D = dZ - \sum_i^{1\ldots n}(p_i\,dx_i+q_i\,dy_i+r_i\,dz_i)-p\,dt$$

den Zuwachs Null erhält, also invariant bleibt. Fügt man andrerseits zu (2), (2′), (2″) hinzu:

$$(2''')\qquad \delta Z = Z\delta\lambda,$$

so erhält man eine infinitesimale Berührungstransformation, bei der $\delta D = D.\delta\lambda$ ist, so daß D mit einem konstanten Faktor multipliziert wird.

Der Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen (3), (3′) erzeugt eine unendliche Gruppe und durch Hinzufügung der neuen infinitesimalen Transformation erhält man die größte Gruppe, in der diese Gruppe als invariante Untergruppe steckt. Dem entspricht es, daß jede infinitesimale Transformation (3), (3′), bei der die Gleichung: $p+H=0$ invariant bleibt, das von Z freie Integral $\Phi = \text{const.}$ dieser Gleichung liefert, während die neue infinitesimale Transformation ein Integral liefert, das die unbekannte Funktion Z enthält. Um das zu zeigen, muß ich aber Einiges vorausschicken.

In seiner 1877 erschienenen grundlegenden Abhandlung Math. Ann., Bd. XI: Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (zweite Abhandlung) verwertet Lie

den von uns benutzten Satz, daß jede infinitesimale Transformation (Φf) einer von z freien Gleichung $H(x, p) = \text{const.}$ das Integral: $\Phi = \text{const.}$ dieser Gleichung liefert. Er erwähnt aber merkwürdiger Weise nicht, daß dieser Satz nur ein besondrer Fall eines etwas allgemeineren Satzes ist, den er schon 1872 angedeutet hat.

In seinem „Kurzen Résumé mehrerer neuer Theorien" sagt er nämlich[1]):

„Besitzt eine Gleichung $F = 0$ p bekannte infinitesimale Berührungstransformationen, welche paarweise permutabel sind, so stellt man ohne Weiteres $p-1$ Gleichungen $\Phi_i = a_i$ auf, welche sowohl paarweise wie mit $F = 0$ in Involution liegen. Gestattet $F = 0$ drei bekannte infinitesimale Berührungstransformationen, die nicht permutabel sind, so kann im allgemeinen die Integration von $F = 0$ auf die Auffindung eines Integrabilitätsfaktors zurückgeführt werden. Man wendet hierbei das Poisson-Jacobische Theorem an".

Diese Sätze, die allerdings ohne Beweis aufgestellt werden und auf die Lie meines Wissens nirgends wieder zurückgekommen ist, beruhen letzten Endes auf einem Satze, der so ausgesprochen werden kann:

Kennt man für die partielle Differentialgleichung erster Ordnung: $F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$ zwei infinitesimale Berührungstransformationen, bei denen sie invariant bleibt, so kennt man, von gewissen Ausnahmefällen abgesehen, immer zugleich auch ein Integral $\Phi(z, x, p) = \text{const.}$ des simultanen Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen, das die charakteristischen Streifen von $F = 0$ definiert und dessen vollständige Integration die von $F = 0$ nach sich zieht.

Zum Beweise erinnere ich daran, daß die allgemeinste infinitesimale Berührungstransformation in z, x, p die Form hat[2]):

$$\delta x_i = W_{p_i}\delta t, \quad \delta p_i = -(W_{x_i} + p_i W_z)\delta t, \quad \delta z = \left(\sum_{\nu}^{1\ldots n} p_\nu W_{p_\nu} - W\right)\delta t$$
$$(i = 1, \ldots, n),$$

wo:

$$W = \sum_{\nu}^{1\ldots n} p_\nu \frac{\delta x_\nu}{\delta t} - \frac{\delta z}{\delta t},$$

1) Forhandlinger i Videnskabsselskabet i Christiania, Aar 1872, S. 25; Gesammelte Abhandlungen, Bd. III, S. 2.

2) Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. II, S. 252 f., Leipzig 1890.

die charakteristische Funktion der Transformation, ganz willkürlich ist. Das Liesche Symbol für die Transformation lautet daher:

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z},$$

wo in bekannter Weise:

$$\sum_i^{1\ldots n}\left\{W_{p_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial f}{\partial z}\right)-(W_{x_i}+p_iW_z)\frac{\partial f}{\partial p_i}\right\}=[Wf]$$

gesetzt ist.

Gestattet nun die Gleichung $F = 0$ die infinitesimale Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion V, so verschwindet der Ausdruck:

$$[VF] - V\frac{\partial F}{\partial z}$$

vermöge $F = 0$; gestattet sie noch eine zweite Transformation mit der charakteristischen Funktion W, so verschwindet auch:

$$[WF] - W\frac{\partial F}{\partial z}$$

vermöge $F = 0$. Unter den gemachten Voraussetzungen verschwindet zugleich:

$$\left[\frac{V}{W},\, F\right]$$

vermöge $F = 0$, das heißt, die Gleichung: $V:W = \text{const.}$ ist ein Integral des simultanen Systems:

$$dx_i : dp_i : dz = F_{p_i} : -(F_{x_i} + p_i F_z) : \sum_\nu^{1\ldots n} p_\nu F_{p_\nu},$$

das die charakteristischen Streifen von $F = 0$ bestimmt, oder, was auf dasselbe hinauskommt: die Gleichung $F = 0$ liegt mit jeder Gleichung $V:W = \text{const.}$ in Involution.

Dieses Verfahren zur Bildung eines Integrals versagt nur dann, wenn entweder eine der Funktionen V, W vermöge $F = 0$ verschwindet oder der Ausdruck $V:W$ vermöge $F = 0$ in eine Konstante übergeht.

Die von z freien Gleichungen:

$$F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

sind dadurch gekennzeichnet, daß sie die infinitesimale Berührungstransformation:

$$\frac{\partial f}{\partial z}$$

mit der charakteristischen Funktion -1 gestatten. Kennt man daher noch eine zweite infinitesimale Berührungstransformation, die $F(x, p) = 0$ invariant läßt und deren charakteristische Funktion $W(z, x, p)$ sich nicht vermöge $F = 0$ auf eine Konstante reduziert, so hat man sofort ein Integral: $W =$ const. von $F = 0$. Ist die charakteristische Funktion W selber von z frei, $= \Phi(x, p)$, so hat man den früher benutzten Lieschen Satz in der Form:

Bleibt die Gleichung $F(x, p) = 0$ bei der infinitesimalen Transformation:

$$(\Phi f) = \sum_i^{1\ldots n} \left(\Phi_{p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \Phi_{x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right)$$

invariant, verschwindet also (ΦF) vermöge $F = 0$, so ist $\Phi(x, p) =$ const. ein Integral von $F = 0$.

Ist die von z freie Gleichung $F(x, p) = 0$ in den p homogen, so gestattet sie die infinitesimale Transformation:

$$\sum_i^{1\ldots n} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, die infinitesimale Berührungstransformation

$$[zf] - z\frac{\partial f}{\partial z} = -\sum_i^{1\ldots n} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} - z\frac{\partial f}{\partial z}$$

mit der charakteristischen Funktion z. Die Homogeneität der Gleichung $F(x, p) = 0$ ist daher gleichbedeutend mit dem Vorhandensein des Integrals: $z =$ const.

In dem Falle, der uns beschäftigt, lautet nun das Symbol der zu der eingliedrigen Gruppe (1) gehörigen infinitesimalen Berührungstransformation (2), (2′), (2″), (2‴) so:

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} B(f) = &\sum_i^{1\ldots n} 2\left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \right) + 3t\frac{\partial f}{\partial t} + Z\frac{\partial f}{\partial z} \\ &- \sum_i^{1\ldots n} \left(p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + q_i \frac{\partial f}{\partial q_i} + r_i \frac{\partial f}{\partial r_i} \right) - 2p\frac{\partial f}{\partial p}, \end{aligned} \right.$$

ihre charakteristische Funktion wird daher:

$$2 \sum_i^{1\ldots n} (x_i p_i + y_i q_i + z_i r_i) + 3tp - Z = \Omega$$

und $\Omega =$ const. ist ein Integral von $p + H = 0$. Man hat ja, wie schon früher bemerkt:

$$B(p+H) = [\Omega, p+H] = -2(p+H),$$

so daß die Gleichung $p + H = 0$ mit jeder Gleichung: $\Omega = \text{const.}$ in Involution liegt.

Es fragt sich nun, ob die Kenntnis der infinitesimalen Transformation $B(f)$ für die Integration der Gleichung: $p + H = 0$ von Nutzen ist, ob sie also eine Integrationsvereinfachung mit sich bringt, die größer ist als sie durch die früher erwähnten zehn Integrale allein bedingt wird. Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir uns aber erst darüber Rechenschaft geben, was die Liesche Theorie über die Verwertung jener zehn Integrale lehrt. Ich knüpfe dabei zunächst an das an, was Lie in den Math. Ann., Bd. VIII, S. 283—285 über das Problem der drei Körper gesagt hat, gestalte jedoch seine Ausführungen so um, wie es unserm jetzigen Standpunkte entspricht. Lie, der nicht von der zehngliedrigen Gruppe ausging, berücksichtigt nämlich die Zeit nicht und legt daher $H = \text{const.}$ als die zu integrierende Gleichung zugrunde, er spricht deshalb nur von neun Integralen und denkt sich außerdem aus diesen auch noch die Zeit eliminiert.

Die zehn bekannten, von Z freien Integrale der Gleichung $p + H = 0$ liefern die folgenden zehn von einander unabhängigen Funktionen:

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{lll} & p & \\ S_1 = \sum p_i, & T_1 = \sum q_i, & U_1 = \sum r_i, \\ S_2 = \sum (z_i q_i - y_i r_i), & T_2 = \sum (x_i r_i - z_i p_i), & U_2 = \sum (y_i p_i - x_i q), \\ S_3 = t \sum p_i - \sum m_i x_i, & T_3 = t \sum q_i - \sum m_i y_i, & U_3 = t \sum r_i - \sum m_i z_i, \end{array}\right.$$

die alle mit der Funktion $p + H$ in Involution liegen. Diese Funk tionen bilden mit $p + H$ zusammen eine elfgliedrige Funktionengruppe[1]); es bestehen nämlich, wenn man $\sum m_i = M$ setzt, die folgenden Gleichungen:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{lll} (pS_1) = 0, & (pS_2) = 0, & (pS_3) = S_1, \\ & (S_1 T_1) = 0, & \\ (S_1 S_2) = 0, & (S_1 T_2) = U_1, & (S_1 U_2) = -T_1, \\ (S_1 S_3) = -M, & (S_1 T_3) = 0, & (S_1 U_3) = 0, \\ & (S_2 T_2) = U_2, & \\ (S_2 S_3) = 0, & (S_2 T_3) = U_3, & (S_2 U_3) = -T_3, \\ & (S_3 T_3) = 0, & \end{array}\right.$$

zu denen noch die durch zyklische Vertauschung der Buchstaben S, T, U hervorgehenden hinzukommen.

---

1) Lie, Theorie der Trfsgr., Bd. II, Kap. 8, Leipzig 1890.

Um ein möglichst großes Involutionssystem zu finden, das unsrer Funktionengruppe angehört, machen wir es uns zu Nutze, daß:

$$p + H,\ p,\ S_1,\ T_1,\ U_1$$

bereits ein fünfgliedriges Involutionssystem bilden. Da sie zusammen mit S_2, T_2, U_2 eine achtgliedrige Funktionengruppe bestimmen, suchen wir eine Funktion dieser achtgliedrigen Gruppe, die mit jenen fünf in Involution liegt, und erhalten:

$$S_1 S_2 + T_1 T_2 + U_1 U_2 = V.$$

Fragen wir endlich nach solchen Funktionen der ganzen elfgliedrigen Gruppe die mit unsern sechs Funktionen in Involution liegen, so bekommen wir nur noch eine Funktion hinzu, nämlich:

$$\sum (S_2 M + T_1 U_3 - U_1 T_3)^2 = W,$$

wo $\sum$ die zyklische Summe in Bezug auf S, T, U bezeichnet.

Demnach ist:

$$p + H,\ p,\ S_1,\ T_1,\ U_1,\ V,\ W$$

ein möglichst großes in unsrer elfgliedrigen Funktionengruppe enthaltenes Involutionssystem; wir können daher schließen, daß die Gruppe drei unabhängige ausgezeichnete Funktionen enthält und daß ihre kanonische Form vom Typus:

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ P_4,\ \ldots,\ X_7,\ P_7$$

ist. Man findet überdies leicht, daß

$$p + H,\ \ W,\ \ Mp + \tfrac{1}{2}(S_1^2 + T_1^2 + U_1^2) = \mathfrak{W}$$

drei unabhängige ausgezeichnete Funktionen sind.

Um festzustellen, was für Integrationsoperationen noch erfordert werden, berufen wir uns auf die Liesche Abhandlung Math. Ann., Bd. XI und zwar auf Theorem II, S. 476. Da die bekannten Lösungen der Gleichung $(p + H, f) = 0$ eine elfgliedrige Funktionengruppe bilden, in der außer $p + H$ noch zwei unabhängige ausgezeichnetete Funktionen auftreten, so ist $q = 1$, $s = 11$ und $m = 2$, während für n die Zahl $3n + 1$ zu setzen ist. Demnach wird $2n - q - s - m$ in unserm Falle $= 6n - 12$, so daß die Integrationsoperationen[1]):

1) Eine Integrationsoperation n ist bei Lie die Aufsuchung eines Integrals eines simultanen Systems von n gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. O. in $n + 1$ Veränderlichen.

$$6n-12,\ 6n-14,\ \ldots,\ 6,\ 4,\ 2$$

erforderlich sind, zu denen noch eine Quadratur hinzukommt[1]).

Für den Fall des Zweikörperproblems ist also nur noch eine Quadratur erforderlich, ein bekannter Satz, der hier als Folge der allgemeinen Theorie erscheint. Man kann dieses besondere Ergebnis auch aus Satz 4, S. 469 erschließen, denn es wird $n = 7$ und die elfgliedrige Funktionengruppe enthält siebengliedrige Involutionssysteme. Um die Quadratur wirklich aufzustellen, kann man sich auch auf Math. Ann., Bd. VIII, S. 245 stützen.

Bringt nun die Kenntnis der infinitesimalen Transformation $B(f)$ eine weitere Vereinfachung mit sich?

Man überzeugt sich leicht, daß das aus $B(f)$ gewonnene Integral $\Omega =$ const. durch eine Berührungstransformation, bei der die Veränderlichen $x_i, y_i, z_i, t, p_i, q_i, r_i, p$ für sich transformiert werden, auf die Form: $Z =$ const. gebracht werden kann. Eine solche Berührungstransformation ist ja zum Beispiel:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} Z' &= Z - 2\sum_i^{1\ldots n}(x_i p_i + y_i q_i + z_i r_i) - 3pt,\\ x'_i &= \lg(x_i p_i^2),\quad y'_i = \lg(y_i q_i^2),\quad z'_i = \lg(z r_i^2),\\ p'_i &= -x_i p_i,\quad q'_i = -y_i q_i,\quad r'_i = -r_i z_i,\\ t' &= \lg(t^2 p^3),\quad p' = -tp. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichung $p + H = 0$ wird dabei eine von Z' freie in den p'_i, q'_i, r'_i, p' homogene Gleichung und die zehn Integrale (5) verwandeln sich in lauter von Z' freie und in demselben Sinne homogene Integrale der neuen Gleichung.

Hieraus geht hervor, daß der Affekt der Gleichung $p + H = 0$, der durch die Kenntnis des Integrals: $\Omega =$ const. bedingt wird, von genau derselben Art ist, wie der Affekt einer von Z freien Gleichung, die in den p_i, q_i, r_i, p homogen ist. Alle Entwickelungen von Lie über solche homogene Gleichungen können sofort auf die Gleichung $p + H = 0$ übertragen werden, wenn man nur jede Funktion, die homogen von der Ordnung s ist, durch eine Funktion Φ ersetzt, die bei der infinitesimalen Transformation $B(f)$ mit dem Faktor s reproduziert wird, für die also $B(\Phi) = s.\Phi$ ist. Zugleich tritt an die Stelle des Begriffs der „homogenen Funktionengruppe"[2]) der Begriff einer r-gliedrigen Funktionengruppe $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$, die bei der infinitesimalen Transformation $B(f)$

1) Diese Quadratur, die er auf S. 475 ausdrücklich erwähnt, hat Lie in dem Theoreme als unwesentlich weggelassen.

2) Lie, Th. d. Trfsgr., Bd. II, Kap. 11.

invariant bleibt, für die also außer den für eine Funktionengruppe charakteristischen Gleichungen:

$$(\Phi_i \Phi_k) = \omega_{ik}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r) \qquad (i, k = 1, \ldots, r)$$

noch r Gleichungen von der Form:

$$B(\Phi_i) = \omega_i(\Phi_1, \ldots, \Phi_r) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

bestehen [1]).

Von einer Funktion Φ, für die $B(\Phi) = s.\Phi$ ist, sagen wir, daß sie das Gewicht s habe. Die früher erwähnten Funktionen unsrer elfgliedrigen Funktionengruppe haben dann die folgenden Gewichte:

$p+H$, p, $\mathfrak{W}$	das	Gewicht	-2,
S_1, T_1, U_1	„	„	-1,
V	„	„	0,
S_2, T_2, U_2	„	„	$+1$,
S_3, T_3, U_3, W	„	„	$+2$.

Die elfgliedrige Funktionengruppe bleibt daher bei der infinitesimalen Transformation $B(f)$ invariant und verwandelt sich bei der Berührungstransformation (7) in eine homogene Funktionengruppe. Übertragen wir die Theorie der kanonischen Form einer homogenen Funktionengruppe auf unsern Fall, so wird die kanonische Form unsrer elfgliedrigen Gruppe vom Typus:

$$P_1, P_2, P_3, X_4, P_4, \ldots, X_7, P_7$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, vom Typus:

$$X_1, X_2, P_3, X_4, P_4, \ldots, X_7, P_7,$$

unter den X Funktionen vom Gewichte Null und unter den P Funktionen vom Gewichte 1 verstanden [2]).

Wollen wir jetzt das Integrationsproblem der Gleichung $p + H = 0$ betrachten, wie es sich bei Berücksichtigung der zehn Integrale (5) und der infinitesimalen Transformation $B(f)$ gestaltet, so müssen wir von dem Satze ausgehen, den Lie in den Math. Ann., Bd. XI, S. 487 als Theorem IV aufgestellt hat. Wir

1) Wie Lie selbst schon gezeigt hat, gibt überhaupt jede infinitesimale Berührungstransformation mit einer charakteristischen Funktion von der Form $z + \varphi(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ Veranlassung zu einer solchen Verallgemeinerung der Theorie der homogenen Funktionengruppen. Vgl. Th. d. Trfsgr., Bd. II, S. 285 bis 287.

2) A. a. O. S. 287, Satz 3.

können allerdings diesen Satz nicht unmittelbar auf die Gleichung $p + H = 0$ anwenden, weil die Funktion $p + H$ nicht das Gewicht Null hat. Ersetzen wir aber die Gleichung: $p + H = 0$ durch die äquivalente:

$$\frac{p+H}{\mathfrak{W}} = 0,$$

deren linke Seite das Gewicht Null hat, und bedenken wir, daß $\mathfrak{W}$ eine ausgezeichnete Funktion der elfgliedrigen Funktionengruppe ist, so erkennen wir, daß die Funktionen (5) sämtlich Lösungen der Gleichung:

$$\left(\frac{p+H}{\mathfrak{W}}, f\right) = 0 \tag{8}$$

sind, daß also das Liesche Theorem anwendbar wird.

In unserm Falle ist $q = 1$ und die $q + m = 3$ ausgezeichneten Funktionen $p + h$, $\mathfrak{W}$, W der Funktionengruppe haben nicht alle das Gewicht Null. Die Zahl der Veränderlichen ist $6n + 2$, die Zahl der bekannten Lösungen der Gleichung ist 11, die der $2l + m = 2l + 2$ fehlenden ist also $6n + 1 - 11 = 6n - 10$, d. h. $2l = 6n - 12$. Demnach sind genau dieselben Integrationsoperationen erforderlich wie früher[1]). Die Kenntnis der infinitesimalen Transformation $B(f)$ bringt also keine weitere Vereinfachung des Integrationsproblems mit sich.

Hierauf hat schon Erik Englund in seiner Stockholmer Habilitationsschrift[2]) hingewiesen, in der er die Gruppe des Problems der n Körper verwertet, um die Reduktion der partiellen Differentialgleichung des Problems auf die kleinste Zahl von Veränderlichen durchzuführen. Auch er arbeitet übrigens nicht mit der zehngliedrigen Gruppe sondern mit einer andern Gruppe von Berührungstransformationen, die durch Elimination der Zeit entsteht und die wohl keine unmittelbare Deutung zuläßt.

---

1) Die Quadratur hat Lie auch hier unberücksichtigt gelassen.

2) Sur les méthodes d'intégration de Lie et les problèmes de la mécanique céleste. Uppsala 1916, Almquist & Wiksells Boktryckeri. Vgl. S. 17.

Zur Theorie der Turbulenz.

Von

Fritz Noether in Karlsruhe.

Vorgelegt durch Herrn C. Runge in der Sitzung am 3. Februar 1917.

§ 1. Fragestellung.

Die Behandlung des Turbulenzproblems vom Standpunkt der Stokesschen Hydromechanik setzt die Beantwortung der Frage voraus [1]):

Gibt es solche reelle Funktionen $U(x)$, definiert in dem endlichen Intervall $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq +\frac{1}{2}$, sowie reelle Konstante α, c, daß die Differentialgleichung 4ter Ordnung für $\chi(x)$:

$$(1) \qquad \frac{d^4\chi}{dx^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2\chi}{dx^2} + \alpha^4\chi = i\alpha\mathfrak{R}\left[(U-c)\left(\frac{d^2\chi}{dx^2} - \alpha^2\chi\right) - \frac{d^2U}{dx^2}\chi\right]$$

(die Bezeichnungen sind gegen die unten zitierte Stelle etwas geändert) eine Lösung besitzt, die für $x = \pm\frac{1}{2}$ mit der ersten Ableitung verschwindet?

$$(2) \qquad \chi(\pm\tfrac{1}{2}) = \chi'(\pm\tfrac{1}{2}) = 0?$$

Hierbei bedeutet $\chi(x)$ die Querverteilung der Intensität einer Welle (dargestellt durch ihre Stromfunktion) von der Wellenlänge $l = \frac{2\pi}{\alpha}$, die sich in der Längsrichtung eines Kanals mit der Geschwindigkeit c fortpflanzt. U ist die Geschwindigkeit der zu Grunde liegenden laminaren Strömung, ferner $\mathfrak{R} = \varrho\frac{h}{\mu}$ mit der Dichte ϱ, der Kanalbreite h, der Zähigkeitskonstanten μ, i die imaginäre Einheit. Handelt es sich um die Strömung zwischen relativ zu einander bewegten Wänden, so ist U eine ungerade Funktion von x, im

1) F. Noether, Jahresberichte d. d. Math. Ver. Bd. 23 (1914). p. 138.

Fall der Strömung zwischen festen Wänden eine gerade Funktion von x, die für $x = \pm \frac{1}{2}$ verschwindet.

Der einfachste Fall der obigen Gleichung (1) ist der von den Herren Sommerfeld, v. Mises und Hopf[1]) behandelte Couettesche: $U = ax$, in dem die Unlösbarkeit der Randwertaufgabe nachgewiesen wurde. Auf den Fall $U = ax^3$ wurde ich durch eine andere Fragestellung geführt[1]), doch wies auch für diesen Fall Herr Blumenthal[2]) die Unmöglichkeit der Lösung nach.

Dieser negativen Ergebnisse wegen läge die Vermutung nahe, daß ein allgemeiner Grund bestehe, der Lösungen der Randwertaufgabe ausschließt. Die Unrichtigkeit dieser Vermutung beweisen wir im Folgenden dadurch, daß wir eine Funktion U so bestimmen, daß die Randwertaufgabe lösbar wird.

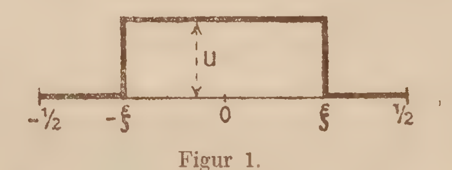
§ 2. Unstetigkeitsbedingungen.

Zur Vereinfachung behandeln wir den Fall langer Wellenlängen, setzen also $\alpha^2 = 0$, wogegen $\Re\alpha = R$ nicht zu vernachlässigen ist. Diese Näherung setzt nur voraus, daß α klein gegen $\Re U$ ist, so daß es sich, da $\Re U$ erfahrungsmäßig im Allgemeinen sehr groß ist, immer noch, an der Kanalbreite gemessen, um kurze Wellen handeln kann.

Also

$$(3) \qquad L(\chi) = \frac{d^4\chi}{dx^4} - iR\left[(U-c)\frac{d^2\chi}{dx^2} - \frac{d^2U}{dx^2}\chi\right] = 0.$$

U sei eine gerade, am Rand verschwindende Funktion von x, die Strömung erfolge also zwischen festen Wänden. Das Wesentliche der folgenden Untersuchung ist nun, daß wir U als eine unstetige Funktion wählen, die sich aus konstanten Beträgen zusammensetzt, wodurch es ermöglicht wird, die Integration allein



Figur 1.

mit Hilfe trigonometrischer Transzendenten durchzuführen. Es sei nämlich, unter u eine positive Konstante verstanden, und mit $\xi < \frac{1}{2}$ (Fig. 1):

1) S. die Zitate in der unter 1) genannten Note, sowie L. Hopf, Ann. d. Physik Bd. 44 (1914), p. 1.

2) Sitzungsberichte d. Bayr. Ak. d. Wiss. 1913, p. 563.

$$(4) \qquad \begin{aligned} U &= 0: -\tfrac{1}{2} < x < -\xi \text{ und } \xi < x < +\tfrac{1}{2}, \\ U &= u: -\xi < x < +\xi \end{aligned}$$[1].

Bekanntlich zeigt ja auch der wirklich beobachtete Strömungsverlauf nahezu konstante Geschwindigkeit im Innern des Kanals, mit einem raschen Abfall zu 0 am Rand. Die Lage der Unstetigkeitsstellen $(\xi, -\xi)$, sowie die Wellengeschwindigkeit c und die Strömungsgeschwindigkeit u bleiben verfügbar.

Außerhalb der Unstetigkeitsstellen gilt dann, mit

$$(5) \qquad \chi'' = \frac{d^2\chi}{dx^2} = v: \qquad v'' - iR(U-c)v = 0.$$

An den Unstetigkeitsstellen ist ein Grenzübergang aus einer stetigen, aber rasch veränderlichen Funktion nötig. Zunächst gilt, wenn U stetig ist, infolge von (3):

$$(3a) \qquad \chi''' - iR[(U-c)\chi' - U'\chi] = \text{const.}$$

Also an den Unstetigkeitsstellen, an denen aber χ und χ' als stetig gefordert werden soll, durch Grenzübergang:

$$(5a) \qquad \chi'''_+ - \chi'''_- = v'_+ - v'_- = iR[(U_+ - U_-)\chi' - (U'_+ - U'_-)\chi].$$

Durch Integration von (3a) über die Umgebung der Unstetigkeitsstellen und Ausführung des Grenzübergangs folgt

$$(5b) \qquad \chi''_+ - \chi''_- = v_+ - v_- = -iR(U_+ - U_-)\chi,$$

wobei die Werte von χ und χ' an den Unstetigkeitsstellen zu nehmen sind, und im vorliegenden Fall noch $U'_+ - U'_- = 0$ zu setzen ist.

Wegen der Randbedingung (2) kann gesetzt werden:

$$(6) \qquad \chi'(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{x} v\,dx; \quad \chi(x) = x\int_{-\frac{1}{2}}^{x} v\,dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{x} xv\,dx.$$

Folglich lauten die Randbedingungen, vervollständigt:

$$(7a) \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} v\,dx = 0; \qquad (7b) \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} xv\,dx = 0.$$

---

1) Die folgenden Gleichungen (5) bis (5b) und (10) bis (10b) gelten auch für den allgemeineren Fall, wo auch U' unstetig und außerhalb der Unstetigkeitsstellen konstant ist.

Da U gerade ist, kann nach den Gleichungen (5), (5a), (5b) v (und damit χ) gerade oder ungerade sein. Im ersten Fall ist (7b), im zweiten (7a) identisch erfüllt.

§ 3. Die adjungierte Aufgabe.

Einfacher als die obige Aufgabe gestaltet sich deren „adjungierte“, deren Lösbarkeit nach einem allgemeinen (auch hier speziell bewiesenen) Satz die Existenz von Lösungen der ursprünglichen Aufgabe mit bedingt.

Sei ψ die zu χ adjungierte Funktion. Durch wiederholte partielle Integration über ein Gebiet x_1, x_2, in dem U stetig ist, folgt:

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi L(\chi)\, dx = \{- iR[(U-c)\chi' - U'\chi]\psi + iR(U-c)\psi'\chi$$
$$+ \psi\chi''' - \psi'\chi'' + \psi''\chi' - \psi'''\chi\}\Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \chi M(\psi)\, dx,$$

wobei gesetzt ist:

$$M(\psi) = \psi^{IV} - iR(U-c)\psi'' + 2U'\psi'. \tag{8}$$

Indem wir diesen Ansatz auf den Fall unserer unstetigen Funktion U ausdehnen, bilden wir die Summe der Integrale

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{-\xi} + \int_{-\xi}^{+\xi} + \int_{+\xi}^{+\frac{1}{2}}$$

und erhalten

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} [\psi L(\chi) - \chi M(\psi)]\, dx + \{-\psi\chi''' + \psi'\chi'' - \psi''\chi' + \psi'''\chi$$
$$+ iR[(U-c)(\psi\chi' - \psi'\chi) - U'\psi\chi]\}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}$$
$$+ \sum_{-\xi, +\xi} \{\psi[\chi_+''' - \chi_-''' - iR((U_+ - U_-)\chi' - (U_+' - U_-')\chi)]$$
$$- \psi'[\chi_+'' - \chi_-'' + iR(U_+ - U_-)\chi]$$
$$+ \chi'[\psi_+'' - \psi_-''] - \chi[\psi_+''' - \psi_-''' - 2iR(U_+ - U_-)\psi']\} = 0. \tag{9}$$

Dies ist der Greensche Satz des Problems, der eine lineare Identität zwischen den Gleichungen der ursprünglichen Aufgabe ((2), (3), (5a), (5b)) und der adjungierten ausdrückt, wenn letztere folgendermaßen definiert wird:

$$M(\psi) = 0 \tag{10}$$

im stetigen Gebiet.

An den Unstetigkeitsstellen $-\xi$, ξ:

(10a) $$\psi'''_+ - \psi'''_- = 2iR(U_+ - U_-)\psi',$$
$$\psi'',\ \psi',\ \psi \text{ stetig.}$$

(10b) $$\psi(\pm \tfrac{1}{2}) = \psi'(\pm \tfrac{1}{2}) = 0.$$

Setzen wir $\psi'' = w$, dann haben wir für unser Beispiel ($U' = 0$):

(11) $$w'' - iR(U-c)w = 0$$

im stetigen Gebiet.

(11b) $$w_+ - w_- = 0; \quad w'_+ - w'_- = 2iR(U_+ - U_-)\psi'$$
$$\text{für } x = -\xi, +\xi, \text{ mit } \psi' = \int_{-\frac{1}{2}}^{x} w\,dx.$$

(11c) $$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} w\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x\,w\,dx = 0.$$

Hat diese Aufgabe eine Lösung, so konstruieren wir diejenige Lösung χ von (3), (5a), (5b), für die $\chi(-\frac{1}{2}) = \chi'(-\frac{1}{2}) = \chi(+\frac{1}{2})$ verschwinden. Dann folgt aus (9), daß auch $\chi'(+\frac{1}{2}) = 0$, also die ursprüngliche Aufgabe eine Lösung besitzt, außer wenn $\psi''(+\frac{1}{2}) = 0$ wäre. Im letzteren Ausnahmefall kann aber $\psi'''(+\frac{1}{2})$ nicht verschwinden, ohne daß ψ identisch verschwinden würde. Wir konstruieren also dann diejenige Lösung χ, für die $\chi(-\frac{1}{2}) = \chi'(-\frac{1}{2}) = \chi'(+\frac{1}{2})$ verschwinden und finden aus (9): $\chi(+\frac{1}{2}) = 0$. Also folgt immer, daß die Existenz von Lösungen der adjungierten Aufgabe solche für die ursprüngliche Aufgabe mit bedingt.

Das adjungierte Problem ist aber leichter zu behandeln, da es nur Unstetigkeitsbedingungen für w', nicht für w, enthält. Auch ψ (und damit w) kann eine gerade oder eine ungerade Funktion sein. Im folgenden wird der Fall von ungeradem w und ψ behandelt, so daß die erste Gleichung von (11c) identisch erfüllt ist.

§ 4. Die transzendente Bedingungsgleichung.

Zur Aufstellung und Lösung der transzendenten Bedingungsgleichung für die „Eigenwerte" R ändern wir zweckmäßig die Längeneinheit. Es sei

(12) $$c = \tau u; \quad y = x\sqrt{Ru\tau}; \quad g = \xi\sqrt{Ru\tau}; \quad H = \tfrac{1}{2}\sqrt{Ru\tau};$$
$$f = H - g; \quad \sigma = \frac{1}{\tau} - 1$$

gesetzt. g, f und σ sind dann die zu bestimmenden Größen. Ferner sei

$$\omega = \frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{w}{Ru\tau}.$$

Dann lautet unser Gleichungssystem, nach (4) und (11):

(13 a) $\omega'' - i\sigma\omega = 0$ für $-g < y < +g$,

(13 b) $\omega'' + i\,\omega = 0$ für $y < -g$ und $y > +g$,

(13 c) $\omega'_+ - \omega'_- = \pm 2i(1+\sigma)\psi'$ für $y = \mp g$,

(13 d) $$\int_{-H}^{+H} \omega\, dy = \int_{-H}^{+H} y\,\omega\, dy = 0.$$

Da ω ungerade sein soll, ist die erste Bedingung (13 d) identisch erfüllt, die zweite reduziert sich auf

(13 e) $$\omega(0) = 0; \quad \int_0^H y\,\omega\, dy = 0.$$

Die Integration ergibt nun folgende Gleichungen, in denen unter $\sqrt{i}$ bezw. $\sqrt{-i}$ stets die Wurzel mit positiv reellem Teil zu verstehen ist:

$$\text{für } 0 < y < g: \ \omega = \frac{a}{\sqrt{-i\sigma}} \sin\sqrt{-i\sigma}\,y,$$

$$y = g: \quad \omega_- = \frac{a}{\sqrt{-i\sigma}} \sin\sqrt{-i\sigma}\,g; \quad \omega'_- = a\cos\sqrt{-i\sigma}\,g,$$

$$y > g: \quad \omega = A\cos\sqrt{i}\,\eta + B\sin\sqrt{i}\,\eta,$$

mit $\eta = y - g$.

Da

(14 a) $$\omega_+(g) = \omega_-(g): \ A = \frac{a}{\sqrt{-i\sigma}} \sin\sqrt{-i\sigma}\,g.$$

Nach (13 c):

(14 b) $$\sqrt{i}\,B - a\cos\sqrt{-i\sigma}\,g + 2i(1+\sigma)p = 0,$$

worin

(14 c) $$p = \psi'(g) = \int_{f+g}^{g} \omega\, dy = -\int_0^f \omega\, d\eta = -\frac{A}{\sqrt{i}} \sin\sqrt{i}f - \frac{B}{\sqrt{i}}(1 - \cos\sqrt{i}f).$$

Zu (13e):

$$\int_0^H y\omega\,dy = \int_0^g y\omega\,dy - gp + \int_0^f \eta\omega\,d\eta,$$

worin

$$\int_0^g y\omega\,dy = g\frac{a}{-i\sigma}(1-\cos\sqrt{-i\sigma}\,g) - \frac{a}{\sqrt{-i\sigma}}\left(\frac{g}{\sqrt{-i\sigma}} - \frac{\sin\sqrt{-i\sigma}\,g}{-i\sigma}\right)$$

$$= \frac{a}{i\sigma}\left(g\cos\sqrt{-i\sigma}\,g - \frac{\sin\sqrt{-i\sigma}\,g}{\sqrt{-i\sigma}}\right),$$

welchen Ausdruck wir abkürzend aq setzen.

$$\int_0^f \eta\omega\,d\eta = -fp - \int_0^f d\eta \int_0^\eta \omega\,d\eta$$

$$= -fp + iA(1-\cos\sqrt{i}f) - iB(\sin\sqrt{i}f - \sqrt{i}f).$$

Somit ergibt (13e):

(14d) $aq - (g+f)p + iA(1-\cos\sqrt{i}f) - iB(\sin\sqrt{i}f - \sqrt{i}f) = 0.$

Zunächst ersetzen wir in (14d) und (14c) A und B durch a und p nach (14a) und (14b):

$$aq - (g+f)p + ia\frac{\sin\sqrt{-i\sigma}\,g}{\sqrt{-i\sigma}}(1-\cos\sqrt{i}f)$$

$$-(a\sqrt{i}\cos\sqrt{-i\sigma}\,g - 2i\sqrt{i}(1+\sigma)p)(\sin\sqrt{i}f - \sqrt{i}f) = 0,$$

$$\sqrt{i}p + a\frac{\sin\sqrt{-i\sigma}\,g}{\sqrt{-i\sigma}}\sin\sqrt{i}f + \left(\frac{a}{\sqrt{i}}\cos\sqrt{-i\sigma}\,g - 2\sqrt{i}(1+\sigma)p\right)(1-\cos\sqrt{i}f) = 0.$$

Durch Elimination von a und p folgt die Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} q + i\dfrac{\sin\sqrt{-i\sigma}\,g}{\sqrt{-i\sigma}}(1-\cos\sqrt{i}f) - \sqrt{i}\cos\sqrt{-i\sigma}\,g\,(\sin\sqrt{i}f - \sqrt{i}f) & \begin{matrix} -(g+f) \\ -2\sqrt{-i}(1+\sigma)(\sin\sqrt{i}f - \sqrt{i}f)\end{matrix} \\ \dfrac{\sin\sqrt{-i\sigma}\,g}{\sqrt{-i\sigma}}\sin\sqrt{i}f + \dfrac{\cos\sqrt{-i\sigma}\,g}{\sqrt{i}}(1-\cos\sqrt{i}f) & \sqrt{i} - 2\sqrt{i}(1+\sigma)(1-\cos\sqrt{i}f) \end{vmatrix},$$

deren Ausrechnung ergibt:

$$q\sqrt{i}(-1-2\sigma+2(1+\sigma)\cos\sqrt{i}f) + g\frac{\sin\sqrt{-i\sigma}\,g}{\sqrt{-i\sigma}}\sin\sqrt{i}f$$

$$+\frac{\sin\sqrt{-i\sigma}\,g}{\sqrt{-i\sigma}}[\sqrt{-i}(3+4\sigma)(1-\cos\sqrt{i}f) - (1+2\sigma)f\sin\sqrt{i}f]$$

$$+g\cos\sqrt{-i\sigma}\,g\,.\sqrt{-i}(1-\cos\sqrt{i}f) - \cos\sqrt{-i\sigma}\,g\,(i\sin\sqrt{i}f + \sqrt{-i}f\cos\sqrt{i}f) = 0.$$

Durch Einsetzen des Wertes von q und Division mit $\cos\sqrt{-i\sigma}\,g \,.\, \sin\sqrt{i}\,f$ vereinfacht sich diese Gleichung noch zu

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sqrt{-i}}{\sigma}\left(g-\frac{\operatorname{tg}\sqrt{-i\sigma}\,g}{\sqrt{-i\sigma}}\right)\left(\operatorname{ctg}\sqrt{i}\,f-(1+2\sigma)\operatorname{tg}\frac{\sqrt{i}}{2}f\right)\\ &+g\frac{\operatorname{tg}\sqrt{-i\sigma}\,g}{\sqrt{-i\sigma}}+\frac{\operatorname{tg}\sqrt{-i\sigma}\,g}{\sqrt{-i\sigma}}\left(\sqrt{-i}(3+4\sigma)\operatorname{tg}\frac{\sqrt{i}}{2}f-(1+2\sigma)f\right)\\ &+g\sqrt{-i}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{i}}{2}f-(i+\sqrt{-i}\,f\operatorname{ctg}\sqrt{i}\,f)=0. \end{aligned}\right.$$

Dies ist die transzendente Bedingungsgleichung unseres Problems, aus der g, f und σ als reelle, positive Größen zu bestimmen sind. Denn g und f sind ihrer Natur nach als Strecken positiv, σ ist positiv, wenn, wie zu verlangen ist, die Wellengeschwindigkeit gleichgerichtet und höchstens gleich der Strömungsgeschwindigkeit ist.

§ 5. Fall $c = u$.

Zuerst sei σ als sehr klein angenommen. Diese Annahme entspricht, da $\tau=\frac{1}{1+\sigma}$, dem Fall $\tau=1$, in dem die Wellengeschwindigkeit c gleich der Stömungsgeschwindigkeit u in der Mitte des Kanals ist. Durch Entwicklung nach $\sqrt{-i\sigma}\,g$ ergibt sich:

$$\lim_{\sigma=0}\frac{\sqrt{-i}}{\sigma}\left(g-\frac{\operatorname{tg}\sqrt{-i\sigma}\,g}{\sqrt{-i\sigma}}\right)=\sqrt{i}\,\frac{g^3}{3},$$

$$\lim_{\sigma=0}\frac{\operatorname{tg}\sqrt{-i\sigma}\,g}{\sqrt{-i\sigma}}=g.$$

Die Gleichung (15) geht also über in

$$(16)\quad \frac{g^3}{3}\left(\sqrt{i}\operatorname{ctg}\sqrt{i}\,f-\sqrt{i}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{i}}{2}f\right)+g^2+g\left(4\sqrt{-i}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{i}\,f}{2}-f\right)$$
$$-(i+\sqrt{-i}\,f\operatorname{ctg}\sqrt{i}\,f)=0.$$

Nun ist, unter ϱ eine reelle positive Größe verstanden:

$$(17)\quad \operatorname{tg}\sqrt{i}\,\varrho=i\frac{1-e^{2i\sqrt{i}\varrho}}{1+e^{2i\sqrt{i}\varrho}}=i\frac{1-e^{-\sqrt{2}\varrho}e^{\sqrt{2}\varrho i}}{1+e^{-\sqrt{2}\varrho}e^{\sqrt{2}\varrho i}}.$$

Hiernach ist in der komplexen Ebene die Abbildung der positiv reellen ϱ-Axe durch die Funktion $\operatorname{tg}\sqrt{i}\,\varrho$ eine Spirale, die sich

asymptotisch dem Punkt $+i$ nähert (Fig. 2). Der absolute Betrag der Abweichung vom Punkt i ist

$$(17\text{a})\qquad |\varepsilon| \leqq \frac{2e^{-\sqrt{2}\varrho}}{1-e^{-\sqrt{2}\varrho}}.$$

Von dieser Größenordnung, mit $\varrho = \frac{f}{2}$, bezw. f, ist daher der Fehler, wenn wir in (16) $\operatorname{tg}\frac{\sqrt{i}}{2}f$ durch $+i$ und entsprechend $\operatorname{ctg}\sqrt{i}f$ durch $-i$ ersetzen. Diese Näherung setzt über den noch unbekannten Wert von f nichts weiter voraus, als daß er groß sei.

Die Gleichung (16) vereinfacht sich mit dieser Näherung zu

$$-\tfrac{2}{3}g^3 i\sqrt{i} + g^2 + g(4\sqrt{i} - f) - (i - f\sqrt{i}) = 0.$$

Zerlegung in reellen und imaginären Teil ergibt, da $\sqrt{i} = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{3}g^3 + g^2 + g(2\sqrt{2} - f) + \frac{f}{\sqrt{2}} = 0$$

$$(16\text{a})\qquad -\frac{\sqrt{2}}{3}g^3 \qquad + g \cdot 2\sqrt{2} \qquad + \frac{f}{\sqrt{2}} - 1 = 0,$$

woraus durch Subtraktion noch die einfachere Gleichung folgt:

$$(16\text{b})\qquad \frac{2\sqrt{2}}{3}g^3 + g^2 + 1 - gf = 0.$$

Die Gleichungen (16a) und (16b) haben mindestens ein positives Wurzelpaar g, f, da nach (16b) sich f für alle positiven g positiv ergibt und für $g = 0$ größer als aus (16a) ($+\infty$ bezw. $\sqrt{2}$), für große g dagegen kleiner als aus (16a) $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}g^2 \text{ bezw. } \frac{2}{3}g^3\right)$. Die numerische Ausrechnung ergibt für dieses Paar die Werte:

$$g = 3,4; \quad f = 14.$$

Nun nimmt der Fehler, den wir durch den Ansatz $\operatorname{tg}\frac{\sqrt{i}}{2}f = -\operatorname{ctg}\sqrt{i}f = i$ gemacht haben, mit wachsendem f ab und im Gebiet $f > 13$ wird sein absoluter Betrag nach (17a):

$$|\varepsilon| \leqq \frac{2e^{-\frac{13}{\sqrt{2}}}}{1-e^{-\frac{13}{\sqrt{2}}}} \approx 2e^{-10} = 10^{-4}.$$

Durch diesen Fehler werden die obigen Überlegungen über die Vorzeichenverhältnisse nicht geändert. Überdies wird auch das numerische Resultat bis zur 2ten Dezimale nicht beeinflußt. Die angegebenen Werte stellen also in der Tat eine Lösung unserer Aufgabe dar, wenn die Wellengeschwindigkeit gleich der Strömungsgeschwindigkeit in der Mitte gewählt wird. Nach (12) wird dann

$$Ru = 4(g+f)^2 = 1210,$$

$$2\xi = \frac{g}{(g+f)} = 0{,}2.$$

Die hier ermittelten Strömungsverhältnisse haben insofern keine Ähnlichkeit mit den beobachteten, als das Gebiet strömender Flüssigkeit in der Mitte von der Breite 2ξ sich klein ergibt gegen die beiden Randgebiete ruhender Flüssigkeit von der Breite $\frac{1}{2} - \xi = 0{,}4$. Wir behandeln deshalb im Folgenden noch ein allgemeineres Beispiel.

§ 6. Fall $c < u$.

Es werde nun σ als groß vorausgesetzt, die Wellengeschwindigkeit somit nach (12) klein gegen die Strömungsgeschwindigkeit in der Mitte. Zur Diskussion der Gl. (15) können wir jetzt eine ähnliche Näherung wie im vorigen Abschnitt verwenden. Wir setzen, vorbehaltlich späterer Fehlerschätzung, $\sqrt{\sigma}g$ als hinreichend groß voraus, um, entsprechend zu (17) und (17a):

$$\text{(17b)} \qquad \operatorname{tg}\sqrt{-i\sigma}\,g = -i$$

setzen zu können. Gl. (15) geht dann nach Division mit $\sqrt{-i}$ über in

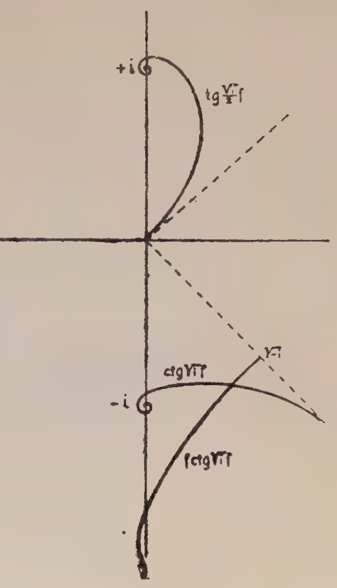
$$\text{(18)} \quad g\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{ctg}\sqrt{i}\,f - \frac{1+\sigma}{\sigma}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{i}}{2}f + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) - f\left(\frac{1+2\sigma}{\sqrt{\sigma}} + \operatorname{ctg}\sqrt{i}\,f\right)$$
$$+ \sqrt{-i}\left(\frac{1+5\sigma+4\sigma^2}{\sqrt{\sigma}^3}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{i}}{2}f - \frac{1}{\sqrt{\sigma}^3}\operatorname{ctg}\sqrt{i}\,f + 1\right) = 0.$$

Wir setzen die linke Seite von (18)

$$gV + W$$

und betrachten die durch V und W dargestellten komplexen Abbildungen der positiv reellen f-Axe. Wenn f reell von 0 bis ∞ wächst, ergibt $\operatorname{tg}\frac{\sqrt{i}}{2}f$ nach (17) eine vom 0-Punkt unter 45° im

ersten Quadranten ansteigende Spirale, die sich asymptotisch dem Punkt $+i$ nähert. Entsprechend ergibt $\operatorname{ctg}\sqrt{i}f$ eine im 4ten Quadranten unter der Neigung -45^0 aus dem Unendlichen kommende Spirale, die sich asymptotisch dem Punkt $-i$ nähert (Fig. 2). Ferner geht $f\operatorname{ctg}\sqrt{i}f$ von dem im 4ten Quadranten liegenden Punkt $\sqrt{-i}$ aus und nähert sich asymptotisch der negativ imaginären Axe. Wir folgern aus dem Kurvenbild:



Figur 2.

Die Glieder $\sqrt{-i}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{i}}{2}f$; $-\sqrt{-i}\operatorname{ctg}\sqrt{i}f$ und $(\sqrt{-i}-f\operatorname{ctg}\sqrt{i}f)$ haben positiv imaginären Teil, somit auch der ganze Ausdruck W. Für kleine f wird, da dann

$$\operatorname{tg}\frac{\sqrt{i}}{2}f = \frac{\sqrt{i}f}{2};\quad \operatorname{ctg}\sqrt{i}f = \frac{\sqrt{-i}}{f}-\frac{1}{3}\sqrt{i}f:$$

$$W_0 = \frac{1+4\sigma}{\sqrt{\sigma}^3}f+\frac{i}{\sqrt{\sigma}^3}\frac{1}{f}+\frac{1}{3\sqrt{\sigma}^3}f,$$

während für große f, mittels

$$\operatorname{tg}\frac{\sqrt{i}}{2}f = -\operatorname{ctg}\sqrt{i}f = i:$$

$$W_\infty = f\left(-\frac{1+2\sigma}{\sqrt{\sigma}}+i\right)+\frac{2+5\sigma+4\sigma^2}{\sqrt{\sigma}^3}\sqrt{i}+\sqrt{-i}.$$

Hieraus folgt: Die Abbildungskurve W geht aus von dem Punkt W_0 des ersten Quadranten und nähert sich, die Axe des positiv Imaginären schneidend, der Asymptote W_∞, die im zweiten Quadranten liegt, und zwar gegen die negativ reelle Axe weniger als 45^0 geneigt.

An den Punkten dieser Kurve tragen wir die entsprechenden Werte von V als Vektoren an. Sowohl $\operatorname{ctg}\sqrt{i}f$, als auch $-\operatorname{tg}\frac{\sqrt{i}}{2}f$, somit V, hat stets negativ imaginären Teil. Für kleine f liegt die Richtung von V, wegen des überwiegenden $\operatorname{ctg}\sqrt{i}f$, im 4ten Quadranten, geht dann über in den 3ten $\left(\text{wegen } -\operatorname{tg}\frac{\sqrt{i}}{2}f\right)$ und nähert

sich schließlich der Richtung $-\frac{2+\sigma}{\sigma}i+\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$, die im 4ten Quadranten liegt, gegen die negativ imaginäre Axe weniger als 45° geneigt.

Zusammenfassend folgern wir: Der an der Kurve W angetragene Vektor V muß mindestens einmal durch den 0-Punkt hindurchgehen. In diesem Fall kann g so groß gewählt werden, daß der Endpunkt des Vektors gerade im 0-Punkt liegt.

Es gibt also mindestens ein positiv reelles Wurzelpaar g, f der Gleichung (18) für jeden positiven Wert von σ.

Um numerisch näheren Überblick zu gewinnen, wählen wir, zur Vereinfachung der Rechnung, den Wert

$$f=\frac{\pi}{\sqrt{2}}=2{,}2.$$

aus und suchen das zugehörige g und σ zu bestimmen. Nach (17) ist jetzt $\operatorname{ctg}\sqrt{i}f$ rein imaginär, nämlich

$$\operatorname{ctg}\sqrt{i}f=-i\frac{1+\varepsilon^{-\pi}e^{i\pi}}{1-e^{-\pi}e^{i\pi}}=-i\frac{1-\frac{1}{20}}{1+\frac{1}{20}}=-\frac{19}{21}i.$$

Ferner

$$\operatorname{tg}\frac{\sqrt{i}}{2}f=i\frac{1-e^{-\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}}{1+e^{-\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}}}=i\frac{1-\frac{i}{\sqrt{20}}}{1+\frac{i}{\sqrt{20}}}=\frac{19i+9}{21}.$$

Also

$$\begin{aligned} gV+W &= g\left(-\frac{1}{\sigma}\frac{19}{21}i-\frac{1+\sigma}{\sigma}\frac{19i+9}{21}+\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)-2{,}2\left(\frac{1+2\sigma}{\sqrt{\sigma}}-\frac{19}{21}i\right)\\ &+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{1+5\sigma+4\sigma^2}{\sqrt{\sigma^3}}\frac{19i+9}{21}+\frac{1}{\sqrt{\sigma^3}}\frac{19}{21}i+1\Big)=\\ &-g\left(\frac{38+19\sigma}{21\sigma}i+\frac{1+\sigma}{\sigma}\frac{9}{21}-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)-2{,}2\left(\frac{1+2\sigma}{\sqrt{\sigma}}-\frac{19}{21}i\right)\\ &+\left(\frac{29+50\sigma+40\sigma^2}{21\sqrt{\sigma^3}}-1\right)\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{47+140\sigma+112\sigma^2}{21\sqrt{\sigma^3}}+1\right)=0. \end{aligned}\tag{19}$$

Die Trennung in reellen und imaginären Teil ergibt

$$g\frac{38+19\sigma}{21\sigma}=2{,}2\frac{19}{21}+\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\left(\frac{29+50\sigma+40\sigma^2}{21\sqrt{\sigma^3}}-1\right),\tag{19a}$$

$$g\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\frac{9}{21}-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)=-2{,}2\frac{1+2\sigma}{\sqrt{\sigma}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{47+140\sigma+112\sigma^2}{21\sqrt{\sigma^3}}+1\right).\tag{19b}$$

In Gl. (19b) ist der Koeffizient von g negativ, wenn $0{,}32 < \sigma < 3{,}2$, sonst bei positivem σ positiv. Die rechte Seite von (19b) ist für kleine σ positiv, für große σ negativ, und verschwindet für $\sigma = 7{,}3$. Positive g sind also, außer für sehr kleine Werte von σ, die hier nicht in Betracht kommen, nur möglich, wenn $3{,}2 < \sigma < 7{,}3$. In diesem Gebiet fällt g nach (19b) stetig von $+\infty$ zu 0 ab.

Gl. (19a) dagegen liefert für alle endlichen, positiven Werte von σ endliche positive Werte von g.

Es existiert also in der Tat ein gemeinsames positives Wurzelpaar g, σ der Gl. (19a) und (19b), für welches man durch Näherungsrechnung erhält:

$$\sigma = 5{,}8; \quad g = 4{,}3.$$

Der nach Gleichung (17a) berechnete Fehler nimmt mit wachsendem g und σ ab, und im Gebiet $g > 4$, $\sigma > 5{,}7$ ist sein absoluter Betrag $|\varepsilon| < 2 \cdot 10^{-6}$. Durch diesen Fehler werden die obigen Überlegungen über die Vorzeichenverhältnisse nicht geändert. Überdies wird das numerische Resultat bis zur 2ten Dezimale nicht beeinflußt. Die angegebenen Werte stellen also in der Tat eine Lösung dar.

Nach (12) haben wir jetzt

$$Ru = \frac{4H^2}{\tau} = 4(g+f)^2(1+\sigma) = 1149 = \frac{\varrho h u \alpha}{\mu},$$

$$2\xi = 0{,}66; \quad c = \tau u = 0{,}15\, u.$$

Hiernach ist, nicht unähnlich den wirklich beobachteten Verhältnissen, $\frac{2}{3}$ der Kanalbreite von strömender Flüssigkeit erfüllt, während jedes Randgebiet $\frac{1}{6}$ der Breite einnimmt. Die mittlere Geschwindigkeit ist somit

$$u_m = \tfrac{2}{3} u$$

und die Wellengeschwindigkeit $c = 0{,}22\, u_m$, ein Wert, der durchaus im Bereich der physikalischen Möglichkeiten liegt.

Ich möchte aber betonen, daß es mir zunächst nur auf den Nachweis der Möglichkeit von Lösungen der Aufgabe (1), (2) bei geeignet gewählter Geschwindigkeitsverteilung U ankam. Diese Aufgabe ist erst ein Teil des eigentlichen Turbulenzproblems, unter dem die Aufstellung von stabilen Strömungsformen, die von der laminaren abweichen, zu verstehen ist. Es erfordert die weitere Untersuchung, ob eine Strömungsverteilung, die, wie die behandelte, ungedämpfte Schwingungen zuläßt, unter dem gemein-

samen Einfluß der von diesen Schwingungen erzeugten Turbulenzreibung und der Zähigkeit aufrecht erhalten werden kann. Von der oben ermittelten speziellen Funktion U ist dies nicht zu erwarten, wohl aber von solchen allgemeineren Funktionen, die aus ihr durch stetige Abänderung entstehen und gleichfalls ungedämpfte Schwingungen zulassen. Für obige Bedingung ist der analytische Ansatz in der auf S. 199 zitierten Note abgeleitet.

Altengrabow, Dezember 1916.

Graphische Auflösung von Gleichungen in der komplexen Zahlenebene.

Von

C. Runge.

Mit 6 Figuren im Text.

Vorgelegt in der Sitzung am 31. März 1917.

Um die reellen Wurzeln einer Gleichung mit reellen Koeffizienten aufzufinden, bedient man sich seit Langem mit Vorliebe graphischer Methoden. Zur Ermittlung komplexer Wurzeln auch für Gleichungen mit komplexen Koeffizienten sind meines Wissens keine graphischen Methoden gebräuchlich, obgleich ohne Frage das graphische Rechnen in der komplexen Zahlenebene gegenüber dem numerischen Verfahren noch größere Vorteile darbietet als im Reellen. Im Folgenden sollen Methoden dafür entwickelt werden, die, wie ich zeigen zu können meine, den kürzesten Weg bilden, um die komplexen Wurzeln einer Gleichung zu finden.

Die Methode gründet sich auf die graphische Konstruktion des Wertes einer ganzen rationalen Funktion für einen gegebenen Wert der Veränderlichen.

Es sei

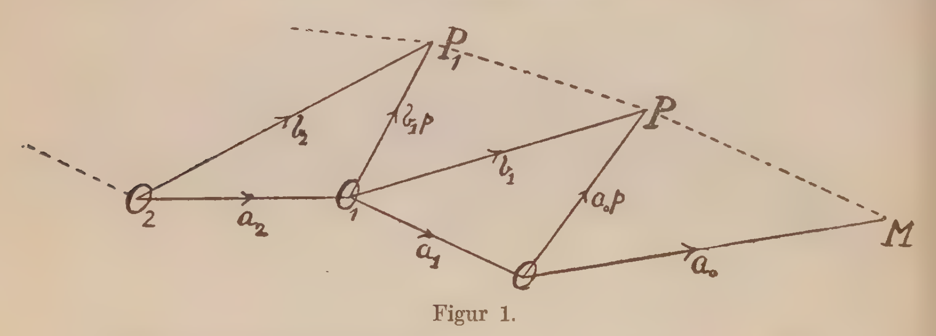
$$g(\mathfrak{z}) = a_0 \mathfrak{z}^n + a_1 \mathfrak{z}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \mathfrak{z} + a_n,$$

wo $a_0, a_1, \ldots a_n$ gegebene reelle oder komplexe Zahlen und $\mathfrak{z}$ eine komplexe Veränderliche bedeuten. Wir denken uns die Koeffizienten durch Strecken in der komplexen Zahlenebene gegeben und in der umgekehrten Reihenfolge

$$a_n, \ a_{n-1}, \ a_{n-2}, \ \ldots, \ a_1, \ a_0$$

hinter einander abgetragen. Die Figur wird also durch eine Folge von Punkten gebildet, die ich mit $O_n, O_{n-1}, \ldots O_1, O, M$ bezeichnen

will, derart, daß die Strecke von O_n bis O_{n-1} die Zahl a_n, die Strecke von O_{n-1} bis O_{n-2} die Zahl a_{n-1} u. s. w., die Strecke von O bis M die Zahl a_0 darstellt. Der Wert $\mathfrak{z} = p$ der Variabeln, für den wir den Wert der ganzen rationalen Funktion konstruieren wollen, sei dargestellt durch das Verhältnis der Strecken OP/OM, sodaß der reelle und imaginäre Teil von p gleich der Abszisse und Ordinate des Punktes P in einem quadratischen Koordinatennetz sind, dessen Anfangspunkt in O und dessen Einheit durch OM gebildet wird. Die Strecke OP selbst stellt dann die Zahl $a_0 p$ und die Strecke $O_1 P$ die Zahl $a_0 p + a_1$ dar, die wir mit b_1 bezeichnen wollen. Wir konstruieren nun einen Punkt P_1, der zu $O_1 P$ gradeso liegt wie P zu OM d. h. es soll $O_1 P_1$ mit $O_1 P$ denselben Winkel bilden wie OP mit OM, soll auf derselben Seite von $O_1 P$ liegen wie OP von OM und das Längenverhältnis von $O_1 P_1$ und $O_1 P$



Figur 1.

soll dasselbe sein wie das von OP und OM (Fig. 1). Dann stellt $O_1 P_1$ die Zahl $b_1 p$ und $O_2 P_1$ die Zahl $b_1 p + a_2$ dar, die mit b_2 bezeichnet werden möge. Auf diese Weise fortfahrend konstruiert man eine Folge von Punkten $P, P_1, \ldots P_{n-2}, P_{n-1}$ derart, daß

$$\begin{aligned}
O_1 P &= a_0 p + a_1 = b_1, \\
O_2 P_1 &= b_1 p + a_2 = b_2, \\
&\vdots \\
O_{n-1} P_{n-2} &= b_{n-2} p + a_{n-1} = b_{n-1}, \\
O_n P_{n-1} &= b_{n-1} p + a_n = b_n.
\end{aligned}$$

Die letzte Strecke $O_n P_{n-1}$ stellt den Wert $g(p)$ dar. In der Tat ist

$$g(\mathfrak{z}) = b_n + (\mathfrak{z} - p)(b_{n-1} + b_{n-2}\mathfrak{z} + b_{n-3}\mathfrak{z}^2 + \cdots + b_1 \mathfrak{z}^{n-2} + a_0 \mathfrak{z}^{n-1}),$$

wie man durch Vergleichung der Koefficienten der Potenzen von $\mathfrak{z}$ auf beiden Seiten der Gleichung sofort erkennt, und damit ist $g(p) = b_n$.

Es kommt nun alles darauf an, daß man die Zeichnung der Punkte P, $P_1, \dots P_{n-1}$ rasch ausführen kann. Ich habe es am zweckmäßigsten gefunden das gemeinsame Längenverhältnis der Strecken OP zu OM, O_1P_1 zu O_1P u. s. w. also den absoluten Wert der Zahl p auf dem Rechenschieber einzustellen und jedes Mal mit einem in halbe Millimeter geteilten Maßstab die Länge von $O_\nu P_{\nu-1}$ zu messen und auf dem Rechenschieber sofort die Länge von $O_\nu P_\nu$ abzulesen. Um den Winkel $\sphericalangle POM$ abzutragen, werden um alle Punkte O, $O_1, \dots O_{n-1}$ Kreise mit dem gleichen Radius geschlagen. Man braucht jetzt nur die Sehne in Zirkel zu nehmen, die diesem Radius und dem Zentriwinkel $\sphericalangle POM$ entspricht, um sofort die Richtung $O_\nu P_\nu$ aus der Richtung $O_\nu P_{\nu-1}$ zu konstruieren. Man trägt dazu die Sehne von dem Endpunkt des in die Richtung von $O_\nu P_{\nu-1}$ fallenden Radius nach der richtigen Seite ab und findet den Endpunkt des in die Richtung von $O_\nu P_\nu$ fallenden Radius. Ich ziehe es vor, den Radius der Kreise nicht größer als 2 bis 3 Zentimeter zu machen, so daß die Sehne mit einem durch eine Schraube zwangläufig verstellbaren Spitzenzirkel der üblichen Größe gefaßt werden kann. Man legt dann Millimetermaßstab und Spitzenzirkel gar nicht aus den Händen. Mit der Linken schiebt man den Maßstab auf der Zeichnung entlang, während man mit der Rechten den Spitzenzirkel handhabt. Die Linien $O_\nu P_{\nu-1}$, $O_\nu P_\nu$ werden dabei gar nicht gezogen, sondern nur gemessen und die Punkte P werden mit einer Spitze des Zirkels eingestochen. Um die Punkte nicht zu verlieren, kann man sie mit einem Bleistift anstreichen, den man außer dem Zirkel noch in die rechte Hand legt, so daß seine Spitze zwischen dem vierten und fünften Finger gehalten wird.

Mit der Kleinheit der Kreise verzichtet man zwar auf hohe Genauigkeit; aber auf die ist es auch gar nicht abgesehn, sondern darauf, die Konstruktion mit mäßiger Genauigkeit rasch auszuführen.

Wenn der Winkel $\sphericalangle POM$ stumpf ist, so arbeitet man besser mit seinem Supplement, indem man OM über O hinaus verlängert und ebenso $O_\nu P_{\nu-1}$ über O_ν hinaus. Bei einem stumpfen Winkel, der nur wenig von 180 Grad verschieden ist, würde sonst beim Abtragen der Sehne der Endpunkt zu ungenau werden. Außerdem hat man den Vorteil, daß der Zirkel höchstens nur das $\sqrt{2}$-fache des Radius zu fassen braucht.

Die Strecken $O_n P_{n-1}$, $O_{n-1} P_{n-2}, \dots O_1 P$, OM stellen die Werte b_n, $b_{n-1} \dots b_1$, a_0 dar, von denen der erste mit $g(p)$ übereinstimmt. Die übrigen sind die Koeffizienten der Entwicklung des Differenzenquotienten

$$g_1(\mathfrak{z}) = \frac{g(\mathfrak{z}) - g(p)}{\mathfrak{z} - p}$$

nach Potenzen von $\mathfrak{z}$. Der Wert von $g_1(\mathfrak{z})$ für $\mathfrak{z} = p$ ist der Differentialquotient $g'(p)$. Man hat also nur dasselbe Verfahren, das für $g(\mathfrak{z})$ auseinandergesetzt ist, auf $g_1(\mathfrak{z})$ anzuwenden, um den Differentialquotienten zu bestimmen.

Es zeigt sich nun, daß man zu dem Zweck die Strecken, die uns die Werte b_{n-1}, b_{n-2}, ... $b_1 a_0$ darstellen, nicht hintereinander abzutragen braucht, sondern daß sie in der richtigen Reihenfolge hintereinander abgetragen schon dastehen. Bezeichnet man nämlich die komplexe Zahl, die dem Quotienten PM/OM entspricht, mit m, so stellt PM die Zahl ma_0, $P_1 P$ die Zahl mb_1, $P_\nu P_{\nu-1}$ die Zahl mb_ν dar. Die Folge von Punkten P_{n-1}, P_{n-2}, ... P, M stellt mithin die Koeffizienten von $mg_1(\mathfrak{z})$ dar, in derselben Weise wie die Folge O_n, O_{n-1} ... $O_1 M$ die Koeffizienten von $g(\mathfrak{z})$ darstellten. Um den Wert $mg_1(p)$ zu konstruieren, hat man also einen Punkt Q so anzunehmen, daß der komplexe Wert p durch das Verhältnis der Strecken PQ/PM dargestelllt ist, und dann eine Folge von Punkten $Q_1 Q_2$ ... Q_{n-2} ebenso zu konstruieren wie vorher die Punkte P. Die Strecke $P_{n-1} Q_{n-2}$ stellt dann den Wert $mg_1(p)$ dar und das Verhältnis der Strecken $P_{n-1} Q_{n-2}/PM$ stellt den Wert $g_1(p) = g'(p)$ dar.

Wenn wir die komplexen Werte, die den Strecken $P_{n-1} Q_{n-2}$, $Q_{n-2} Q_{n-3}$, ... $Q_1 Q$, QM mit c_{n-1}, c_{n-2}, ... c_1, c_0 bezeichnen, so ist

$$mg_1(\mathfrak{z}) = c_{n-1} + (\mathfrak{z} - p)(c_{n-2} + c_{n-3}\mathfrak{z} + \cdots + c_1 \mathfrak{z}^{n-3} + c_0 \mathfrak{z}^{n-2})$$

und demnach

$$mg(\mathfrak{z}) = mb_n + (\mathfrak{z} - p) c_{n-1} + (\mathfrak{z} - p)^2 (c_{n-2} + c_{n-3}\mathfrak{z} + \cdots + c_0 \mathfrak{z}^{n-2}).$$

Ist $\mathfrak{z} - p$ klein genug, daß die Glieder 2. Ordnung vernachlässigt werden können, so ist genähert

$$m(g(\mathfrak{z}) - b_n) = (\mathfrak{z} - p) c_{n-1}.$$

Diese Gleichung können wir geometrisch so deuten. Sei P' ein Punkt in der Nähe von P, der dem Wert $\mathfrak{z}$ entspricht, so ist $\mathfrak{z} - p$ durch das Verhältnis der Strecken PP'/OM und $\frac{\mathfrak{z} - p}{m}$ durch das Verhältnis der Strecken PP'/PM dargestellt. Sei P'_{n-1} der Punkt, der sich aus P' gradeso konstruieren läßt wie P_{n-1} aus P, so stellt die Strecke $P_{n-1} P'_{n-1}$ den Wert $g(\mathfrak{z}) - b_n$ dar und das Verhältnis der Strecken $P_{n-1} P'_{n-1}/P_{n-1} Q_{n-2}$ stellt den Wert von $\frac{g(\mathfrak{z}) - b_n}{c_{n-1}}$ dar.

Unsere Gleichung besagt demnach, daß die Strecken $P_{n-1}P'_{n-1}$ und $P_{n-1}Q_{n-2}$ zu einander liegen wie die Strecken PP' und PM. D. h. wenn wir den Punkt P um ein kleines Stück nach P' verschieben, so verschiebt sich der zugehörige Punkt P_{n-1} so, daß die neue Lage P'_{n-1} zu der Strecke $P_{n-1}Q_{n-2}$ so liegt wie P' zu PM.

Das erlaubt uns nun zu erkennen, wie wir den Punkt P verschieben müssen, um den Punkt P_{n-1} in irgend einer gewünschten Weise zu verändern. Wünschen wir eine Wurzel der Gleichung $g(\mathfrak{z}) = 0$ zu ermitteln, so kommt es darauf an P_{n-1} mit O_n zusammenfallen zu lassen. Wir verändern den Punkt P so, daß P_{n-1} dem Punkte O_n näher gerückt wird, und sobald er dem Punkte O_n nahe genug gekommen ist, kann er durch eine weitere Änderung mit O_n zur Deckung gebracht werden. Bei den ersten Schritten lohnt es sich kaum den Wert von $g'(p)$ zu konstruieren. Wenn man für irgend zwei Punkte P und P', die nicht zu weit aus einander liegen die zugehörigen Punkte P_{n-1} und P'_{n-1} konstruiert hat, so kann man schon daraus schließen, wie nun für einen dritten Punkt P'' der zugehörige Punkt P''_{n-1} fällt. Denn es muß genähert P''_{n-1} zu P_{n-1} und P'_{n-1} ebenso liegen wie P'' zu P und P', es sei denn, daß man einer Wurzel von $g'(\mathfrak{z}) = 0$ zu nahe ist.

Erst wenn man durch einige gröbere Versuche den Punkt P_{n-1} in die Nähe von O_n gebracht hat, was ohne Schwierigkeit gelingt, lohnt es sich auch den Wert von $g'(p)$ zu konstruieren und damit den Punkt P_{n-1} so genau mit O_n zur Deckung zu bringen, wie es die Genauigkeit der Zeichnung erlaubt.

Der Leser wird gut tun, das selbst an Beispielen zu üben. Die ersten Schritte brauchen dabei gar nicht genau ausgeführt zu werden. Man kann sogar mit dem Auge ungefähr überschlagen, wohin der Punkt P_{n-1} für irgend eine Annahme von P fällt und kann damit von vorne herein die Lage von P schon einigermaßen günstig wählen. Es empfiehlt sich den Punkt P zunächst auf dem Kreise um O vom Radius OM d. h. das Längenverhältnis von OP zu OM gleich 1 anzunehmen, weil das für die schnelle Konstruktion der Punkte P am bequemsten ist. Ein Beispiel wird das Verfahren am besten beschreiben.

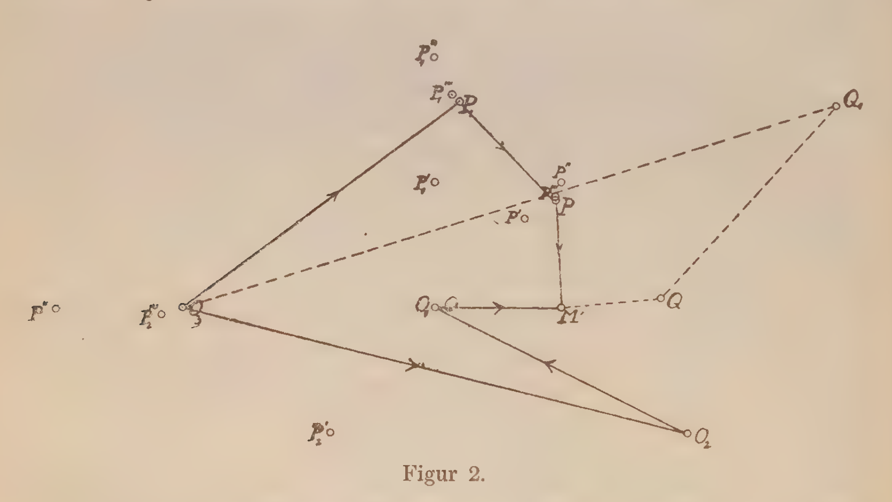
In Fig. 2 (s. folgende Seite) ist die ganze rationale Funktion

$$4 - i + (-2 + i)\mathfrak{z} + \mathfrak{z}^3$$

durch die Punkte O_3, O_2, O_1, O, M dargestellt, von denen hier O_1 und O zusammenfallen.

Der erste Punkt P' ist in der Entfernung 1 von O im Azimut von 45^0 angenommen. Er führt zu P'_1 und dann zu P'_2. Würde

P' an die Stelle von M rücken, so würde auch P_2' mit M zusammenfallen. Um P_2' nach O_3 zu bringen, müßte man P' relativ zu seiner Verbindung mit M ungefähr ebenso verschieben, wie P_2' relativ zu $P_2' M$ um es nach O_3 zu bringen. Wir nehmen als zweiten Versuch P'' so an, daß $OP''/OM = 1 + i$. Das führt über P_1'' zu P_2''. Nun nehmen wir eine dritte Lage P''' an, die zwischen P' und P'' ungefähr so liegt wie O_3 zwischen P_2' und P_2''. Damit gelangen wir über P_1''' zum Punkte P_2''' und sind nun dem Punkte O_3 nahe genug, um mit Vorteil den Differentialquotienten zu benutzen. Wir nehmen demnach Q relativ zu $P''' M$ so an, wie P''' zu OM liegt, ziehen $P_1''' Q$ und bestimmen Q_1 so, daß es zu $P_1''' Q$ wieder so liegt wie P''' zu OM. Dann bezeichnet uns die Lage von O_3 relativ zur Strecke $P_2''' Q_1$, wie wir P''' relativ zu $P''' M$ ändern müssen. Auf diese Weise ergibt sich der definitive Punkt P, dessen zugehöriger Punkt P_2, soweit die Genauigkeit der Zeichnung reicht, als mit O_3 zusammenfallend betrachtet werden kann.



Figur 2.

Um auch die übrigen Wurzeln zu finden, benutzen wir, daß sie der Gleichung $g_1(\mathfrak{z}) = 0$ also auch der Gleichung $mg_1(\mathfrak{z}) = 0$ genügen, deren Koeffizienten durch die Punktfolge P_2, P_1, P, M dargestellt sind. Die Wurzeln einer Gleichung 2. Grades lassen sich nun mit Zirkel und Lineal konstruieren, so daß man hier nicht zu tasten braucht. Sei

$$g(\mathfrak{z}) = \alpha_0 \mathfrak{z}^2 + \alpha_1 \mathfrak{z} + \alpha_2 = 0$$

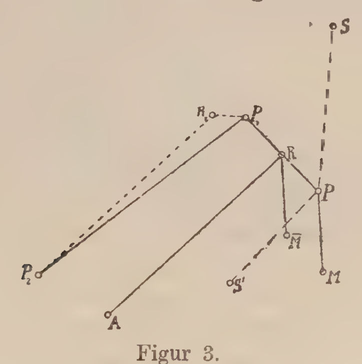
die gegebene Gleichung, die durch die Punkte P_2, P_1, P, M dargestellt wird, so nimmt man einen Punkt R in der Mitte zwischen P und P_1 an, so daß also das Verhältnis der Strecken PR/PM den

Wert $p = -\frac{\alpha_1}{2\alpha_0}$ darstellt. Stellt nun für einen Punkt S das Verhältnis PS/PM den Wert $\mathfrak{z}$ dar, so stellt RS/PM den Wert $\mathfrak{z} - p$ dar, den wir mit u bezeichnen wollen. Führt man u statt $\mathfrak{z}$ in die Gleichung ein, so nimmt sie die Form an

$$\alpha_0 u^2 + g(p) = 0.$$

Diese Gleichung wird, da der eine Koeffizient fehlt, durch drei Punkte $AR\overline{M}$ dargestellt. $R\overline{M}$ ist dieselbe Strecke wie PM und AR/PM stellt die Zahl $g(p)$ dar. Um den Punkt A zu finden, braucht also nur für $\mathfrak{z} = p$ der Punkt R_1 ermittelt zu werden, für den die Strecke P_2R_1 den Wert $g(p)$ darstellt. Das geschieht in der oben auseinandergesetzten Weise. Dann ist die Strecke AR dieser Strecke P_2R_1 gleich zu machen. Die Auflösung der Gleichung verlangt nun eine solche Lage des Punktes S, daß S relativ zu $R\overline{M}$ grade so liegt wie A zu RS.

S liegt mithin auf der Halbierungslinie des Winkels $AR\overline{M}$ in solcher Entfernung, daß die Länge von RS das geometrische Mittel zwischen den Längen $R\overline{M}$ und RA ist. Diese Entfernung von R aus auf der Halbierungslinie nach beiden Seiten abgetragen führt zu den beiden Punkten S und S'. Die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung zweiten Grades sind dann durch die Verhältnisse der Strecken PS/PM und PS'/PM dargestellt. In Fig. 3 ist die



Figur 3.

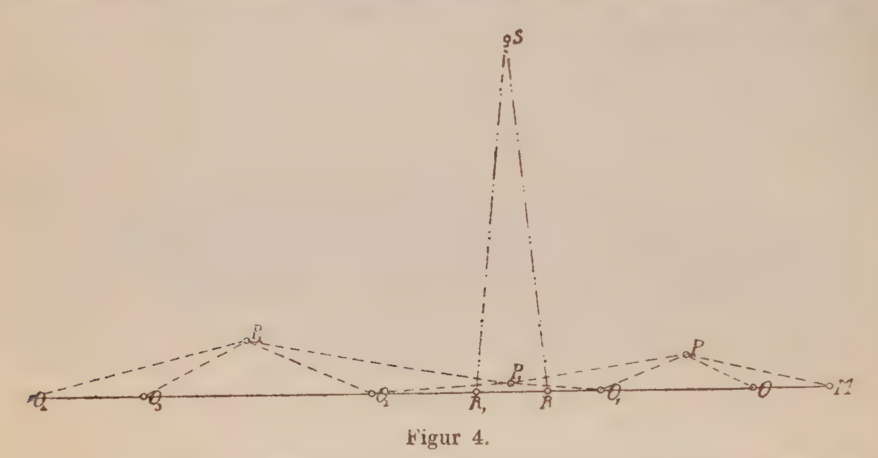
Fig. 2 mit der definitiven Folge der Punkte P wiederholt und die Auflösung der Gleichung zweiten Grades hinzugefügt. Die Ausmessung ergibt für die drei Wurzeln die Werte:

$$0{,}96 + 0{,}86\,i; \quad 1{,}06 - 1{,}16\,i; \quad -2{,}04 + 0{,}30\,i,$$

die, soweit die Genauigkeit der Zeichnung reicht, richtig sind.

Wenn es sich um Gleichungen mit reellen Koeffizienten handelt, so wird man die reellen Wurzeln mit dem Rechenschieber allein berechnen. Die komplexen Wurzeln lassen sich aber sehr

gut mit dem beschriebenen Verfahren ermitteln. Da in diesem Falle immer je zwei konjugierte komplexe Wurzeln auftreten, wird man nach Ermittelung einer komplexen Wurzel p nicht nur den Differenzenquotienten $\frac{g(z)-g(p)}{z-p} = g_1(z)$ in der oben besprochenen Weise graphisch darstellen und dadurch die gefundene Wurzel beseitigen, sondern auf demselben Wege auch die konjugierte Wurzel $\bar{p}$ durch die Bildung des Differenzenquotienten $\frac{g_1(z)-g_1(\bar{p})}{z-\bar{p}}$. Das führt dann wieder zu einer ganzen rationalen Funktion mit reellen Koeffizienten. Die Figur 4 zeigt an dem Beispiel der



Figur 4.

ganzen rationalen Funktion vierten Grades mit reellen Koeffizienten $3+6x6x^2++4x^3+2x^4$ den Übergang zu der Gleichung zweiten Grades, der das andere Paar konjugierter Wurzeln genügt, samt deren Lösung. OP/OM stellt eine komplexe Wurzel dar und führt zu der Folge O_4, P_2, P_1, P, M, die den ersten Differenzenquotienten darstellt (der Faktor m ist für die Wurzeln irrelevant), Der zweite Differenzenquotient führt auf die Punktfolge $O_4 R_1 RM$. Das Verhältnis der Strecken PR/PM stellt die konjugierte Wurzel $\bar{p}$ dar, so daß also das Dreieck MOP dem Dreieck MPR ähnlich ist aber mit entgegengesetztem Umlaufsinn entsprechend der konjugierten Wurzel: MO zu MP wie MP zu MR. Ebenso sind die Dreiecke RP_1R_1 und $R_1P_2O_4$ dem Dreieck MPR ähnlich. $MP:MR$ wie $RP_1:RR_1$ wie $R_1P_2:R_1O_4$. Um R und R_1^1 zu ermitteln, kann man das Längenverhältnis $MP:MO$ auf dem Rechenschieber einstellen und damit sofort MR aus MP und RR_1 aus RP_1 entnehmen.

Die übrig bleibende durch die Punkte $O_4 R_1 RM$ dargestellte

Gleichung zweiten Grades wird gelöst durch die Punkte S, S', die auf der Mittelsenkrechten von RR_1 in solcher Entfernung liegen, daß RS und RS' die geometrische Proportionale zwischen O_4R_1 und RM sind. Die Proportionale kann man auf dem Rechenschieber ablesen.

Die graphische Lösung der Gleichung

$$a_0\mathfrak{z}^n + a_1\mathfrak{z}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathfrak{z} + a_n = 0$$

kann auch als die graphische Lösung der Gleichung

$$a_0 + a_1\xi + \cdots + a_n\xi^n = 0$$

angesehen werden. Man braucht sich nur zu denken, daß die Einheitsstrecke in der entgegengesetzten Richtung genommen wird. Dann würde die Zahl a_0 nicht durch die Strecke OM, sondern durch die Strecke MO und ebenso a_1, a_2, ... durch OO_1, O_1O_2, ... dargestellt sein. Die Punktfolge $MOO_1 \ldots O_n$ würde mithin in dieser Reihenfolge genommen die Koeffizienten von

$$a_0 + a_1\xi + \cdots + a_n\xi^n = 0$$

und $O_{n-1}P_{n-1}/O_{n-1}O_n$ würde einen komplexen Wert ξ darstellen, der die Gleichung befriedigt, gradeso wie OP/OM einen komplexen Wert darstellt, der die Gleichung in $\mathfrak{z}$ befriedigt.

Mitunter kann es erwünscht sein, in die Gleichung

$$a_0\mathfrak{z}^n + a_1\mathfrak{z}^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

eine andere Unbekannte durch die Substitution $\mathfrak{z} = mu$ einzuführen

$$(a_0m^n)u^n + (a_1m^{n-1})u^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

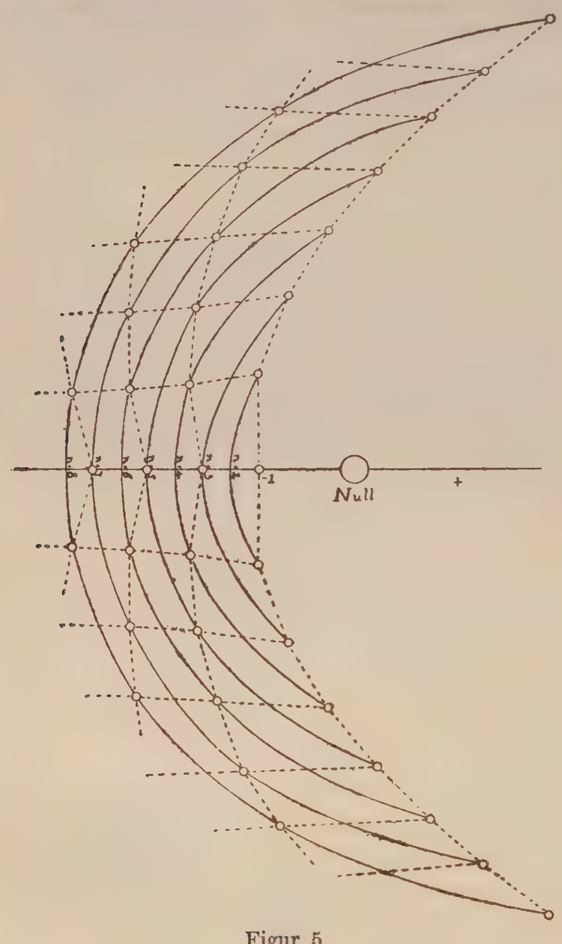
um die Größenverhältnisse der Koeffizienten passend zu ändern und dem gesuchten Wert von u einen absoluten Betrag ungefähr gleich 1 zu geben.

Wenn die Koeffizienten a_0, a_1, ... a_n alle reell sind und $m = i$ angenommen wird, so werden die neuen Koeffizienten in der Reihenfolge a_n, ia_{n-1}, i^2a_{n-2}, ... genommen abwechselnd reell und rein imaginär. Die gebrochene Linie $O_nO_{n-1} \ldots O_1OM$ biegt dann an jeder Ecke um einen rechten Winkel um. Für einen reellen Wert von $\mathfrak{z}$ ist dann u rein imaginär und die Punkte P, P_1, ... P_{n-1} liegen auf der gebrochenen Linie und bilden selber ebenfalls die Eckpunkte einer rechtwinklig gebrochenen Linie. Diese Form der graphischen Darstellung einer ganzen rationalen Funktion einer reellen Veränderlichen $\mathfrak{z}$ ist schon lange bekannt (vergl. Math. Enzyklop. erster Bd., 2. Teil, S. 1012).

Um die Leistungsfähigkeit meiner Methode auf die Probe zu stellen, habe ich die Wurzeln der Abschnitte der Exponentialreihe

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

bis zum 8. Grad einschließlich damit berechnet. Die Zeichnung ergab immer die Näherungswerte, die dann durch Rechnung kontrolliert und verfeinert wurden. Es interessiert dabei zu sehen,



Figur 5.

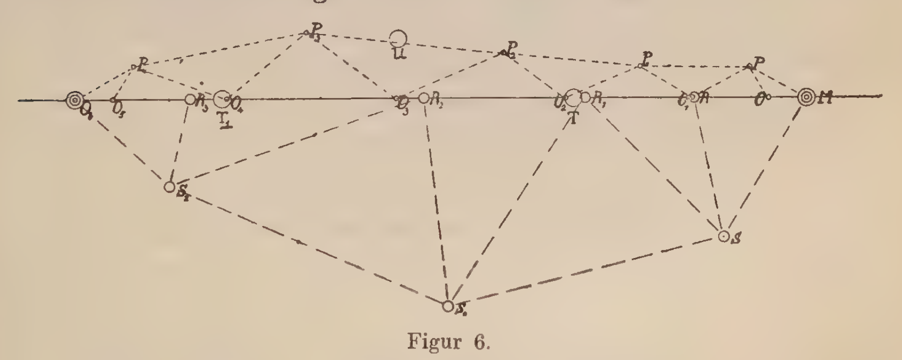
in welcher Weise die Wurzeln, indem der Grad der Abschnitte wächst, größer und größer werden und sich über die komplexe Ebene verteilen. Es ist leicht zu beweisen, daß nur die Abschnitte ungraden Grades eine reelle Wurzel und zwar nur eine haben können. Es sei nämlich a eine reelle Wurzel von $g_n(z)$ des

Abschnittes n^{ten} Grades, so folgt zunächst, daß a negativ ist; denn für einen positiven Wert von z ist $g_n(z)$ notwendiger Weise positiv, weil alle Koeffizienten positiv sind. An der Stelle a ist nun die Ableitung $g_n'(z)$ gleich $-\frac{a^n}{n!}$. Denn es ist allgemein

$$g_n(z) = g_n'(z) + \frac{z^n}{n!}.$$

Folglich hat $g_n'(a)$ das Vorzeichen $(-1)^{n+1}$ und a kann daher keine mehrfache Wurzel sein. Es kann aber dann nicht mehr als eine Wurzel geben. Denn in zwei auf einander folgenden einfachen Wurzelpunkten einer ganzen rationalen Funktion müßte die Ableitung entgegengesetztes Vorzeichen haben. Daraus folgt wieder, daß für grade Werte von n keine reelle Wurzel vorhanden sein kann. Denn für grade Werte von n könnten reelle Wurzeln nur in grader Anzahl auftreten.

Figur 5 zeigt, wie die Wurzeln sich über die komplexe Ebene in einem Netz verteilen, dessen Maschen nicht sehr verschiedene Größe haben. Die eine Schaar der Netzlinien läuft der reellen Achse einigermaßen parallel. Die andere Schaar von Netzlinien biegt sich nach oben und nach unten auf die Seite der positiven reellen Achse hin. Die Wurzeln eines Abschnittes liegen ungefähr auf einem Kreisbogen, dessen Zentrum aber nicht im Nullpunkt sondern in einem Punkte der reellen positiven Achse liegt. Mit Hilfe der Figur ist es jetzt möglich, Näherungswerte für die Wurzeln der Abschnitte 9. und 10. Grades abzulesen, die dann wieder durch Rechnung verschärft werden können u. s. w.



Figur 6.

Figur 6 zeigt die graphische Auflösung für den Abschnitt 6. Grades. Dabei ist für z die neue Unbekannte $u = z/3$ eingeführt, in der die Gleichung lautet:

$$1 + 3u + \frac{9}{2}u^2 + \frac{9}{2}u^3 + \frac{27}{8}u^4 + \frac{81}{40}u^5 + \frac{81}{80}u^6 = 0.$$

Auf einer Horizontalen sind die Punkte $O_6 O_5 \ldots O_1$, $O_1 M$ aufgetragen entsprechend den Koeffizienten der Gleichung. Das Verhältnis der Strecken OP/OM stellt eine Wurzel p dar, die zu den Punkten $P_1, P_2, \ldots P_4, P_5$ führt, wobei P_5 mit O_6 zusammenfällt. Die Punkte O und P sind von ganz kleinen Kreisen umgeben. Die Punktfolge $O_6 P_4 P_3 P_2 P_1 PM$ stellt den Differenzenquotienten $g_1(u) = \frac{g(u) - g(p)}{u - p}$ dar. Wird auch für die konjugierte Wurzel $\bar{p}$ der Differenzenquotient $\frac{g_1(u) - g_1(\bar{p})}{u - \bar{p}}$ gebildet, so erhält man eine ganze rationale Funktion 4. Grades $g_2(u)$. Graphisch ausgeführt liefert das die Punktfolge $O_6 R_3 R_2 R_1 RM$, die nun weiter behandelt ist, um die übrigen Wurzeln zu finden. Das Verhältnis der Strecken RS/RM stellt eine Wurzel q dar, die zu den Punkten $S_1 S_2 S_3$ führt, wobei S_3 mit O_6 zusammenfällt. Die Punkte R und S sind von etwas größeren Kreisen umgeben. Die Punktfolge $O_6 S_2 S_1 SM$ stellt den Differenzenquotient $g_3(u) = \frac{g_2(u) - g_2(q)}{u - q}$ dar. Wird auch für die konjugierte Wurzel $\bar{q}$ der Differenzenquotient gebildet, so erhält man eine ganze rationale Funktion 2. Grades $g_4(u) = \frac{g_3(u) - g_3(\bar{q})}{u - \bar{q}}$. Graphisch ausgeführt liefert das die Punktfolge $O_6 T_1 TM$. Das Verhältnis der Strecken TU/TM stellt eine Wurzel dieser Gleichung 2. Grades dar. Aus der Figur kann man die numerischen Werte der Wurzeln der Gleichung 6. Grades entnehmen. Man hat nur die Koordinaten von P in dem quadratischen Netz OM, von S in dem quadratischen Netz RM, von U in dem quadratischen Netz TM zu messen. Die Messung ergibt:

$$P: \; -0{,}49 + 0{,}82\, i,$$
$$S: \; +0{,}26 - 1{,}23\, i,$$
$$U: \; -0{,}75 + 0{,}26\, i.$$

Die zweite Dezimale ist nicht mehr zuverlässig. Aber die Näherungswerte sind genau genug, um sie nach der Newtonschen Methode zu verschärfen. Die Rechnung ergibt die genaueren Werte für die Wurzeln:

$$-0{,}481 \pm 0{,}811\, i,$$
$$+0{,}268 \pm 1{,}233\, i,$$
$$-0{,}787 \pm 0{,}280\, i,$$

Das durch den Punkt U gelieferte dritte Wurzelpaar zeigt die größte Abweichung von den wahren Werten. Das liegt daran, daß die Konstruktion von U sich auf die von P und S aufbaut. Man

kann solche Fehler vermeiden, wenn man nach Konstruktion des Punktes P zunächst die entsprechenden Näherungswerte verschärft und die Gleichung vierten Grades berechnet, die diese beiden P entsprechenden Wurzeln nicht mehr enthält und dann mit dieser Gleichung in neuer Zeichnung den Punkt S konstruiert u. s. w.

Die Verschärfung geschieht bei reellen Koeffizienten wie in diesem Falle am besten, indem man die ganze rationale Funktion durch die reelle Funktion zweiten Grades, deren Wurzeln die Näherungswerte zweier konjugierter Wurzeln sind, dividiert. Es ergibt sich ein Rest vom 1. Grade, dessen Wert nun für eine der konjugierten Wurzeln ausgerechnet wird. Er stimmt mit dem Wert der ganzen rationalen Funktion selbst überein. Der Wert der Ableitung braucht nicht so genau berechnet zu werden. Im Allgemeinen kann ihr Wert auch, nach der oben besprochenen Methode konstruiert, aus der Zeichnung übernommen werden.

Die anomale Molekülverteilung in Mischkristallen als Ursache ihrer anomalen Doppelbrechung.

Von

G. Tammann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 3. März 1917.

R. Brauns[1]) hat in seiner Monographie: „Die optischen Anomalien der Kristalle" eine besondere Art der nur bei Mischkristallen auftretenden optischen Anomalie beschrieben. Es kommt bei Mischkristallen nicht selten vor, daß ihre Eigenschaften nicht der Symmetrie entsprechen, die den Kristallen ihrer Komponenten zukommt. Die Ursache dieser optischen Anomalie sieht er in inneren Spannungen. Man darf aber auch weiter nach der Ursache der inneren Spannungen fragen. Diese Frage scheint bisher nicht erörtert zu sein.

Wenn ein Mischkristall die optische Symmetrie der Kristalle seiner beiden Komponenten zeigen soll, so müssen seine Molekülarten im Raumgitter in der Weise möglichst gut durchmischt sein, daß diese Durchmischung mit der Symmetrie des Gitters verträglich ist. Es muß also die Aufeinanderfolge der Molekülarten in gleichwertigen kristallographischen Richtungen dieselbe sein. Für einzelne Gittergerade gleichwertiger Richtungen kann diese Forderung nur bei singulären Mischungen erfüllt sein, aber für Gruppen von Gittergeraden gleichwertiger Richtungen kann ihr für alle Mischungsverhältnisse genügt sein.

Ein Mischkristall, dessen Molekülverteilung dieser Anforderung genügt, würde eine solche Molekülverteilung beibehalten auch bei einer Temperatur, bei der die beiden Molekülarten ihre Plätze im Gitter vertauschen. Durch den Platzwechsel oder die Diffusion würden allerdings in jedem Moment Abweichungen von der ge-

1) Preisschriften der Jablonowskischen Ges. zu Leipzig, Nr. 11, 29, S. 370, 1891, Hirzel, Leipzig.

forderten Molekülverteilung eintreten, aber sie hätten auf den Gruppen von Gittergeraden gleichwertiger Richtungen denselben Betrag und könnten daher die Eigenschaften des Mischkristalls gleichwertiger Richtungen nur in gleicher Weise beeinflussen. Kühlt man den Mischkristall langsam ab, so werden diese Abweichungen für dasselbe Zeitintervall geringer und schließlich mit dem letzten Rest von Diffusion verschwinden.

In der isotropen Phase, aus der sich der Mischkristall bildet, sind seine beiden Molekülarten auch räumlich in vollkommener Unordnung verteilt. Daher ist es sehr wenig wahrscheinlich, daß sich bei schnellerer Kristallisation in jedem Moment sofort die richtige Verteilung an der Kristallisationsgrenze herstellt. Geht aber die Kristallisation in Temperaturgebieten lebhafter Diffusion vor sich, und bildet sich keine erhebliche Konzentrationsdifferenz zwischen der Oberfläche des Kristalls und der der isotropen Phase aus, so werden abnorme Molekülverteilungen im Mischkristalle sich alsbald ausgleichen. Geht aber die Kristallisation in einem Temperaturgebiet vor sich, in dem ein Platzwechsel beider Molekülarten im Mischkristall nicht mehr eintritt, also aus einer Lösung vor sich, so können nachträgliche Korrektionen der abnormen Molekülverteilung sich nicht mehr vollziehen. In der Tat sind optische Anomalien bisher nur an den aus Lösungen entstandenen Mischkristallen beobachtet worden.

Die Störung der Molekülverteilung im Mischkristall wird sich nach zwei Richtungen hin äußern: in einer starken Verminderung der linearen Kristallisationsgeschwindigkeit und in einer Abweichung der Eigenschaften des Mischkristalls von den seiner Symmetrie nach zu erwartenden Eigenschaften. Beide Wirkungen sind häufig beobachtet worden.

Zwischen der vollkommen ungeordneten Molekülverteilung in der isotropen Phase, aus der sich der Mischkristall bildet und der einer bestimmten normalen Molekülverteilung im Mischkristall die der bestmöglichen, mit der Symmetrie des Gitters verträglichen Durchmischung entspricht, gibt es zahllose abnorme Verteilungen: Verteilungen weniger guter Durchmischungen, die aber der Symmetrieforderung entsprechen, und Verteilungen, die bei mehr oder weniger guter Durchmischung den Symmetrieforderungen nicht genügen. Die ersten könnten durch Untersuchung mit Röntgenlicht, die zweiten können schon durch Untersuchung mit gewöhnlichem Licht festgestellt werden. Dementsprechend könnte man erwarten, daß die Zahl der Mischkristalle derselben Zusammensetzung aber verschiedener Molekülanordnung eine sehr große ist. Im allgemeinen ist das aber

nicht der Fall. Denn die Bedingungen, unter denen sich die untersuchten Kristalle mit optischen Anomalien bildeten, waren in der Regel fast immer dieselben, sie genügen nicht der Bildung eines Mischkristalls mit normalen Eigenschaften, entsprechen aber nur denen einer bestimmten Anomalie. Hinsichtlich des Wechsels der Bedingungen, die verschiedene optische Anomalien erzeugen, scheint für verschiedene Arten von Mischkristallen eine sehr verschiedene Empfindlichkeit zu bestehen. Am empfindlichsten sind in dieser Hinsicht die Mischkristalle: $FeCl_3$—NH_4Cl—H_2O. Würde man die Bedingungen der Kristallisation in hinreichender Weise ändern, so würden auch bei weniger empfindlichen Mischkristallen neue Anomalien, entsprechend einer anderen abnormen Molekülverteilung, zu Tage kommen.

Wenn abnorme Molekülverteilungen die optischen Anomalien der Mischkristalle verursachen, so ist, wie wir sahen, zu erwarten, daß beide an die Bedingung des Fehlens der Diffusion im Mischkristall gebunden sind, denn anderen Falls würde sich die normale Molekülverteilung mit der Zeit herstellen. Diffusionskoeffizienten und ihre Temperaturabhängigkeit sind aber für die Mischkristalle mit nachgewiesener anomalen Doppelbrechung nicht bekannt. Zur Prüfung der Bedingung des Auftretens anomaler Doppelbrechung müssen wir uns daher nach anderen, allerdings weniger guten Kriterien umsehen. Beim Schmelzpunkt der Mischkristalle ist die Diffusionsgeschwindigkeit in den Mischkristallen eine recht erhebliche. Bekanntlich werden Schichtkristalle beim Erhitzen auf eine Temperatur in der Nähe der des Beginns ihres Schmelzens, in wenigen Stunden homogenisiert. Je mehr sich die Temperatur der Bildung eines Mischkristalls von der des Beginns seines Schmelzens unterscheidet, desto geringer wird der molekulare Platzwechsel im Mischkristall. Dementsprechend sind optische Anomalien, die nicht der Bildung von Schichtkristallen zuzuschreiben sind, an Mischkristallen, die sich aus Schmelzen gebildet haben, nicht beobachtet worden, wohl aber an Mischkristallen, die sich aus Lösungen weit unterhalb der Temperatur des Beginns ihres Schmelzens gebildet haben. Da die Schmelzpunkte wasserfreier Salze sehr viel höher liegen als die hydratischer Salze, so sind insbesondere bei den aus Lösungsmitteln kristallisierenden wasserfreien Salzen optische Anomalien zu erwarten, und man hätte sich sogar zu wundern, wenn solche fehlen sollten. Bei den Mischkristallen hydratischer Salze können optische Anomalien natürlich auch auftreten und sind auch bei Hydraten, die erst über 100° schmelzen, festgestellt worden. Bei den Mischkristallen wasserfreier Salze scheinen die Anomalien auch

stärker als bei den wasserreichen Hydraten hervorzutreten. R. Brauns[1]) hebt das bezüglich der anomalen Doppelbrechung der wasserfreien Mischkristalle von $Ba(NO_3)_2$, $Pb(NO_3)_2$ und $Sr(NO_3)_2$ hervor, und nach P. Groth[2]) haben Mischkristalle von $KClO_4$ und $KMnO_4$ Flächenwinkel, die von den der reinen, wasserfreien Salze erheblich abweichen.

Steigert man die Temperatur eines Mischkristalls mit anomaler Doppelbrechung, so wird diese um so schneller verschwinden, je mehr sich die Temperatur der des Beginns des Schmelzens nähert. R. Brauns[3]) sah die anomale Doppelbrechung beim Erwärmen der Mischkristalle von $Pb(NO_3)_2$ und $Ba(NO_3)_2$ auf dem Heiztisch des Mikroskopes verschwinden und bei der Abkühlung nicht wiederkehren.

Die Mischkristalle mit abnormer Molekülverteilung sind im Vergleich zu den Mischkristallen mit normaler Verteilung instabile Gebilde. Ihrer Instabilität entsprechend werden die Gleichgewichte, an denen sich normale und anomale Mischkristalle beteiligen, sich unterscheiden müssen. Die Löslichkeit des normalen Mischkristalls sollte die kleinste sein.

B. Roozeboom[4]) bestimmte die Löslichkeiten der Mischkristalle des Eisensalmiaks ($FeCl_3$—NH_4Cl—H_2O). Die gefundenen Löslichkeiten in Abhängigkeit von dem $FeCl_3$-Gehalt der Mischkristalle ordnen sich viel weniger gut auf einer kontinuirlichen Kurve als zu erwarten ist. Außerdem nahm der $FeCl_3$-Gehalt aufeinanderfolgender Ausscheidungen kleiner Mengen von Mischkristallen aus einer großen Menge von Lösung sehr erheblich ab, obwohl durch längeres Schütteln der Kristalle mit der Lösung das Gleichgewicht sich hätte einstellen und der $FeCl_3$ - Gehalt der verschiedenen Fraktionen derselbe hätte sein sollen. Auch bei langsamer Verdunstung der Lösung wurde die Abnahme des $FeCl_3$-Gehaltes in aufeinanderfolgenden Ausscheidungen beobachtet, dem aber auch ein Ansteigen des $FeCl_3$-Gehaltes folgte. Da die Mischkristalle ärmer an $FeCl_3$ sind als ihre gesättigte Lösung, so wäre ein Anwachsen des $FeCl_3$ - Gehaltes in den aufeinanderfolgenden Ausscheidungen zu erwarten gewesen.

Diese Feststellungen einer unbestimmten Löslichkeit wurden durch einen Schüler B. Roozebooms, Mohr[5]), vervollständigt und

1) R. Brauns l. c. S. 208.
2) P. Groth, Pogg. Ann. 133, S. 192. 1868.
3) R. Brauns, l. c. S. 224.
4) B. Roozeboom, Zeitschr. f. phys. Chem. 10, S. 152 u. 153, 1892.
5) Mohr, Zeitschr. f. phys. Chem. 27, S. 193, 1898.

bestätigt. Aus Lösungen derselben Zusammensetzung können sich bei derselben Temperatur Mischkristalle ausscheiden, deren $FeCl_3$-Gehalt bis zu 60 % des maximalen $FeCl_3$-Gehalts abnimmt. Dementsprechend ist aber auch die Stärke und Verteilung der Doppelbrechung in den Kristallen, nach den Zeichnungen Mohr's zu urteilen, eine sehr verschiedene.

Es liegt hier offenbar der Fall vor, daß aus ein und derselben Lösung Mischkristalle einer Reihe verschiedener Molekülverteilungen sich ausscheiden. Mit der Art der Verteilung ändert sich die Doppelbrechung und die Löslichkeit. Wenn die Molekülverteilung bei derselben Zusammensetzung des Mischkristalls von den Bedingungen der Kristallisation, geringen Konzentrations-Differenzen an der Kristallisationsgrenze, sehr stark beeinflußt wird, so haben diese merkwürdigen Abweichungen in der Zusammensetzung aufeinanderfolgender Abscheidungen nichts wunderbares. Den Angaben, daß die Doppelbrechung der Mischkristalle mit der Zeit bei Zimmertemperatur verschwindet, widerspricht Mohr auf das Bestimmteste und gibt an, daß nach einem halben Jahr eine Abnahme der Doppelbrechung nicht festzustellen war. Bezüglich der Beobachtungen, daß die Doppelbrechung beim Erwärmen der Mischkristalle verschwindet, macht Mohr darauf aufmerksam, daß geringe Verluste an HCl den Verlust der Doppelbrechung nach sich ziehen. Es ist aber zu erwarten, daß auch bei Vermeidung dieser Verluste bei hinreichender Temperatursteigerung die Doppelbrechung verschwinden wird.

Auch für die Löslichkeiten der Mischkristalle von $Pb(NO_3)_2$ und $Sr(NO_3)_2$, für die Brauns starke anomale Doppelbrechung nachgewiesen hat, fand M. Herz[1]) recht verschiedene Löslichkeiten. Der Autor selbst schiebt die Nichtübereinstimmuug seiner beiden Löslichkeitskurven auf geringe Beimengungen. Es kann sich aber auch hier um Differenzen handeln, die durch abnorme Molekülverteilungen verursacht sind.

Genauer ist die Abweichung zweier Löslichkeitskurven der monoklinen Mischkristalle von $ZnSO_4 + 7aq$ und $CuSO_4 + 7aq$ von W. Stortenbecker[2]) festgestellt worden. Er sagt über die von ihm beobachteten eigentümlichen Erscheinungen Folgendes: „Die monoklinen Pseudorhomboëder des Kupfer-Zinksulfates, welche leicht in großen und schönen Exemplaren erhalten werden können,

---

1) M. Herz, Zur Kenntnis der Löslichkeit von Mischkristallen, Dissertation, Berlin, 1895, S. 19.

2) W. Stortenbecker, Zeitschr. f. phys. Chem. 22, S. 64, 1897.

sind anfangs ganz klar, werden aber beim Schütteln mit der Lösung, aus welcher sie entstanden sind, oder bei Temperaturerhöhung bald trübe, sodaß es den Anschein hat, als ob sie labil wären. Die Änderung scheint aber nicht weiter vorzugehen, die Kristalle behalten ihre Form und die Trübung verschwindet allmählich. Die mikroskopische Untersuchung ergibt, daß die Oberfläche der trübe gewordenen Kristalle im Anfange rauh und angegriffen, nach einiger Zeit jedoch wieder glatt ist. Der Vorgang scheint dabei nach innen fortgeschritten zu sein, denn es zeigen sich auf der Oberfläche parallele, scheinbar sehr einschlußreiche, mehr oder weniger tiefgelegene Schichten. Die Zusammensetzung der Kristalle scheint sich nicht weiter zu ändern, als daß ein Teil des Zinksulfats durch Kupfersulfat ersetzt wird. Die Zunahme des Kupfergehaltes bereitete mir insofern noch eine Schwierigkeit, daß ich nicht wußte, welche Kristalle eigentlich als mit der Lösung in Gleichgewicht anzunehmen sind. Am wahrscheinlichsten erachte ich es, daß die zuletzt erreichte Zusammensetzung, welche sich weiter nicht mehr zu ändern scheint, die richtige ist".

Eine Umwandlung in eine andere Form scheint hier ausgeschlossen zu sein, weil die Kristalle vor und nach der vorübergehenden Trübung vollkommen klar waren. Da die Mischkristalle monoklin sind, so könnte anomale Doppelbrechung an ihnen erst durch eine eingehendere Untersuchung erwiesen werden. Die beschriebenen Erscheinungen stimmen sonst in allen Punkten mit dem Bilde überein, das man sich von dem Verhalten eines Mischkristalls mit abnormer Molekülverteilung bei Herstellung der normalen machen kann. Die Schwierigkeit, die Stortenbecker betreffs der Frage nach dem Gleichgewicht empfand, beseitigt sich durch die Bemerkung, daß sowohl die ursprünglichen Kristalle als auch die Kristalle, nachdem sie wieder klar geworden waren, mit der Lösung sich im Gleichgewicht befinden konnten, nur war das erste Gleichgewicht ein weniger stabiles als das folgende.

R. Hollmann[1]) hat für die monoklinen Mischkristalle $ZnSO_4 + 7aq$ und $MnSO_4 + 7aq$, die viele Analogien mit den von Stortenbecker untersuchten $ZnSO_4 + 7aq$ und $CuSO_4 + 7aq$ haben, eine Dampfdruckkurve gefunden, die im Vergleich zu der Dampfdruckkurve der rhombischen Zn-reichen Mischkristalle

$$(ZnSO_4 + 7aq \text{ und } MnSO_4 + 7aq)$$

bei auffallend hohen Drucken verläuft. Hier läge die Möglichkeit

3) R. Hollmann, Zeitschr. f. phys. Chem. 37, S. 209, 1901.

vor, daß die Dampfdruckkurve einer Mischungsreihe mit abnormer Molekülverteilung gemessen worden ist.

Für die Eisensalmiak-Kristalle ist die Verknüpfung abnormer Löslichkeit mit anomaler Doppelbrechung evident. Bei den monoklinen Mischkristallen $ZnSO_4 + 7aq$ und $CuSO_4 + 7aq$ ist diese Verknüpfung sehr wahrscheinlich. Aber auch sonst scheinen solche Fälle nicht selten zu sein.

In den Mischkristallen mit anomaler Doppelbrechung bestehen häufig Spannungen, die sogar den Betrag der Reißfestigkeit der Kristalle erreichen können, da ein spontanes Zerspringen von Mischkristallen mit abnormer Doppelbrechung beobachtet wurde. Daß diese Spannungen die Doppelbrechung beeinflussen, ist nicht zu bezweifeln, denn durch eine künstlich angelegte Spannung an einen Kristall ohne Doppelbrechung kann diese erzeugt werden. Fraglich ist nur, ob die vorhandenen optischen Anomalien restlos auf in den Mischkristallen bestehende Spannungen zurückgeführt werden können, oder ob die abnorme Molekülverteilung an sich auch schon zur Entstehung einer Doppelbrechung hinreicht.

Nach R. Brauns[1]) verhalten sich die $Ba(NO_3)_2$-armen Mischkristalle des $Pb(NO_3)_2$ wie $Pb(NO_3)_2$-kristalle, welche senkrecht zu einer Oktaederfläche gedehnt sind. Durch Anlegen eines Drucks senkrecht zu dieser Ebene kann bei $Ba(NO_3)_2$-armen Mischkristallen die durch jene Dehnung entstandene Doppelbrechung kompensiert werden. Hieraus ist aber noch nicht zu schließen, daß die Doppelbrechung durch Spannungen allein bedingt ist, denn der Teil der Doppelbrechung, welcher auf die Spannungen kommt, ist wie der, welcher auf die abnorme Molekülverteilung kommt, unbekannt. Die Bemerkung von R. Brauns, daß die doppelbrechenden Kristalle beim Pressen sehr leicht zerspringen, scheint dafür zu sprechen, daß in $Ba(NO_3)_2$-reicheren Kristallen die Doppelbrechung durch einen äußeren Druck nicht mehr kompensiert werden kann, da vor der Erreichung des Kompensationsdruckes die Druckfestigkeit überschritten wird. Wenn das der Fall ist, so kann der gesamte Betrag der Doppelbrechung nicht auf Spannungen allein zurückgeführt werden.

Auch auf einem zweiten Wege könnte die Frage entschieden werden, ob das abnorme Verhalten eines Mischkristalls mit anomaler Doppelbrechung nur durch innere Spannungen oder direkt auch durch die abnorme Molekülverteilung bedingt wird. Wenn nämlich der Einfluß der abnormen Molekülverteilung auf die Lös-

1) R. Brauns, l. c. S. 224 u. 225.

lichkeit des Mischkristalls nicht nur durch Spannungen bedingt wird, so müßte der berechenbare Einfluß der Spannung auf die Löslichkeit kleiner sein als die Differenz zwischen den gefundenen Löslichkeiten des normalen und des abnormen Mischkristalls.

Den Einfluß der Spannung P in einem Kristall auf seine Löslichkeit x gibt die leicht abzuleitende Formel:

$$RTln\frac{x}{x_0} = -\frac{M}{d}\,\frac{\mu}{3}\,\frac{P^2}{2}$$

x_0 ist die Löslichkeit des Kristalls ohne Spannung, x die Löslichkeit eines Kristalls, in dem die Spannung P herrscht, μ die kubische Kompressibilität der Volumeneinheit des Kristalls und $\frac{M}{d}$ sein mittleres Molekularvolumen, R die Gaskonstante und T die absolute Temperatur. Da μ und P entgegengesetzte Vorzeichen haben, so wird $x > x_0$ sein, gleichgültig ob die Spannung als Druck oder Zug wirkt.

Erreicht die Zug- oder Druckfestigkeit des Kristalls den hohen Wert von 1000 kg pro 1 qcm, ist $\frac{\mu}{3} = 0.000003$ cm und $\frac{M}{d} = 50$ ccm, so wird, wenn im Kristall bei 18⁰ eine Spannung des maximalen Betrages von 1000 kg pro 1 qcm wirkt, $ln\frac{x}{x_0} = 0.003$ oder $x = 1.003\ x_0$ sein. Die Löslichkeit würde also durch die maximale Spannung, die der Kristall verträgt, um etwa 0.3 % erhöht werden.

Genauer genommen wird die Beeinflussung der Löslichkeit durch die Spannung von der Richtung der Spannung im Kristall abhängen. An Stelle von $\frac{\mu}{3}$ hätte man die Dehnung für eine bestimmte Richtung im Kristall einzusetzen. Diese Dehnung würde sich auf ein Prisma vom Querschnitt 1 qcm und dem mittleren Molekularvolumen des Kristalls für 1 kg Spannung beziehen. Die zur Rechnung verwandten Daten dürften einer erheblich größeren Beeinflussung der Löslichkeit durch Wirkung einer Spannung entsprechen als sie bei den Eisensalmiakkristallen zu erwarten ist. Dem berechneten Werte einer zu großen Löslichkeitserhöhung von etwa 0.3 % steht eine maximale Differenz verschiedener Löslichkeiten eines Eisensalmiakkristalles derselben Zusammensetzung aber verschiedener anomaler Doppelbrechung von 50 % gegenüber.

Die Löslichkeitserhöhung in Folge anomaler Doppelbrechung, kann nur zu einem kleinen Teil auf Spannungen im abnormen Mischkristall zurückgeführt werden.

Die Annahme einer abnormen Molekülverteilung in den Mischkristallen mit anomaler Doppelbrechung scheint zur Deutung der beobachteten Erscheinungen hinreichend zu sein.

Bei den Mischkristallen der Alaune und der Nitrate des Pb, Ba und Sr bestehen die abnormen Kristalle aus Pyramiden, deren Basen die Kristallflächen sind. Die Pyramiden haben die optischen Eigenschaften einachsiger Kristalle, deren ausgezeichnete Achse auf einer Oktaederebene senkrecht steht.

Wären die Gitter-Arten jener Mischkristalle bekannt, so könnte man die betreffende Molekülverteilung, durch welche die regulären Gitter die niedrigere Symmetrie einachsiger Gitter erhalten, angeben. Je nach der Molekülverteilung kann dem kubischen 8-Punkt-Gitter die reguläre Symmetrie oder die eines einachsigen Kristalls erteilt werden. So können beispielsweise für das Mischungsverhältnis gleicher Mengen beider Molekülarten, die Punkte des 8-Punkt-Gitters einmal so besetzt werden, daß die beiden Molekülarten auf den Geraden parallel den Würfelkanten einander abwechselnd folgen, dann kommt der Verteilung die reguläre Symmetrie zu, oder jene Geraden werden nur mit einer Molekülart besetzt, so daß auf den Würfelebenen einer Zone einer Geraden mit einer Molekülart eine mit der anderen folgt; dann kommt der Verteilung die Symmetrie eines einachsigen Kristalls zu. Es ist also möglich den Mischkristallen mit anomaler Doppelbrechung eine Molekülverteilung bestmöglicher, mit der anomalen Symmetrie verträglichen Durchmischung zuzuordnen, also die Gründe der optischen Anomalien in sehr spezieller Weise anzugeben.

Die von P. Groth[1]) als polysymmetrische Formen ein und desselben Stoffes bezeichneten Abarten des Polymorphismus können, soweit sie nicht als Verwachsungen von Zwillingslamellen und als polymorphe Formen mit sehr kleinen Volumenänderungen und Umwandlungswärmen zu deuten sind, wohl auch als Mischkristalle abnormer Molekülverteilung aufgefaßt werden. Auch diese Art polysymmetrischer Kristalle abnormer Symmetrie besteht aus Pyramiden, deren Basen die Begrenzungsebenen des Kristalls sind, und diese Segmente haben eine niedrigere Symmetrie als die Form des ganzen Kristalls. Sie unterscheiden sich aber von den anomalen Mischkristallen dadurch, daß sie auch bei Kristallen auf-

1) P. Groth, Einleitung in die chem. Kristallographie, 1904, S. 4—6.

treten, die entsprechend dem Gesetze der multipeln Proportionen aufgebaut sind. Da aber die Polysymmetrie der beschriebenen Art nur bei Doppelsalzen z. B. bei dem

$$(UO_2)_3 Mg Na (C_2 H_3 O_2)_9 . 9H_2 O$$ [1]

und bei den Glaseriten:

$$3K_2SO_4, \; Na_2SO_4$$ [2] und $$3K_2CrO_4 Na_2CrO_4$$ [3]

beobachtet wurden, und diese Doppelsalze, insbesondere die Glaserite, deren Zustandsdiagramme bekannt sind, als Mischkristalle betrachtet werden dürfen, so könnte ihre Polysymmetrie ebenfalls auf verschiedene Verteilungen der beiden Molekülarten im Gitter zurückgeführt werden.

Die optisch anomalen Mischkristalle können als Isomere der optisch normalen Mischkristalle aufgefaßt werden. Der Grund der Isomerie ist hier eine verschiedene Verteilung der Moleküle in demselben Raumgitter, während er bei der gewöhnlichen Isomerie eine verschiedene Verteilung der Atome im Molekül ist.

Die Mischkristalle abnormer Molekül- oder Atomverteilung im Gitter sind aus atomistischen Gründen total instabile Phasen, denen kein Zustandsfeld zukommt, in dem sie stabiler als ihre Gitterisomeren mit normaler Molekülverteilung sind. Bei hinreichender Temperaturerhöhung wandeln sich die Formen mit abnormen Eigenschaften in die mit normalen um und diese Umwandlung ist nicht reversibel.

---

1) H. Steinmetz, Zeitschrift f. phys. Chem. 52, S. 450, 1905.

2) Gossner, Zeitschr. f. Kristg. 39, S. 167, 1904. Johnsen, Neues Jahrb. f. Min., Beil. Bd. 23, S. 270, 1907. Nacken, Neues Jahrb. f. Min., Beil. Bd. S. 55, 1907.

3) E. Flach, Mitteilg. aus d. Inst. f. Min. d. Univ. Leipzig, N. 37, S. 21—24 u. 27, 1912.

Der erste Elektronenring der Atome.

Von

P. Debye.

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. Juni 1917.

Im Folgenden möchte ich die Durchführung einiger Gedanken kurz skizzieren, welche sich befassen mit der Frage nach der Zahl und Lagerung derjenigen Elektronen, welche im Atom dem Kern am Nächsten liegen.

Für die Frequenz der stärksten Linie $K\alpha_1$ der K-Serie im Röntgenspektrum der Elemente wurde von Moseley die Darstellung vorgeschlagen:

$$\frac{\nu}{R} = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)(z-1)^2, \tag{1}$$

(ν = Schwingungszahl, R = Rydberg'sche Zahl, z = Stellenzeiger des betreffenden Atoms). Nach Bohr könnte man das etwa so auffassen, als ob die Frequenz entsteht beim Übergang eines Elektrons von einer zweiquantigen Bahn $\left(\frac{1}{2^2}\right)$ auf eine einquantige $\left(\frac{1}{1^2}\right)$ um einen Kern, der vielleicht durch ein nächstes Elektron auf $z-1$ Elementarladungen abgeschirmt ist.

Neuerdings schlägt Sommerfeld statt (1) vor die Formel[1]):

$$\frac{\nu}{R} = \frac{(z-1,6)^2}{1^2} - \frac{(z-3,5)^2}{2^2} \tag{2}$$

und bezeichnet es als wesentliche Frage einen Grund dafür zu finden, warum die „Abschirmungszahlen“ 1,6 und 3,5 nicht ganz-

1) Eine Relativitätskorrektion bleibe vorläufig unberücksichtigt.

zahlig sind, indem er sich mit Recht darauf beruft, daß seine Darstellung die Beobachtungen viel besser wiedergibt als (1). Es schien mir, daß es zu speziell ist sich darauf beschränken zu wollen, daß ein einzelnes Elektron beweglich in zwei, durch die Quantenzahlen differenzierten Bahnen, für die Erzeugung der betreffenden K-Linie vorantwortlich ist. Vielleicht könnte eine Zusammenwirkung mehrerer Elektronen zugleich bei der Erzeugung jener Frequenz bestehen. Dann konnte das Auftreten von gebrochenen Zahlen nicht Wunder nehmen.

Von diesem Gesichtspunkte aus wurde versucht wie die Formel für die Frequenz lautet, wenn Folgendes angenommen wird:

Um einen Kern von der Ladungszahl z bewegt sich ein einquantiger Ring von p-Elektronen. Eines dieser Elektronen kann abgespalten werden und einzeln auf einen zweiquantigen Ring gebracht werden. Der Übergang von der einen in die andere Anordnung der p Elektronen erzeugt die $K\alpha_1$-Linie.

Rechnet man mit unveränderlicher Elektronenmasse, dann ergibt sich hiernach $\frac{\nu}{R}$ stets als quadratische Funktion von z in der Form:

$$\frac{\nu}{R} = A_p z^2 + B_p z + C_p; \tag{3}$$

A_p ist von p unabhängig gleich $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$, B_p und C_p dagegen hängen von p ab und sind leicht für $p = 1, 2, 3$ u. s. w. zu berechnen. Vergleicht man nun die Differenz:

$$\varDelta = \frac{\nu}{R} - \frac{3}{4} z^2, \tag{4}$$

wie sie aus den Beobachtungen folgt mit der aus (3) folgenden theoretischen Darstellung:

$$\varDelta = B_p z + C_p, \tag{5}$$

dann findet nur dann Übereinstimmung zwischen Theorie und Rechnung statt und zwar zunächst auch nur bei Atomen mit kleinem z, für $p = 3$; alle anderen Werte von p sind ausgeschlossen[1]). Unsere Vermutung bestätigt sich also und liefert zunächst wenigstens für die Anfangsatome des periodischen Systems das Resultat:

Der erste Elektronenring der Elemente enthält drei Elektronen.

1) Dabei ist dann der Theorie nach $B_3 = -1{,}4641$ und $C_3 = -0{,}1250$.

Mit größer werdendem z treten indessen Abweichungen der beobachteten Werte von Δ gegen die nach (5) berechneten auf. Diese Differenz, welche erst negativ war, erreicht ein Minimum und steigt dann sehr schnell durch Null nach positiven Werten. Nun haben wir aber die Massenveränderlichkeit des Elektrons bei der Berechnung von (3) außer Acht gelassen, es könnte sein, daß die beobachteten Abweichungen von der Geraden:

$$\Delta = B_3 z + C_3$$

ihre Ursache finden in dieser Ungenauigkeit der Rechnung.

Auch diese Vermutung bestätigt sich. Berücksichtigt man die Massenveränderlichkeit nach den Ansätzen der Relativitätstheorie, dann hat man (3) zu ersetzen durch:

$$(6)\quad \frac{\nu}{R} = \mu c^2 \left[-6\sqrt{1-\varrho\,(z-S_3)^2} + 2\sqrt{1-\frac{\varrho}{4}\,(z-2)^2} + 4\sqrt{1-\varrho\,(z-S_2)^2}\right]$$

mit

$$S_2 = 0{,}25000 \quad \text{und} \quad S_3 = 0{,}57735,$$

während ϱ eine Abkürzung ist für den Ausdruck:

$$\varrho = \frac{2hR}{\mu c^2}.$$

(h = Wirkungsquantum, μ = Elektronenmasse, c = Lichtgeschwindigkeit).

Tatsächlich bewirken die Korrektionen, welche nach (6) an die frühere Rechnung anzubringen sind, daß nunmehr auch die theoretische Darstellung der Differenz Δ als Funktion von z ein negatives Minimum erreicht und dann schnell durch Null nach positiven Werten ansteigt. Auch der quantitative Anschluß ist recht befriedigend. Man kann daraufhin den oben hervorgehobenen Satz als bestätigt ansehen.

Allerdings bleiben schließlich noch kleine und sehr stark schwankende Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung übrig. Auffallenderweise haben diese letzten Differenzen aber alle dasselbe Vorzeichen und wachsen offenbar mit wachsendem Stellenzeiger.

Wie auch diese Differenzen einzuordnen sind scheint mir aus einer Überlegung hervorzugehen, welche an die zweitstärkste Linie K_{β_1} der K-Serie angeknüpft werden kann. Man kann vermuten, daß das losgelöste Elektron neben einer zweiquantigen auch eine dreiquantige Bahn beschreiben kann. Bildet das System der drei Elektronen (zwei in eine einquantige, eins in eine zwei-

quantige Bahn) sich zum Normalzustand zurück, dann wird eine Frequenz ausgesandt, welche man versuchsweise mit K_{β_1} in Zusammenhang zu setzen versuchen kann. Nach Anbringung der nötigen Relativitätskorrektion müßte dann für K_{β_1} die Formel gelten:

$$\frac{\nu}{R} = \mu c^2 \left[-6\sqrt{1-\varrho(z-S_3)^2} - 2\sqrt{1-\frac{\varrho}{9}(z-2)^2} + 4\sqrt{1-\varrho(z-S_2)^2} \right].$$

Tatsächlich aber bleiben auch hier letzte Differenzen gegen die Beobachtung zurück, welche erheblich größer sind, als die bei K_{α_1} konstatierten. Hält man trotzdem fest an das vorgeschlagene Bild, dann wird man zur Ansicht kommen, daß noch eine Störung unberücksichtigt blieb, welche sich bei K_{β_1} mit dem größeren, dreiquantigen Ringe in stärkerem Maße bemerkbar macht als bei K_{α_1} mit dem kleineren, zweiquantigen Ringe, also eine Störung, die man in die Außenelektronen zu verlegen hat.

Sommerfeld hat über die Wirkung einer solchen Störung Rechnungen angestellt. Wendet man sein Resultat auf die letzten Differenzen bei der K_{β_1}-Linie an, dann müssen sich dieselben in erster Näherung proportional z^2 erweisen. Das tun sie tatsächlich. So lange man sich über die Lagerung der Außenelektronen keine bestimmte Vorstellung bildet, bleibt der Proportionalitätsfaktor unbestimmt und kann nur aus der Messung als empirisch gegebene Zahl ermittelt werden. Es läßt sich aber doch eine Probe machen. Aus der Theorie folgt nämlich, daß natürlich eine ähnliche aber kleinere Störung sich auch noch beim zweiquantigen Ringe der K_{α_1}-Linie bemerkbar machen muß und zwar sollten sich die Proportionalitätsfaktoren von z^2 für die Differenzen bei K_{α_1} und K_{β_1} verhalten wie 2^4 zu 3^4. Berechnet man hiernach aus der empirisch ermittelten Korrektion von K_{β_1} die entsprechende von K_{α_1}, so trifft man tatsächlich das Richtige.

Zusammenfassend glaube ich es nach alledem als sehr wahrscheinlich annehmen zu dürfen, daß der erste Elektronenring aller Elemente (mit Ausnahme der Anfangselemente des periodischen Systems) aus 3 Elektronen besteht.

Göttingen, Physik. Institut.

Riemannsche Funktionen- und Differentialsysteme.

Von

Robert König in Tübingen.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 3. März 1917.

In einer Reihe von Arbeiten[1]) habe ich eine Theorie der Riemannschen Funktionensysteme mit gegebener Monodromiegruppe und ihrer Integrale bezw. Differentiale entwickelt. Als Spezialfall, wenn die Gruppe aus lauter Vertauschungssubstitutionen besteht, erhalte ich eine neue Theorie der algebraischen Funktionen und Differentiale rein von der Gruppe aus, welche sich als dritter und allgemeinster Weg neben die beiden bisherigen reiht, welche teils von der Gleichung, teils von der Fläche ausgehen.

Es sei gestattet, im folgenden einige der Haupt-Gedanken und -Sätze der allgemeinen Theorie in knappester Übersicht zu geben[2]).

---

1) I. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der Riemannschen Funktionenpaare. 22. Juli 1915. Math. Ann. 1917.

II. Riemannsche Funktionen- und Differentialsysteme in der Ebene. November 1916. Crelles Journal.

III. Die Charakterisierung der Riemannschen Transzendenten und andere Theoreme. 6. Februar 1917. Jahresbericht d. Deutschen Math. Ver.

IV. Die Elementartheoreme und die Vertauschungstheoreme 1. Ordnung bei den Riemannschen Transzendenten. 6. Juni 1917.

Diese infolge des Krieges ungedruckten Arbeiten können leider noch nicht genauer zitiert werden. Vergl. ferner die älteren, den Fall $n = 1$ betreffenden Arbeiten:

V. Zur arithmetischen Theorie der auf einem algebraischen Gebilde existierenden Funktionen. Leipziger Berichte 1911. S. 348 ff.

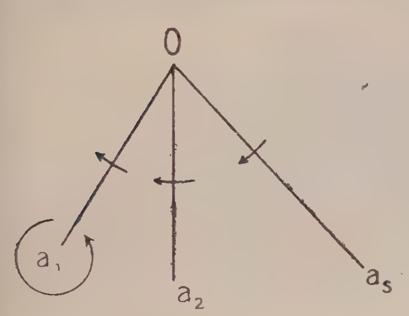
VI. Arithmetische Theorie der verzweigten multiplikativen Funktionen und Differentiale. Crelles Journal. Bd. 146 (1916). S. 161 ff.

2) Wegen aller näheren Angaben muß auf die genannten Arbeiten verwiesen werden

Grundlagen: Es seien in der z-Ebene s Punkte a_σ und zugehörige lineare homogene Substitutionen A_σ mit dem Produkt 1 gegeben. Alle Funktionensysteme $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$, welche dieselben A_σ erfahren [1]), bilden eine *Klasse* (K), ebenso die

$$y = (\breve{y}_1, \breve{y}_2, \ldots \breve{y}_n)$$

mit den komplementären (kontragradienten) $\breve{A}_\sigma$ die *komplementäre Klasse* $(\breve{K})$. Die y_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ denken wir uns auf n Blättern der geeignet zerschnittenen Ebene E' (s. Skizze!) ausgebreitet und die bei $z = p$ z. B. übereinanderliegenden Punkte mit $\mathfrak{p}_i$ bezeichnet. Für jede Stelle a_σ — kurz a — muß ein Fundamentalsystem $\overset{a}{y} = (\overset{a}{y}_1, \overset{a}{y}_2, \ldots \overset{a}{y}_n) = L^{-1}y$ willkürlich, aber ein für allemal festgelegt werden, welches die Substitution



$$B = L^{-1}AL = \begin{pmatrix} e_1 & & & & & \\ 1 & e_1 & & & & \\ & & \cdot\cdot\cdot & & & \\ & & & e_2 & & \\ & & & 1 & e_2 & \\ & & & & & \cdot\cdot\cdot \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} e_1 = e^{2i\pi\alpha_1}, \ldots, \\ \alpha_1 = \alpha_1' + i\alpha_1'', \ldots, \\ 0 \leqq \alpha_1' < 1, \ldots \end{matrix}$$

die Normalform von A, erfährt. Zu jeder Stelle von E' gehören dann n eindeutig bestimmte Funktionselemente

$$y_i(z_t) = P_i(t) \quad \text{für } z_t = z_0 + t \ \text{ bezw. } = \frac{1}{t}$$

und für $z_t = a + t$, wenn z. B. die erste „Kette" von B $\varkappa$-gliedrig ist,

$$\begin{aligned}
\overset{a}{Y}_1 &= \overset{a}{y}_1 = t^{\alpha_1} P_1(t), \\
\overset{a}{Y}_2 &= \overset{a}{y}_2 - \frac{1}{2\pi i . e_1} \lg(t)\, \overset{a}{y}_1 = t^{\alpha_2} P_2(t), \\
&\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
\overset{a}{Y}_\varkappa &= \overset{a}{y}_\varkappa - \frac{1}{2\pi i . e_1} \lg(t)\, \overset{a}{y}_{\varkappa-1} = t^{\alpha_\varkappa} P_\varkappa(t), \\
\overset{a}{Y}_{\varkappa+1} &= \overset{a}{y}_{\varkappa+1} = t^{\alpha_{\varkappa+1}} P_{\varkappa+1}(t), \\
&\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
&\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot
\end{aligned}$$

1) Den Nachweis ihrer Existenz sehen wir durch die Arbeiten von Hilbert, Plemelj u. A. als erbracht an.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sind die reduzierten Exponenten von (K) und z. B. $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\varkappa$. Statt von der Gesamtheit der Funktionselemente $(y_i, \overset{a}{y}_i)$ spreche ich kurz von der „*Funktion*" $(y, \overset{a}{y})$ von (K) und dem „*Differential*" $(dJ, d\overset{a}{J}) = (y\,dz, \overset{a}{y}\,dz)$ von (K).

Daneben betrachte ich in $(\breve{K})$, das mit (K) zusammenfallen kann, die „*Funktionen*" $(\breve{y}, \overset{\dot{a}}{y})$ und „*Differentiale*" $(d\breve{J}, d\overset{\dot{a}}{J})$, wobei das System

$$\overset{\dot{a}}{y} = (\overset{\dot{a}}{y}_1, \overset{\dot{a}}{y}_2, \ldots \overset{\dot{a}}{y}_n) = (\breve{L}T)^{-1}\breve{y}$$

(bezw. T) so festgelegt ist, daß es die Substitution

$$\dot{B} = T^{-1}\breve{B}T = \begin{pmatrix} \frac{1}{e_1} & & & & & \\ 1 & \frac{1}{e_1} & & & & \\ & \cdots & & & & \\ & & \frac{1}{e_2} & & & \\ & & 1 & \frac{1}{e_2} & & \\ & & & \cdots & & \end{pmatrix},$$

die Normalform von $\breve{A}$, erfährt. Die reduzierten Exponenten von $(\breve{K})$ sind $\breve{\alpha}_i = -\alpha_i + \varepsilon_i$, wobei $\varepsilon_i = 0, 1$ ist, je nachdem $\Re\alpha_i = 0, \neq 0$ ist[1]).

Auf diese wesentlichen Festsetzungen bauen sich **die Grundbegriffe** der allgemeinen Theorie, die man bislang nur im rationalen bezw. algebraischen Fall gehabt hat. In erster Linie wird eine exakte Verallgemeinerung des Begriffes Nullstelle und Pol durch die Definition gegeben, wann eine Funktion $(y, \overset{a}{y})$ von (K) *Multiplum eines Divisors*

$$\mathfrak{Q} = \begin{cases} \mathfrak{a}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{b}_1^{\mu_1} \ldots \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \mathfrak{a}_n^{\lambda_n} \ldots \mathfrak{b}_n^{\mu_n} \ldots \end{cases}$$

heißt, wo $\mathfrak{a}$ wieder als Repräsentant einer Stelle $\mathfrak{a}_\sigma$ steht, $\mathfrak{b}$ u. s. w. davon verschiedene Stellen bezeichnen; nämlich dann, wenn die Entwicklung statt hat

$$\text{bei } \mathfrak{a}: \qquad \frac{\overset{a}{Y}_i}{t^{\alpha_i}} = t^{\lambda_i}\mathfrak{P}_i(t)$$

1) Wenn in B keine mehrgliedrigen Ketten vorkommen, wie z. B. im algebraischen Fall, ist $T = E$, $\dot{B} = \breve{B}$, im allgemeinen jedoch nicht; daher auch die verschiedene Bezeichnung!

bei $\mathfrak{b}$: $y_i = t^{\mu_i}\mathfrak{P}_i(t)$ u. s. w.

und sonst alle Elemente regulär sind. Ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_\varkappa$ u. s. w., so heißt $\mathfrak{Q}$ ein „*Eigendivisor*" von (K). Sind sämtliche λ, μ nicht negativ, heißt $\mathfrak{Q}$ „ganz".

Die wichtigste (K) eigentümliche Zahl ist das *Geschlecht:*

$$p = \sum\sum \alpha - n + 1$$

die wichtigsten Divisoren

$$\mathfrak{D} = \Pi \begin{Bmatrix} \mathfrak{a}_1^{\alpha_1} \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_n^{\alpha_n} \end{Bmatrix},$$

$$\mathfrak{Z} = \Pi \begin{Bmatrix} \mathfrak{a}_1^{\varepsilon_1} \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_n^{\varepsilon_n} \end{Bmatrix}, \quad \mathfrak{W} = \mathfrak{Z} : \mathfrak{N}_z^2$$

der *Grunddivisor* $\mathfrak{D}$, der *Verzweigungsteiler* $\mathfrak{Z}$, der *Differentialteiler* $\mathfrak{W}$. $\mathfrak{N}_z$ umfaßt die n Unendlichkeitsstellen von z auf den n Blättern. Es ist $\mathfrak{Z}_{(K)} = \mathfrak{Z}_{(\breve{K})}$, $\mathfrak{W}_{(K)} = \mathfrak{W}_{(\breve{K})}$.

Das Differential $(dJ, d\overset{a}{J}) = (y\,dz, \overset{a}{y}\,dz)$ von (K) heißt Multiplum von $\mathfrak{Q}$, wenn $(y, \overset{a}{y})$ Multiplum von $\mathfrak{Q}.\mathfrak{W}^{-1}$ ist.

Die Theoreme, welche den Inhalt der Theorie ausmachen, lassen sich einteilen I. in die arithmetische Sätzegruppe, II. Anzahltheoreme, III. Charakterisierungsätze, IV. Lückentheoreme, V. Elementartheoreme, VI. Vertauschungstheoreme. Wir müssen uns leider darauf beschränken, hier nur einige derselben anzugeben und den Inhalt der andern anzudeuten.

ad I. Die arithmetische Sätzegruppe, welche vor allem die *Basissätze*, den *Diskriminanten*-, den *Komplementen*- und den *Geschlechter-Satz* umfaßt, gedenke ich nebst ihren zahlentheoretischen Analogieen in einer hier folgenden Note darzulegen.

ad II. Das *1. Anzahltheorem* gibt eine Anzahlbeziehung zwischen den Funktionen von (K) und den Differentialen von $(\breve{K})$ und stellt die größte Verallgemeinerung des Riemann-Rochschen Satzes bei den algebraischen Funktionen dar; es lautet:

$$\breve{V}_{\mathfrak{Q}'} = U_{\mathfrak{Q}} + p + q - 1.$$

Hierbei sind $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ zwei beliebige Eigendivisoren von den Ord-

nungen q, q' und dem Produkt $\mathfrak{Q} . \mathfrak{Q}' = \mathfrak{R}$, wo $\mathfrak{R}$ ein rationales Divisorensystem ist; ferner $U_{\mathfrak{Q}}$ die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen $(y, \overset{a}{y})$ von (K), welche Multipla von $\mathfrak{Q}$ sind, und $\breve{V}_{\mathfrak{Q}'}$ die Anzahl der l. u. Differentiale $(d\breve{J}, d\overset{a}{\breve{J}})$ von $(\breve{K})$, welche Multipla von $\mathfrak{Q}'$ sind.

Das *2. bezw. 3. Anzahltheorem* gibt eine entsprechende Beziehung zwischen den Funktionen von (K) und $(\breve{K})$, bezw. den Differentialen von $(\breve{K})$ und (K); das letztere kann als die größte Verallgemeinerung des Brill-Noetherschen Reziprozitätssatzes bei den algebraischen Funktionen aufgefaßt werden[1]).

ad III. Die fundamentale Frage, wodurch eine Funktion bezw. ein Differential innerhalb einer Klasse algebraisch charakterisiert werden kann, wird zunächst für die überall endlichen Funktionen und Differentiale entschieden. Sind τ bezw. σ $[\breve{\tau}, \breve{\sigma}]$ ihre Anzahlen (d. h. der linear unabhängigen unter ihnen), so zeigt es sich, daß dazu gerade τ bezw. σ $[\breve{\tau}, \breve{\sigma}]$ Punkte ausreichen. (*Vorbereitungssatz der algebraischen Charakterisierung für Funktionen und Differentiale*). Für eine Funktion[2]) von (K) bezw. ein Differential[2]) von $(\breve{K})$ mit beliebigen Unendlichkeitsstellen werden dann die $\breve{\sigma}$ bezw. τ notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt, denen die Koeffizienten dieser Stellen genügen müssen. (*Residuensätze für Funktionen und Differentiale.*) Letztere auf die Differentiale bezüglichen Bedingungen stellen wieder die weitest gehende Verallgemeinerung des Residuensatzes bei den algebraischen Funktionen dar. Schließlich kann der *Hauptsatz von der algebraischen Charakterisierung* so ausgesprochen werden.

Sind $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ zwei ganze Divisoren der Ordnungen τ und σ und von der Eigenschaft, daß es keine überall endliche Funktion von (K) bezw. kein überall endliches Differential von $(\breve{K})$ gibt, welches Multiplum von $\mathfrak{N}$ bezw. von $\mathfrak{M}$ ist[3]), dann existiert eine und nur eine Funktion von (K), bezw. ein und nur ein Differential von $(\breve{K})$, welches den oben erwähnten $\breve{\sigma}$ bezw. τ Relationen genügende, im übrigen willkürlich vorgegebene „Hauptteile" und an den τ bezw. $\breve{\sigma}$ Stellen von $\mathfrak{N}$ bezw. von $\mathfrak{M}$ vorgegebene Werte hat.

1) Siehe für $n = 1$ „VI".

2) Es sind hier und stets die in den „Grundlagen" festgelegten gemeint.

3) Die Existenz solcher nur endliche, von den a verschiedene Punkte enthaltenden Divisoren $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ bildet gerade den Inhalt der „Vorbereitungssätze".

ad IV. Es bestehen *zwei große Lückentheoreme*, eines für die Funktionen, eines für die Differentiale, von denen ich das erstere anführe, welches, auf den algebraischen Fall spezialisiert, den Weierstraßschen Lückensatz (bezw. sogar noch eine bedeutende Verallgemeinerung desselben) ergibt:

Sei

$$\mathfrak{Q}_0 = 1, \quad \mathfrak{Q}_1, \ldots \mathfrak{Q}_\nu, \ldots \mathfrak{Q}_N, \mathfrak{Q}_{N+1}, \ldots$$

eine unbegrenzte Folge von ganzen Divisoren von der Eigenschaft, daß $\frac{\mathfrak{Q}_\nu}{\mathfrak{Q}_{\nu-1}} = \mathfrak{P}_\nu$ ein Primdivisor ist, und $\mathfrak{Q}_N$ der erste in der Reihe, für welchen kein überall endliches Differential von $(\breve{K})$ existiert, welches Multiplum von $\mathfrak{Q}_N$ ist: dann gibt es unter ihnen genau $\breve{\sigma}$, für welche unter den Funktionen von (K) keine genauen Multipla von $\mathfrak{Q}_\nu^{-1}$ vorhanden sind. Dafür gibt es $\breve{\sigma}$ l. u. überall endliche Differentiale von $(\breve{K})$, welche in bezug auf diese „Fehldivisoren“ algebraisch normiert sind.

ad V. Hier werden — außer den bereits aufgestellten, mittels $\mathfrak{N}$ bezw. $\mathfrak{M}$ algebraisch charakterisierten überall endlichen Funktionen bezw. Differentialen von (K) bezw. $(\breve{K})$ — zu jeder Stelle der Ebene je n Elementarfunktionen von (K) bezw. Elementardifferentiale von $(\breve{K})$ der Ordnung h ($h = 1, 2, \ldots$ in inf.) aufgestellt und mittels $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ algebraisch charakterisiert, derart, daß für die Funktionen von (K) die festen Unendlichkeitsstellen bei $\mathfrak{M}$, die festen Nullstellen bei $\mathfrak{N}$ zu liegen kommen, für die Differentiale von $(\breve{K})$ gerade umgekehrt. Die Stellen von $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, sowie die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_\infty$ spielen hierbei eine besondere Rolle. — Darauf gründet sich eine eindeutige *Partialbruchdarstellung*. — Ferner wird eine „Funktion“ $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E}(z, x)$ (eigentlich eine quadratische Matrix von Funktionen) hergestellt, welche in Abhängigkeit von dem Argument z der Klasse (K), von dem Parameter x $(\breve{K})$ angehört, eine variable Unendlichkeitsstelle hat und in bezug auf $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ charakterisiert ist; analog ein „Differential“ $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{d\breve{F}}(x, z)$. Erstere stellt die Verallgemeinerung der Weierstraßschen Grundfunktion $H(xy; x'y')$ dar[1]). Die Entwicklung von beiden nach dem Parameter x bezw. z wird untersucht und liefert sämtliche Zusammenhänge zwischen den Elementarfunktionen und Differentialen, soweit dieselben arithmetischer Natur sind. (*1.—4. Elementartheorem.*)

ad VI. Die Gegenüberstellung von E und $d\breve{F}$ führt schließlich

1) Siehe Weierstraß Bd. IV. 2. Kapitel.

zu drei *Vertauschungstheoremen 1. Ordnung*, derentwegen auf „IV" verwiesen werden muß.

Hiermit sind die Grenzen funktionentheoretischer Erkenntnis zu einem großen Teil von den algebraischen Funktionen und Differentialen zu den Riemannschen Funktionen- und Differentialsystemen vorgetragen; man erkennt die tiefliegenden Ursachen, wodurch den ersteren ihre ausgezeichnete Stellung zukommt: nämlich daß $(K) = (\breve{K})$ ist, $\tau = 1$ und daher $\sigma = p$, und schließlich zur Klassen- die Körper-Eigenschaft tritt; und es offenbart sich eine wunderbare Geschlossenheit in dem Aufbau der Riemannschen Funktionentheorie beginnend mit der Klasse der rationalen Funktionen; der multiplikativen Funktionen; der Riemannschen Funktionenpaare mit dem Spezialfall der elliptischen, hyperelliptischen, P-Funktionen; der Riemannschen Funktionensysteme mit dem Spezialfall der algebraischen Systeme; dann nach vollzogenem Übergang zur geschlossenen Fläche[1]) die Klasse der eindeutigen algebraischen Funktionen auf ihr, der multiplikativen Funktionen und schließlich der Riemannschen Funktionensysteme auf ihr. Gebiete, die bis dahin völlig getrennt waren oder als solche behandelt wurden — und es gehören ja fast alle näher bekannten Funktionsklassen hierher, wenn man von solchen mit wesentlichen Singularitäten absieht — sie bilden eine Einheit und gehorchen demselben einfachen arithmetischen Gesetz.

Berlin, 27. Februar 1917.

---

1) Siehe „I" und „II" letzter Abschnitt.

Die Duktilität der Metalle und ihre Stellung im periodischen System.

Von

G. Tammann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. Juni 1917.

Lothar Meyer[1]) hat die Abhängigkeit des Atomvolumens vom Atomgewicht durch die bekannte Kurve mit ausgeprägten Maximas bei den Alkali-Metallen dargestellt und bemerkt, daß duktil nur diejenigen Elemente sind, deren Atomvolumen in einem Maximum oder Minimum und auf den ihnen sich anschließenden Kurvenstücken liegen. Das Atomvolumen der duktilen, leichten Metalle findet man in den Maximalpunkten, auf den an diese sich anschließenden, absteigenden Kurvenstücken, sowie beim zweiten und dritten Minimum der Kurve. Das Atomvolumen der duktilen, schweren Metalle liegt beim 4-ten, 5-ten und 6-ten Minimum der Kurve und in den an diese sich anschließenden, emporsteigenden Kurvenstücken.

Im Folgenden soll versucht werden die Gründe dieser formal so einfachen Regel darzulegen, die allerdings entsprechend neueren Erfahrungen anders zu formulieren wäre. Hierzu sind zuerst die Grundbedingungen der Duktilität zu erörtern, und da diese von der Art der Raumgitter, welche die Atome der Elemente besetzen, in erster Linie abhängen, so wird es notwendig sein, die Raumgitter der Metalle zu bestimmen. Hierzu hilft uns der Satz, daß isomorphen Metallen verschiedener Stoffe Raumgitter derselben Art zukommen. Auf diesem Wege gelangt man zur Einsicht der Gründe jener entsprechend abgeänderten Regel.

---

1) Die modernen Theorien der Chemie. 5. Auflage. 1884. S. 187.

Die Grundbedingung der Deformierbarkeit eines Konglomerates dicht aneinander liegender Kristalliten ohne Lockerung seines Zusammenhanges ist folgende. Bilden sich bei der Beanspruchung über die Elastizitätsgrenze in einem Teil der Kristallite, nämlich den günstig orientierten, Gleitebenen, die den Kristalliten in hinreichend kleine Polyeder zerlegen, so tritt eine dauernde Deformation ohne Lockerung des Zusammenhanges der Kristallite ein. Mit der Größe der Deformation wächst die Zahl der Kristallite, deren durch Gleitebenen entstandene Teil-Polyeder sich gegen einander verschoben haben, bis schließlich auch der letzte Kristallit der Deformation unterliegt, und damit die Fließgrenze erreicht ist. Wirken auf ein Kristalliten-Konglomerat hinreichende Kräfte wiederholt in gleicher Richtung, so werden die Gleitflächen hauptsächlich in dieser Richtung entstehn und der Körper streckt sich in der betreffenden Richtung, wie beim Hämmern, Walzen oder Drahtziehn. Außerdem entstehn noch Nebengleitebenen in anderen Richtungen in allen Kristalliten, deren Gleitebenen nicht parallel der Streckungsrichtung verlaufen. Durch ihre Bildung wird die Verschiebung in der Streckrichtung ermöglicht, und je kleiner die Winkel der Nebengleitebenen mit der Streckrichtung sind, um so leichter wird die Verschiebung vor sich gehen. Je mehr Gleitebenen in der Richtung der Hauptstreckung entstehn und je geringer die zur Verschiebung notwendigen Kräfte sind, die von der Reibung bei der Verschiebung und von dem Winkel der Nebengleitebenen zur Verschiebungsrichtung abhängen, desto leichter und fehlerloser wird die Streckung bei jenen Operationen vor sich gehn.

Von Bedeutung für die Duktilität wird auch das Fehlen einer ausgesprochenen Spaltbarkeit des betreffenden Materials sein. Kristalle mit ausgesprochener Spaltbarkeit wie Kalkspat und Wismut erscheinen bei ihrer Deformation spröde, weil sie durch Bildung von Spaltungsebenen zerfallen, obwohl in ihnen bei geeigneter, vorsichtiger Deformation auch Verschiebungen ohne Lockerung des Zusammenhanges auftreten können. Der schädliche Einfluß der Spaltbarkeit kann beseitigt werden, wenn die durch Spaltbarkeit bedingte Trennung des Arbeitsstückes in einzelne Teile verhindert wird. So lassen sich aus dem spröden Marmor Denk-Münzen prägen, und aus dem ebenfalls als spröde bekannten Wismut feine Drähte spitzen.

Ein exaktes Maß der Duktilität wird offenbar nicht existieren, da sie von mehreren Materialkonstanten und auch von der Art der Beanspruchung des Arbeitsstückes abhängt. Dementsprechend

ist auch eine wirkliche Definition der Eigenschaft: duktil, nicht möglich. Unter dem Wort duktil soll entsprechend dem landläufigen Gebrauch verstanden werden: die Fähigkeit eines Materials sich zu Drähten durch Ziehen formen zu lassen.

Die Fähigkeit zur Gleitflächen-Bildung und die Orientierung der möglichen Gleitflächen im Kristall wird bei gleicher Gitterbesetzung wahrscheinlich nur von der Art des Gitters, nicht aber von der Natur der dasselbe besetzenden Atome abhängen. Von ihnen werden die Reibung und die zum Eintreten der Gleitung gerade hinreichenden Kräfte abhängen, welche außerdem noch Funktionen der Temperatur und des Druckes sind. Diese Annahme wird für die einfachste Art der Gitterbesetzung, nämlich einer Besetzung mit nur einer Art von Atomen, wahrscheinlich zutreffen. Für Gitter derselben Art mit mehreren Atomarten braucht sie wegen eventuell verschiedener Bindungen der Atomarten unter einander nicht zuzutreffen.

Es wird also auf den Nachweis ankommen, daß die Atome gewisser Gruppen von Metallen die Punkte derselben Raumgitterart besetzen. Auf die Abstände der Atomzentren von einander, den Gitterparameter, soll es hierbei nicht ankommen, da diese die Orientierung der Gleitflächen nicht beeinflussen werden, wohl aber die Kräfte, die zu ihrer Erzeugung notwendig sind, und die Reibung bei der darauf eintretenden Schiebung.

Direkte Bestimmungen der Gitterarten und ihrer Parameter nach den Methoden von Bragg und Debye liegen naturgemäß nur für wenig Metalle vor. Nimmt man aber den Satz zur Hilfe, daß die Atome isomorpher Stoffe Gitter derselben Art besetzen, die sich nur hinsichtlich ihrer Parameter unterscheiden, so können wir auf Grund unserer Kenntnis[1]) des Isomorphismus der Metalle für eine nicht unerhebliche Anzahl von Metallen ihre Gitterart angeben.

In der folgenden Tabelle ist durch das Zeichen $\sim$ an der Stelle, die beiden Metallen gemeinsam ist, die lückenlose Mischbarkeit derselben im Kristallzustande bezeichnet; der Buchstabe L gibt an, daß in der Mischkristallreihe eine Lücke auftritt.

---

1) Lehrb. der Metallographie 1914 S. 232—243.

	Cu	Ag	Au	β—Ni	Pd	Pt	β—Co	Rh	Ir	γ—Fe
Ag	L									
Au	∼	∼								
β—Ni	∼	L	L							
Pd	∼	∼	∼	∼						
Pt	∼	L	∼	∼						
β—Co	L	L	L	∼						
Rh										
Ir										
γ—Fe	L	L	L	∼		∼	∼			
Ru										
Os										
Mn	∼	L	∼	∼			∼			∼
Cr	L	L		L			∼			L
Mo				L			L			
W				∼						∼
V										
Nb										
Ta										

Wenn ein Metall mit zwei anderen je eine lückenlose Mischkristallreihe bildet, so brauchen diese beiden mit einander nicht ebenfalls eine lückenlose Mischkristallreihe zu bilden, obwohl alle drei Metalle der ersten Feststellung entsprechend mit einander isomorph sind.

Au und Cu sowie Au und Ag kommen lückenlose Mischkristallreihen zu, aber für Cu und Ag trifft das nicht zu, wogegen alle drei Metalle Cu, Ag und Au mit Pd lückenlose Mischkristallreihen bilden. Mit β—Ni bildet eine solche nur Cu, mit Pt und Mn bilden sie nur Cu sowie Au, und mit β—Co und γ—Fe bildet keines der drei Metalle eine lückenlose Mischkristallreihe. Dennoch sind β—Co und γ—Fe mit Cu, Ag und Au isomorph, da einerseits Mn mit Cu und Au lückenlose Mischkristallreihen und anderseits Mn mit β—Co und γ—Fe ebenfalls lückenlose Mischkristallreihen bildet.

Es sind die Metallpaare mit lückenlosen Mischkristallreihen isomorph, aber man darf den Satz nicht umkehren, denn nicht alle isomorphen Stoffe bilden mit einander lückenlose Mischkristallreihen.

Auf Grund jener Tabelle darf man also die Metalle: Cu, Ag,

Au, β—Ni, Pd, Pt, β—Co, γ—Fe, Mn, Cr, W und V als isomorph erklären, und ihnen dieselbe Gitterart zuschreiben.

Von Bragg ist das Raumgitter des Cu als das 14 Punkt-Gitter erkannt worden, die Ecken des Elementarwürfels dieses Gitters sind mit Atomen besetzt und ebenso die Mitten seiner Würfelebenen. Diese Gitterart liegt also den aufgezählten Metallen zu Grunde.

Der Frage warum nicht lückenlose Mischkristallreihen für alle Kristalle derselben Gitterart bestehen, kann man nähertreten auf Grund weiterer Bestimmungen von Bragg der Gitter-Parameter für Cu, Ag und Au, die ich einer Zusammenstellung von A. Johnson[1]) entnehme. Der Gitterparameter, die Länge der Kante eines Elementarwürfels, hat für diese Metalle folgende Werte:

Cu 3.61×10^{-8} cm
Ag 4.08
Au 4.07

Wenn der Gitterparameter für das Auftreten einer Mischungslücke in der Weise bestimmend wäre, daß unterhalb einer bestimmten Parameter-Differenz lückenlose Mischbarkeit bestände, beim Überschreiten derselben aber die Lücke aufträte, so wäre zu erwarten, daß Ag und Au wegen Gleichheit ihrer Parameter eine lückenlose Mischkristallreihe bildeten, und Cu und Ag ebenso wie Cu und Au entweder eine lückenlose Mischkristallreihe oder eine mit einer Lücke. Während aber Cu und Au eine lückenlose Mischkristallreihe bilden, tritt in der des Cu und Ag eine Mischungslücke auf, die von 4.5 bis 95% Ag reicht. Der Fehler der Bestimmung des Parameters beträgt etwa 0.01 seines Wertes, die Differenz für Au und Ag liegt also noch innerhalb der Fehlergrenze.

Außer den Abständen der Atomzentren im Gitter gleicher Art muß also für die Bildung lückenloser Mischkristallreihen noch die Attraktion der beiden verschiedenen Atome von Bedeutung sein. Bezeichnet die Attraktionsdifferenz die Attraktion der beiden verschiedenen Atome minus der mittleren Attraktion der Atome beider Komponenten, so wäre wohl das Auftreten einer Mischungslücke zu erwarten, wenn das Produkt der Parameterdifferenz und der Attraktionsdifferenz unter einen bestimmten Wert sinkt.

Im folgenden sollen also einige Beobachtungen über die Art der Gleitflächen und ihre Orientierung in metallischen Kristallen kurz erwähnt werden.

---

1) Jahrbuch der Radioaktivität u. Elektronik B. 14. 52—129. 1917.

O. Mügge[1]) fand an Cu-, Ag- und Au-Kristallen Gleitebenen (Translationsebenen) parallel den Oktaederebenen, bei den Cu-Kristallen gelang es ihm auch die Richtung der Verschiebung, parallel und senkrecht den Oktaederkanten zu ermitteln. Das Auftreten auch anders orientierter Gleitebenen scheint nicht ausgeschlossen zu sein, denn die diesbezüglichen Beobachtungen sind schwierig und die Art der Beanspruchung der untersuchten Metallkristalle war ziemlich dieselbe und mußte sich auf ziemlich geringe Deformationen beschränken.

Für die γ-Form des Fe und die β-Formen des Co und Ni ist das 14-Punktgitter festgestellt. Aus manchen, hier nicht zu erörternden Gründen ist es wahrscheinlich, daß die Gitter der α-Formen des Fe, Co und Ni ebenfalls 14 Punkt-Gitter mit nur sehr wenig von jenen verschiedenen Parametern sind. Ein sehr erheblicher Unterschied in der Duktilität des Fe, Co und Ni dicht oberhalb und unterhalb ihrer betreffenden Umwandlungspunkte ist auch nicht festgestellt. Immerhin ist auch auf Unterschiede im Verhalten des α-Fe im Vergleich zum Cu hinzuweisen. Beim α-Fe und besonders deutlich beim meteorischen Eisen treten nicht nur Verschiebungen längs der Gleitebenen ein, sondern es bilden sich bei der Verschiebung Lamellen, in denen das Gitter nicht nur parallel sich selbst verschoben, sondern auch um einen gewissen Winkel gedreht wird. Beim Cu, Ag und Au sind derartige Drehungen, die zur Bildung von Lamellen in der Zwillingsstellung führen, nicht direkt beobachtet worden. Die Gleitebenen selbst sind beim α-Fe parallel den Ebenen des Ikositetraeders. Das α-Fe verhält sich also bei der Bildung von Gleitebenen anders als Cu, Ag und Au. Wenn dem α-Fe die Raumgitterart des Cu, Ag und Au zukommt, so wären die Unterschiede wohl durch die Strukturverschiedenheiten der Atome, die den Ferromagnetismus des α-Fe verursachen, bedingt.

Verallgemeinert man die Erfahrungen betreffs der Gleitebenen-Bildung beim Cu, Ag und Au, so würde man zum Satz gelangen, daß Kristalle, deren Gitter gleicher Art von einer Atomart besetzt werden, wenn sie überhaupt zur Bildung von Gleitebenen befähigt sind, Gleitebenen gleicher Orientierung und gleicher Art bilden.

Auf Grund dieses Satzes ist es wahrscheinlich, daß die aufgezählten mit Cu, Ag und Au isomorphen Metallkristalle betreffs ihrer Gleitflächenbildung sich ganz analog verhalten, daß, wenn Cu, Ag und Au duktil sind, es auch die mit ihnen isomorphen Metallkristalle sein werden.

---

1) Neues Jahrb. der Mineralogie 1899. II 54.

Im allgemeinen bestätigt die Erfahrung diese Vermutung. Die Metalle der mittelständigen natürlichen Gruppen des Systems der Elemente, mit einer besonderen Umfriedigung bezeichnet, sind in der Tat duktil. Für das V, Cr, Mn, und U ist das nicht erwiesen. Diese aus ihren Oxyden mit Kohle oder Aluminium reduzierten Reguli sind mehr oder weniger spröde. Diese Produkte enthalten aber immer merkliche Mengen von C respektive Al. Da aber diese Metalle mit duktilen lückenlose Mischkristallreihen bilden, ist es sehr wahrscheinlich, daß auch sie im reinen Zustande sogar zu Drähten verarbeitet werden können. In der Mischkristallreihe des Mn mit Cu konnte die Gleitflächenbildung bei 90 % Mn noch sehr deutlich beobachtet werden; die hierzu notwendige Kraft wuchs mit dem Mn-Gehalt um das 6fache ihres Betrages beim Cu. Das nur 10 % Cu und 2—3 % Al enthaltende Mn zeigt ganz dieselben Gleitlinien, die sich auf einer polierten Cu-Ebene bei Wirkung eines ihr parallel gerichteten Druckes bilden [1]).

Li	Be	B	C											N	O
Na	Mg	M	Si				isomorphe Elemente							P	S
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo		Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te
Cs	Ba	La													
		Yb		Ta	W		Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	
					U										
				hexagonal											

Außer der großen Metallgruppe, deren Raumgitter das 14 Punkt-Gitter ist, gibt es noch andere duktile Metalle, deren Atome andere Gitter besetzen.

Na und K scheinen regulär zu sein.

Be, Mg, Ca, Zn und Cd sind hexagonal und das Cd bildet mit Mg und Li lückenlose Mischkristallreihen. Die Li- und Mg-Atome besetzen also Gitter, die mit dem des Cd gleicher Art sind.

Die gewöhnliche Form des Sn ist tetragonal.

Von Bragg sind die Gitter des Bi, Sb und As als rhomboedrische Gitter erkannt und die Gitterparameter bestimmt worden. Die Kristalle dieser Elemente sind durch hohe Spaltbarkeit ausgezeichnet, daher scheinen sie bei freier Deformation spröde zu sein. Aber Bi fließt bei hinreichendem Druck aus feinen Öffnungen als dünner Draht schon bei Zimmertemperatur. Beim Sb und As

1) Göttinger Nachrichten S. 194, 1911.

ist dieser Vorgang erst bei bedeutend höherer Temperatur zu erwarten.

An die große Gruppe isomorpher, im System mittelständiger Elemente schließen sich in der Richtung wachsender Atomgewichte drei natürliche Gruppen mit duktilen Elementen; die Metalle der Zn-Gruppe sind hexagonal, in den beiden folgenden Gruppen treten polymorphe Elemente: Tl und Sn auf. In der Richtung abnehmender Atomgewichte folgt der großen isomorphen Gruppe eine Gruppe spröder Elemente C, Si, Ti und Zr, ihr folgt eine Gruppe hexagonaler Metalle und dieser eine Gruppe mit wechselnden Formen (Li: hexagonal, Na und K regulär).

Betreffs der Kristallform der eigentlichen Metalle herrscht also im System eine gewisse Symmetrie, die aber von den nicht metallischen Elementen der C-Gruppe gestört wird.

Es sind also die Metalle verschiedener Kristallformen duktil, und die Duktilität der Metalle ist nicht an ein bestimmtes Raumgitter gebunden, sondern wahrscheinlich daran, daß nur eine Art von Atomen, zwischen denen keine Valenzen wirken, die Gitter ihrer Kristalle besetzen. Tritt die Wirkung von Valenzen zwischen den Atomen im Gitter auf, wie bei den binären Verbindungen der Metalle, so wird durch sie die Bildung von Gleitflächen behindert und die Duktilität verschwindet.

Die Begleitmatrix eines linearen homogenen Differentialausdruckes.

Von

Alfred Loewy in Freiburg i. B.

Vorgelegt von Herrn Landau in der Sitzung vom 7. Juli 1917.

Unter der Begleitmatrix eines linearen homogenen Differentialausdruckes n^{ter} Ordnung

$$A \equiv a_1(x)y + a_2(x)\frac{dy}{dx} + \cdots + a_{n+1}(x)\frac{d^n y}{dx^n}$$

verstehe ich die Matrix n^{ten} Grades

$$\mathfrak{A}: \quad \left\|\begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ \dfrac{a_1}{a_{n+1}} & \dfrac{a_2}{a_{n+1}} & \dfrac{a_3}{a_{n+1}} & \dfrac{a_4}{a_{n+1}} & \ldots & \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \end{matrix}\right\|,$$

also die zu dem Differentialsystem $\frac{dy_1}{dx} - y_2$, $\frac{dy_2}{dx} - y_3$, ..., $\frac{dy_{n-1}}{dx} - y_n$, $\frac{dy_n}{dx} + \frac{a_1}{a_{n+1}}y_1 + \frac{a_2}{a_{n+1}}y_2 + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}}y_n$ zugehörige Matrix. In Aufnahme einer auch schon früher[1]) von mir verwandten Bezeichnung nenne ich den Differentialausdruck A eine Sequente der Matrix $\mathfrak{A}$ sowie einer jeden Matrix, die mit $\mathfrak{A}$ von derselben Art ist. Zwei beliebige Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^*$ des gleichen Grades mit Koef-

1) Über lineare homogene Differentialsysteme und ihre Sequenten, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie, Jahrgang 1913, 17. Abhandlung.

fizienten aus dem der Betrachtung zu Grunde liegenden Rationalitätsbereiche Σ[1]) heißen von derselben Art, wenn eine Matrix $\mathfrak{P}$ von nicht verschwindender Determinante mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ existiert, so daß die symbolische Matrizengleichung

$$\mathfrak{A}^* = -\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1} + \mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{P}^{-1}$$

besteht[2]).

Im folgenden will ich den wesentlichen Eigenschaften, die bei der Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes auftreten, entsprechende gegenüberstellen, die für die Transformation seiner Begleitmatrix stattfinden. Mittels der hier mitgeteilten Sätze lassen sich weiter auch „gegabelte“ Beweise auf eine einheitliche Form bringen.

Zunächst sei an ein von mir schon früher[3]) in anderer Terminologie ausgesprochenes Theorem erinnert:

Satz I. Notwendig und hinreichend, damit zwei lineare homogene Differentialausdrücke A und B der gleichen Ordnung von derselben Art[4]) sind, erweist sich, daß ihre Begleitmatrizen von derselben Art sind.

Dem Satze I füge ich die folgenden neuen Sätze über die Begleitmatrix bei:

Satz II. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich ein linearer homogener Differentialausdruck A von der n^{ten} Ordnung als **hinteres** kleinstes gemeinsames Vielfaches von zwei **hinten** teilerfremden linearen homogenen Differentialausdrücken B und C der Ordnungen n_1 und n_2 auffassen läßt[5]), besteht darin, daß die Begleitmatrix $\mathfrak{A}$ des

---

1) Den anzustellenden Untersuchungen liegt ein Rationalitätsbereich Σ zu Grunde; diesem gehören alle Koeffizienten der sämtlichen im folgenden auftretenden Matrizen und Differentialsysteme ausnahmslos an.

2) Über diese Gleichung, bei der $\mathfrak{P}'$ die aus $\mathfrak{P}$ durch Differentiation hervorgehende Matrix bedeutet, siehe die auf der vorigen Seite in Anmerkung 1) zitierte Arbeit, Seite 7 sowie den Aufsatz: Über Matrizen- und Differentialkomplexe, Math. Annalen Bd. 78 (1917), S. 5.

3) In dem in Anmerkung 1) auf Seite 1 zitierten Aufsatz, S. 7.

4) Zwei Differentialausdrücke A und B gleicher Ordnung heißen von derselben Art, wenn es einen Differentialausdruck P gibt, so daß das symbolische Produkt AP das hintere kleinste gemeinsame Vielfache der Differentialausdrücke B und P ist.

5) Der Differentialausdruck A heißt **hinteres** kleinstes gemeinsames Vielfaches von B und C, wenn A der Differentialausdruck niedrigster Ord-

Differentialausdruckes A von derselben Art ist mit einer zerfallenden Matrix

$$\mathfrak{Z}: \quad \left\| \begin{array}{cccc|cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ b_{n_1 1} & b_{n_1 2} & \dots & b_{n_1 n_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n_2} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n_2 1} & c_{n_2 2} & \dots & c_{n_2 n_2} \end{array} \right\| .$$

Die links oben stehende Teilmatrix von $\mathfrak{Z}$ ist von derselben Art mit der Begleitmatrix des Differentialausdruckes B und die rechts unten stehende mit der Begleitmatrix des Differentialausdruckes C.

Ist demnach der Differentialausdruck A das hintere kleinste gemeinsame Vielfache der zwei hinten teilerfremden Differentialausdrücke B und C, so ist hierfür charakteristisch, daß sich die Begleitmatrix von A in die Normalform

$$\left\| \begin{array}{cc} \mathfrak{B}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{C}_1 \end{array} \right\|$$

transformieren läßt, bei der $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}_1$ die Begleitmatrizen von B und C oder zweier anderer Differentialausdrücke sind, die mit B und C von derselben Art sind.

Satz II′. Genau dieselben Aussagen wie in Satz II gelten auch für die Tatsache, daß C das **vordere** kleinste gemeinsame Vielfache[1]) von zwei **vorn** teilerfremden linearen homogenen Differentialausdrücken B und C ist.

---

nung ist, der durch B und C hinten teilbar ist ($A = A_1 B = A_2 C$). Charakrakteristisch dafür, daß B und C hinten teilerfremd sind, erweist sich alsdann, daß die Ordnung von A gleich der Summe der Ordnungen von B und C ist.

1) Wir nennen A ein **vorderes** kleinstes gemeinsames Vielfaches von B und C, wenn A der Differentialausdruck niedrigster Ordnung ist, der durch B und C vorn teilbar ist ($A = BA_1^* = CA_2^*$). Charakteristisch dafür, daß B und C vorn teilerfremd sind, also daß es keinen Differentialausdruck T gibt, für den $B = TB_1$ und $C = TC_1$ ist, erweist sich, daß die Ordnung von A gleich der Summe der Ordnungen von B und C ist.

Ist A vorderes kleinstes gemeinsames Vielfaches der zwei vorn teilerfremden Differentialausdrücke B und C, $A = BA_1^* = CA_2^*$, so sind A_1^* und A_2^* hinten teilerfremd, und A ist hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches der zwei hinten teilerfremden Differentialausdrücke A_1^* und A_2^*. Umgekehrt folgt, daß, wenn A die letzte Eigenschaft hat, ihm auch die erste zukommt.

Aus dem Satz II folgt durch wiederholte Anwendung: Notwendig und hinreichend, daß ein Differentialausdruck A vollständig reduzibel ist, erweist sich, daß seine Begleitmatrix von derselben Art ist mit einer Matrix

$$\left\|\begin{array}{ccccc} I_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_\lambda \end{array}\right\|$$

bei der $I_1, I_2, \dots, I_\lambda$ irreduzible Matrizen sind.

Man kann $I_1, I_2, \dots, I_\lambda$ stets als Begleitmatrizen derjenigen irreduziblen Differentialausdrücke wählen, als deren hinteres kleinstes gemeinsames Vielfaches sich der Differentialausdruck A darstellen läßt. Man kann aber $I_1, I_2, \dots, I_\lambda$ auch als Begleitmatrizen derjenigen irreduziblen Differentialausdrücke wählen, als deren vorderes kleinstes gemeinsames Vielfaches sich A auffassen läßt.

Satz III. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich ein linearer homogener Differentialausdruck A von der n^{ten} Ordnung darstellen läßt als symbolisches Produkt in der Form $A = B_1 B_2 \dots B_k$, wobei die Differentialausdrücke $B_1, B_2, \dots, B_k$ der Reihe nach die Ordnungen $n_1, n_2, \dots, n_k$ besitzen, besteht darin, daß die Begleitmatrix des Differentialausdruckes A von derselben Art ist mit einer reduziblen Matrix der Form

$$\mathfrak{B}: \quad \left\|\begin{array}{cccccc} \mathfrak{B}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{B}_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathfrak{B}_{31} & \mathfrak{B}_{32} & \mathfrak{B}_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \mathfrak{B}_{k-1,1} & \mathfrak{B}_{k-1,2} & \mathfrak{B}_{k-1,3} & \dots & \mathfrak{B}_{k-1,k-1} & 0 \\ \mathfrak{B}_{\;1} & \mathfrak{B}_{k2} & \mathfrak{B}_{k3} & \dots & \mathfrak{B}_{k,k-1} & \mathfrak{B}_{k,k} \end{array}\right\|;$$

dabei bedeuten $\mathfrak{B}_{11}, \mathfrak{B}_{22}, \dots, \mathfrak{B}_k$ Matrizen der Grade $n_1, n_2, \dots, n_k$, und es ist $\mathfrak{B}_{11}$ mit der Begleitmatrix des Differentialausdruckes B_1, $\mathfrak{B}_{22}$ mit derjenigen von B u. s. w. schließlich $\mathfrak{B}_{kk}$ mit derjenigen von B_k von derselben Art.

Ist $A = B_1 B_2 \ldots B_k$ und lauten die Differentialausdrücke

$$B_i: \qquad b_1^{(i)} y + b_2^{(i)} \frac{dy}{dx} + \cdots + b_{n_i+1}^{(i)} \frac{d^{n_i} y}{dx^{n_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

so kann man die Begleitmatrix von A stets in die Normalform transformieren:

$$\left\| \begin{matrix} \mathfrak{B}_{11}^* & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \mathfrak{B}_{21}^* & \mathfrak{B}_{22}^* & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{B}_{32}^* & \mathfrak{B}_{33}^* & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{B}_{43}^* & \mathfrak{B}_{44}^* & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathfrak{B}_{k,k-1}^* & \mathfrak{B}_{kk}^* \end{matrix} \right\|;$$

dabei ist $\mathfrak{B}_{ii}^*$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ die Begleitmatrix von B_i, also

$$\mathfrak{B}_{ii}^*: \quad \left\| \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 \\ \frac{b_1^{(i)}}{b_{n_i+1}^{(i)}} & \frac{b_2^{(i)}}{b_{n_i+1}^{(i)}} & \frac{b_3^{(i)}}{b_{n_i+1}^{(i)}} & \ldots & \frac{b_{n_i}^{(i)}}{b_{n_i+1}^{(i)}} \end{matrix} \right\| \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

und $\mathfrak{B}_{i,i-1}^*$ hat die Form

$$\mathfrak{B}_{i,i-1}^*: \quad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{1}{b_{n_i+1}^{(i)}} & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\| \quad (i = 2, 3, \ldots, k).$$

Ist der Differentialausdruck A darstellbar in der Form $A = B_1 B_2 \ldots B_k$, so kann man auch stets eine Zerlegung $A = B_1^* B_2^* \ldots B_k^*$ finden, bei der die Differentialausdrücke $B_2^*, B_3^*, \ldots, B_k^*$ als Koeffizienten ihrer höchsten Ableitung 1 haben. Bei einer solchen Wahl kann man für die Transformation der Begleitmatrix von A eine derartige Normalform erzielen, daß in der Matrix $\mathfrak{B}_{i,i-1}^*$ die Größe $-\frac{1}{b_{n_i+1}^{(i)}}$ den Wert -1 annimmt und daß $\mathfrak{B}_{ii}^*$ die Begleitmatrix des Differentialausdruckes B_i^* wird.

Aus den Sätzen I und III ergibt sich ein besonders einfacher Beweis des von mir früher auf andere Weise bewiesenen Satzes[1]: Sind A und $\overline{A}$ zwei Differentialausdrücke derselben Art und ist A zerlegbar in

$$A = B_1 B_2 \dots B_k, \tag{1}$$

so läßt sich für $\overline{A}$ eine Zerlegung finden

$$\overline{A} = \overline{B}_1 \overline{B}_2 \dots \overline{B}_k, \tag{2}$$

so daß die Differentialausdrücke B_i und $\overline{B}_i$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ stets von derselben Art sind.

Aus der Zerlegung (1) ergibt sich, daß die Begleitmatrix des Differentialausdruckes A in die Normalform des Satzes III gebracht werden kann. Da die Differentialausdrücke A und $\overline{A}$ von derselben Art sind, folgt aus Satz I, daß auch ihre Begleitmatrizen von derselben Art sind; mithin muß sich die Begleitmatrix von $\overline{A}$ ebenfalls in die Normalform des Satzes III überführen lassen. Folglich läßt sich nach Satz III der Differentialausdruck $\overline{A}$ in der durch (2) gegebenen Weise zerlegen, und dabei ist die Begleitmatrix von $\overline{B}_i$ mit $\mathfrak{B}_{ii}$, d. h. mit der Begleitmatrix des Differentialausdruckes B_i von derselben Art. Das letztere besagt nach Satz I, daß die Differentialausdrücke B_i und $\overline{B}_i$ von derselben Art sind $(i = 1, 2, \dots, k)$.

Zum Satz III ist noch die folgende wichtige Bemerkung zu machen:

Je nachdem man die Zerlegung $A = B_1 B_2 \dots B_k$ des Differentialausdruckes A etwa als eine solche in irreduzible Faktoren oder in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Faktoren oder in aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible Faktoren wählt, ist die Begleitmatrix des Differentialausdrucks A durch die im Satze III verwandte Matrix $\mathfrak{B}$ transformiert in eine solche, die in irreduzible oder in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible oder in aufeinander-

1) Zuerst ausgesprochen und bewiesen in meinem Aufsatz: Über lineare homogene Differentialgleichungen derselben Art, Math. Annalen Bd. 70 (1911), S. 551, dann auf andere Weise in dem Aufsatz: Zur Theorie der linearen homogenen Differentialausdrücke, Math. Annalen Bd. 72 (1912), S. 203.

folgende hintere größte vollständig reduzible Matrizen zerlegt ist[1]).

Aus dieser Bemerkung und dem Satze I ergeben sich neue Beweise meiner Eindeutigkeitssätze über die Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes in irreduzible[2]) bezw. in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible[3]) bezw. in aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible[4]) Faktoren und zwar als Corollare der Eindeutigkeitssätze, die ich für die Zerlegung eines Matrizenkomplexes in irreduzible[5]) bezw. in aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible[6]) bezw. in aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible[7]) Matrizenkomplexe aufgestellt habe und die natürlich a fortiori für eine einzelne Matrix gültig sind.

Wir wollen das Voraufgehende noch auf die Begleitmatrix $\mathfrak{K}$ eines linearen homogenen Differentialausdruckes

$$K(y) = k_1 y + k_2 \frac{dy}{dx} + k_3 \frac{d^2 y}{dx^2} + \cdots + k_n \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{d^n y}{dx^n}$$

mit konstanten Koeffizienten anwenden. Die charakteristische Funktion

$$K[\varrho] = k_1 + k_2 \varrho + k_3 \varrho^2 + \cdots + k_{n-1} \varrho^{n-1} + \varrho^n$$

ist offenbar gleich der Determinante

1) Es sind also $\mathfrak{B}_{11}, \mathfrak{B}_{22}, \ldots, \mathfrak{B}_{kk}$ irreduzible bezw. aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible bezw. aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible Matrizen.

2) Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen, Math. Annalen Bd. 56 (1903), S. 565. Einen Beweis des fraglichen Satzes auf der nämlichen Grundlage, jedoch unter Vermeidung der Integralexistenz hat dann *H. Blumberg,* Über algebraische Eigenschaften von linearen Differentialausdrücken, Göttinger Dissertation 1912, S. 30 gegeben.

3) Über die Zerlegungen eines linearen homogenen Differentialausdruckes in größte vollständig reduzible Faktoren, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1917, S. 13.

4) Über vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen, Math. Annalen Bd. 62 (1906), S. 112.

5) Über Matrizen und Differentialkomplexe, Math. Annalen Bd. 78 (1917), S. 21, Satz α).

6) In dem zuletzt zitierten Aufsatz, S. 35, Satz β).

7) Über Matrizen und Differentialkomplexe II, erscheint in den Math. Annalen, Satz γ); vgl. auch den in der Fortsetzung III (erscheint ebenfalls in den Math. Annalen) bewiesenen Satz und das entsprechende Theorem für lineare homogene Differentialausdrücke in der in Anmerkung 3) zitierten Arbeit, S. 14, Satz III.

$$|\mathfrak{K}+\varrho E| = \begin{vmatrix} \varrho & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \varrho & -1 \\ k & k_2 & k_3 & k_4 & \ldots & k_{n-1} & k_n+\varrho \end{vmatrix};$$

hierbei bezeichnet E in üblicher Weise die Einheitsmatrix. Zerlegt man die ganze rationale Funktion $K[\varrho]$ in ihre irreduziblen Faktoren

$$K[\varrho] = K_1[\varrho]^{\lambda_1} K_2[\varrho]^{\lambda_2} \ldots K_l[\varrho]^{\lambda_l},$$

wobei $K_1[\varrho]$, $K_2[\varrho]$, ..., $K_l[\varrho]$ zu einander teilerfremde Polynome bedeuten, bei denen der Koeffizient der höchsten Potenz ausnahmslos gleich 1 ist, so ist der Differentialausdruck $K(y)$ dann sowohl das vordere als auch das hintere kleinste gemeinsame Vielfache der teilerfremden Differentialausdrücke $\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$, ..., $\chi_l(y)$; dabei ist $\chi_i(y)$ der aus dem Polynom $\chi_i[\varrho] = K_i[\varrho]^{\lambda_i}$ hervorgehende Differentialausdruck. Nach Satz II kann die Begleitmatrix $\mathfrak{K}$ in eine zerfallende Matrix transformiert werden, deren einzelne Bestandteile die Begleitmatrizen $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, ..., $\mathfrak{B}_l$ der Differentialausdrücke $\chi_i(y)$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ sind. Da der Differentialausdruck $\chi_i(y) = K_i K_i \ldots K_i(y)$ (λ_i symbolische Faktoren) ist, läßt sich die Begleitmatrix von $\chi_i(y)$ nach Satz III transformieren in eine Matrix

$$\begin{Vmatrix} \mathfrak{B}^{(i)}_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \mathfrak{B}^{(i)}_{21} & \mathfrak{B}^{(i)}_{22} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{B}^{(i)}_{32} & \mathfrak{B}^{(i)}_{33} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathfrak{B}^{(i)}_{\lambda_i,\lambda_i-1} & \mathfrak{B}^{(i)}_{\lambda_i,\lambda_i} \end{Vmatrix};$$

$\mathfrak{B}^{(i)}_{11}$, $\mathfrak{B}^{(i)}_{22}$, ... $\mathfrak{B}^{(i)}_{\lambda_i,\lambda_i}$ sind identisch, und zwar sind sie gleich der Begleitmatrix des Differentialausdruckes $K_i(y)$. Die Matrizen $\mathfrak{B}^{(i)}_{k+1,k}$ $(k = 1, 2, \ldots \lambda_i - 1)$ sind ebenfalls gleich und zwar haben sie sämtlich die Form

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Aus den erhaltenen Normalformen [1]) entnimmt man unmittelbar,

1) Die Normalform, auf die wir zuletzt gekommen sind, hat Herr Frobenius in seiner Arbeit, Theorie der linearen Formen mit ganzen Koeffizienten, Journ.

daß die Matrix $|\mathfrak{K} + \varrho E|$ die Elementarteiler $K_1(\varrho]^{\lambda_1}$, $K_2[\varrho]^{\lambda_2}, \ldots,$ $K_l[\varrho]^{\lambda_l}$ besitzt.

Auf die Bedeutung der Begleitmatrizen für den Fall einer beliebig gebildeten Matrix werde ich später eingehen.

---

f. r. u. ang. Math. Bd. **86** (1879), S. 206 als Normalform für einen einzelnen Elementarteiler $K_i[\varrho]^{\lambda_i}$ bezw. für ein System von Elementarteilern $K_1[\varrho]^{\lambda_1}$, $K_2[\varrho]^{\lambda_2}, \ldots, K_l[\varrho]^{\lambda_l}$, wenn es sich um eine zerfallende Matrix handelt.

Die Legende der Längenbestimmung Amerigo Vespucci's nach Mondabständen (23. Aug. 1499).

Von

Hermann Wagner.

Vorgelegt in der Sitzung vom 31. März 1917.

Inhalt. I. Literarische Schicksale der Legende. 1. Astronomen halten bis in die neueste Zeit an der Legende fest. — 2. Frühere Stellung der Historiker der Erdkunde zur Frage. — 3. Zweifler an der Legende. — 4. J. Bensaude's Stellungnahme. — II. Das Schwanken der Ansichten über Vespuccis Bedeutung. — 5. Vespucci in seiner Zeit. — 6. Die Panegyriker des 18. Jahrh.: Bandini (1745), Canovai (1791). — 7. Erneute Kritik seit Mitte des 19. Jahrh. — III. Die Längenbestimmungen des Kolumbus nach Mondfinsternissen. — 8. Die Breitenbestimmungen gehen vorher. — 9. Toscanelli, Kolumbus, Vespucci. — 10. Die Längenbestimmungen des Kolumbus 1494 und 1504. — 11. Die Zeitangaben für vorausberechnete Mondfinsternisse in den Tafelwerken Regiomontan's und Zacuto's. — 12. Die Fehler derselben. — 13. Die Übertragung der Ephemeridenmeridiane auf die östlichen Nullpunkte der Längenbestimmungen. — 14. Zeitbestimmung der im Westen beobachteten Finsternisse. — 15. Schlußbetrachtung. — IV. Die Längenbestimmung nach Mondabständen am 23. Aug. 1499 (Vespucci). — 16. Canovai erhebt Vespucci 1791 zum Entdecker der neuen Methode. — 17. Spätern gilt er nur als ihr erster Anwender. — 18. Die Alfonsin. Tafeln enthalten nichts über die Methode (contra J. Bensaude). — 19. Wortlaut des Briefes vom 18. Juli 1500. — 20. Zeitpunkt der Mond-Mars-Konjunktion in Regiomontans Ephemeriden. — 21. Die stillschweigende Substitution von Cadix für Nürnberg bezw. Ferrara durch Vespucci. — 22. Vespuccis Beobachtungen in Westindien. — 23. Die stündliche Fortbewegung des Mondes. — 24. Die Größe des Erdgrades. — 25. Die Unechtheit des Briefes vom 18. Juli 1500. — 26. Ergebnis.

Beim Verfolg der Geschichte der exakten Wissenschaften hat sich m. E. seit lange die Tatsache als störend erwiesen, daß Perioden starker Entwicklung zu sehr zusammengedrängt werden, statt daß man ihre einzelnen Etappen strenger von einander

scheidet und den frühern Jahrzehnten nicht Anschauungen zuschreibt, die erst in dem nächsten oder übernächsten auftauchten, ja überhaupt fast naturgemäß erst dann zur Entfaltung kommen konnten. Das sogenannte Zeitalter der Entdeckungen stellt eine solche Periode ungemein reicher und rascher Fortschritte im Wissen und Können dar. Man pflegt sie kurzweg in das Jahrhundert zwischen 1450 und 1550 einzuschließen und grenzt damit in der Tat nicht nur den Gang der Ereignisse, die unsern Gesichtskreis räumlich so mächtig erweiterten, zweckmäßig ab, sondern auch die Entwicklung der Mittel, welche diese Errungenschaften ermöglichten, u. a. die der Nautik und der nautischen Astronomie. Aber indem man innerhalb dieser Epoche das Zeitalter des Kolumbus mit dem eines Magalhães zu sehr vermengt, so begeht man, wenn beide auch kaum durch zwanzig Jahre von einander getrennt sind, nicht selten den Irrtum, das Wissen und Können zur Zeit der ersten Weltumsegelung bereits in die der Entdeckung der neuen Welt zu übertragen.

Mit dem typischen Fall eines solchen irreführenden Anachronismus wollen sich diese Blätter beschäftigen, der Legende, daß Amerigo Vespucci auf seiner zweiten Reise nach dem Westen am 23. August 1499 eine Längenbestimmung auf Grund einer Beobachtung des Mondabstandes vom Mars ausgeführt haben soll.

I. Literarische Schicksale der Legende.

1. Astronomen halten an der Legende fest. Die zeitgenössische Literatur weiß freilich von dieser Erzählung noch nichts und, so weit ich aus ihrer Wiederholung während des letzten Jahrhunderts zu ersehen vermag, scheinen die wenigsten Autoren, die sie als positive Tatsache hinstellen, zu wissen, zu welcher Zeit und auf welchem Wege sie sich in die Geschichte der nautischen Astronomie eingenistet hat. Die Legende sei daher zunächst mit den Worten geschildert, in denen in allerjüngster Zeit (1916) eine bekannte astronomische Autorität, Professor Wilhelm Förster, sie einigen populären Aufsätzen[1]) eingeflochten hat, hauptsächlich um damit die Benutzung der Ephemerides des Regiomontan durch die frühen spanisch-portugiesischen Nautiker damit zu erweisen.

„Amerigo (latinisiert Americus) hatte während der Seereisen, an denen er hauptsächlich nach den südamerikanischen Küsten hin und we-

---

1) W. Förster, Zur Geschichte der Astronomie und der Schiffahrt. (Mitt. d. Vereins von Freunden d. Astronomie u. kosm. Physik. 1916, S. 39—43). Zur Geschichte d. Entdeckung Amerikas. (Deutsche Revue. Jahrg. 42. 1917, S. 59—63.)

sentlich als Nautiker und Astronom Anteil zu nehmen hatte, die Regiomontan'schen Ephemeriden offenbar mehrfach (sic) zu Bestimmungen von geographischen Längen benutzt. Unter anderm berichtet er in den brieflichen Mitteilungen, die ziemlich zahlreich auf diesen Reisen von ihm ausgegangen und dann später gesammelt und herausgegeben worden sind, von der an der Küste von Venezuela am 23. August 1499 von ihm ausgeführten Beobachtung einer nahen Zusammenkunft des Mondes mit dem Planeten Mars. Die Ortszeit des Meridians der Ephemeride, welche Regiomontan für diese Zusammenkunft vorausberechnet hatte (Förster nimmt als solchen den Meridian von Nürnberg an), verglichen mit der aus dem Sonnenstande zur Zeit der Beobachtung des Phaenomens an der Küste von Venezuela gefolgerten Ortszeit des Beobachters ergibt, daß der Beobachter sich $5\frac{1}{2}$ Stunden ($82\frac{1}{2}^0$) westlich von dem Meridian der Ephemeride befand".

Man wird zugeben müssen, daß ein Laie sich aus diesen Worten noch kein klares Bild von den unmittelbar auf dem Wege der Beobachtung durch Vespucci gewonnenen Ergebnissen machen kann, um sie mit den Angaben über die Konjunktion des Mondes mit dem Mars am 23. August 1499 in den Ephemerides des Regiomontan vergleichen zu können. Weit deutlicher spricht sich die Quelle, aus der Förster nach freundlicher brieflicher Mitteilung seine Darstellung schöpfte, aus. E. F. Apelt sagt in seinem Werke: „Die Reformation der Sternkunde" (Jena 1852, 76):

„Am 23. Aug. 1499 beobachtete Amerigo Vespucci auf der Küste von Venezuela eine Conjunktion des Mondes mit dem Mars. Beim Aufgang des Mondes, $1\frac{1}{2}$ Stunde nach Untergang der Sonne, also ungefähr um $7\frac{1}{2}$ Uhr, stand der Mond 1^0 östlich vom Mars. Um Mitternacht war der Mond vom Mars $5\frac{1}{2}{}^0$ gegen Osten entfernt. Binnen vier und einer halben Stunde war also der Mond $4\frac{1}{2}{}^0$ weiter ostwärts gerückt; seine relative Bewegung vom Mars betrug mithin in einer Stunde 1^0, folglich hatte der Mond $5\frac{1}{2}$ Stunden gebraucht, um vom Culminationspunkte $5\frac{1}{2}{}^0$ nach Osten vorzuschreiten. Die Ephemeriden des Regiomontan setzen diese Conjunktion gerade auf Mitternacht für Nürnberg. Folglich hat man die Proportion

$$1 \text{ Stunde} : 15^0 = 5\tfrac{1}{2} \text{ St.} : 82\tfrac{1}{2}{}^0.$$

Die Meridiandifferenz zwischen diesem Punkt und Nürnberg betrug also $82\frac{1}{2}{}^0$ der Länge".

Für die spätere Betrachtung dürfte es nicht uninteressant sein die unmittelbar anschließenden Worte Apelts aus dem Jahre 1852 zu hören, deren Sinn sich wohl auch Wilhelm Förster noch 1916 anschließt:

„Dies Beispiel veranschaulicht zugleich die Methode, deren sich Andres von San Martin auf der Fahrt des Magellan zur Auffindung der Länge bediente und Ruy Falero auf Eingebung seines Spiritus familiaris in einer besondern Abhandlung für den Privatgebrauch des Magellan auseinandergesetzt hatte. So haben die Ephemeriden des Regiomontan eine große Rolle in der Epoche der großen nautischen Entdeckungen auf den Reisen des Columbus, Gama, Vespucci und Magellan gespielt. Ohne sie

hätte die Gestalt und Lage der neuentdeckten Länder nicht sobald verzeichnet werden können, ohne sie würde die Schiffsrechnung ohne alle Controle, nicht viel mehr als schwankende Vermuthung gewesen seyn".

2. Die frühere Stellung der Historiker der Erdkunde zur Frage. Welche Fülle schwankender Vermutungen in diesen Worten Apelts enthalten ist, hat ihr Verfasser wohl nicht geahnt. Er schrieb aber im Jahre 1852, also mehr als sechzig Jahre vor unserer heutigen Zeit, während welcher eine nicht minder große Fülle scharfsinniger Untersuchungen über die Echtheit jenes Briefes angestellt worden ist, in dem Vespucci angeblich von seiner Längenbestimmung das Nähere berichtet haben soll. Offenbar ist diese ganze Literatur an den zahlreichen Astronomen, die die gleiche Legende während dieser Jahrzehnte wie eine unumstößliche Tatsache erzählen, spurlos vorübergegangen. Es würde viel zu weit führen, sie auch nur in der Mehrzahl zu nennen. Ich beschränke mich auf wenige Namen. Die in den letzten Jahrzehnten so vielfach ausgeschriebenen verdienstlichen Werke Rudolf Wolfs enthalten neben sorgfältiger durcharbeitetem geschichtlichem Stoff doch auch eine große Zahl von Angaben sehr problematischen Wertes. In seiner „Geschichte der Astronomie"[1]) stellt Wolf die Längenbestimmung von 1499 ohne Quellenangabe genau so dar, wie sie eben nach Apelt wiedergegeben ist. Nur wird hinzugefügt: „Die wirkliche Längendifferenz schwankt zwischen $4\frac{1}{2}^h$ und $5\frac{1}{2}^h$, da man den Punkt vom Landstriche Venezuela, an dem sich Amerigo damals befand, nicht genau kennt". In seinem reich mit historischen Notizen versehenen „Handbuch der Astronomie"[2]) findet sich die gleiche Darstellung. S. Günther[3]) weist 1890 bei kurzer Erwähnung des Faktums, „daß Vespucci, noch bevor Werner und Apian ihre theoretische Darlegung der Rechnung nach Monddistanzen gegeben hatten, den praktischen Versuch gemacht habe, durch Messung des Abstandes zwischen Mond und Mars die Länge der Orinokomündung (sic) zu ermitteln", wenigstens auf die eigentliche Quelle hin, durch welche die Legende sich Eingang in die deutsche Literatur verschafft hat, wenn er dieselbe auch nicht selbst benutzte. „In v. Zachs Monatl. Korrespondenz (1811 S. 428)"[4]), sagt er, „ist nach Canovais Elogio di Amerigo Vespucci' näheres über diese Beobachtung des spätern Astronomen der Magellan'schen Expedition (sic) mitgeteilt". Dafür daß hier Amerigo Ves-

1) München 1877, 155.

2) Bd. II, 1892, 150.

3) Handbuch d. math. Geographie, Stuttgart 1890, 586.

4) Dieses Zitat ist falsch; es muß heißen: 1810, 530—542.

pucci († 1512) als Gefährte Magellans (1519—21) hingestellt wird, trägt Günther die Verantwortung; es liegt wohl eine Verwechselung mit Pigafetta vor.

Oskar Peschel verweilt in seiner Geschichte der Erdkunde [1]) gleichfalls bei der Vespucci'schen Längenbestimmung, die er ausdrücklich „als die älteste bis jetzt bekannte Bestimmung der geographischen Länge, die durch Mondabstände ermittelt wurde", bezeichnet; er weist dabei auf seine Quelle: Vita e Lettere di Amerigo Vespucci, ed. Bandini, Firenze 1745, p. 71 hin. S. Ruge hat die Darstellung in der Neuausgabe des Peschelschen Werkes (1877, 407) unverändert beibehalten, während Vivien de St. Martin in seiner „Histoire de la géographie" (Paris 1875) die Längenbestimmung überhaupt nicht erwähnt. Dasselbe gilt von Sophus Ruge's eigener „Geschichte des Zeitalters der Entdeckungen" (Berlin 1881).

Führen wir endlich noch Humboldt an, der in seinen „Kritischen Untersuchungen über die historische Entwickelung der geographischen Kenntnisse von der neuen Welt etc." [2]) gleichfalls an den von Bandini veröffentlichten Brief Vespuccis an Lorenzo dei Medici erinnert, in welchem dieser einer Konjunktion des Mars und des Mondes am 23. August 1499 gedacht habe. Einzelheiten werden aber nicht mitgeteilt, die Tatsache der Beobachtung jedenfalls nicht bezweifelt, sondern nur an dem Ergebnis der Rechnung, „wenn dasselbe einige Aufmerksamkeit verdiene", Kritik geübt:

„Nach den Ephemeriden des Regiomontanus berechnet, giebt die Beobachtung nach Vespucci für den Punkt der Küste, wo sich die Expedition befand, eine Länge von $82\frac{1}{2}^0$ oder eine Entfernung von $1366\frac{2}{3}$ M. ($16\frac{2}{3}$ auf den Grad) westlich von Cadiz (sic)". „Eine so westliche Länge ($82\frac{1}{2}^0$) paßt noch weniger auf die Küsten von Brasilien und Guyana als auf die von Venezuela. Der Längenunterschied zwischen dem Cap St. Augustin und dem Hafen von La Guayra (auf dem Festlande) beträgt z. B. $32^0\frac{1}{2}$ dieser letztere Ort liegt nur $60^0\,50'$ westlich vom Meridiane von Cadiz".

Im Kosmos kommt Humboldt auf diese Längenbestimmung nicht mehr besonders zu sprechen. Man ersieht aber ohne weiteres aus der Fassung seiner Worte, daß er auch 1836 dem eigentlichen Verfahren keine größere Beachtung geschenkt und sich mit dem ausführlichen Wortlaut der ersten Quellen nicht beschäftigt hat.

3. Zweifler an der Legende. Bevor wir auf letztern eingehen, mag noch zusammenfassend darauf hingewiesen werden, daß keiner der Genannten von Humboldt (1836) bis auf Förster

1) München 1865, 366.

2) Bd. II, Berlin 1836, 434.

(1916) an der Tatsache des Vespuccischen Versuchs einer Längenbestimmung durch Mondabstände gezweifelt zu haben scheint. Keiner spricht ein Bedenken aus. Fast noch wunderlicher ist jedoch, daß auch keiner der Astronomen, die den Gang der Beobachtung beschreiben, Apelt (1852), Wolf (1877 und 1892), Förster (1916), daran Anstoß genommen hat, daß Vespucci dem Mond eine stündliche Bewegung von 1^0 zuweist! Der einzige, der in neuerer Zeit dies Argument gegen die vermeintliche Längenbestimmung in die Wagschale gelegt hat, ist, soweit mir bekannt, Arthur Breusing gewesen. Am Schluß seiner kleinen Schrift über „Die nautischen Instrumente bis zur Erfindung des Spiegelsextanten“ [1]) heißt es:

„Auch hier sehe ich mich veranlaßt, in Bezug auf die Geschichte der nautischen Astronomie den Wunsch auszusprechen, daß man doch endlich einmal aufhören möge, Amerigo Vespucci als den ersten Beobachter einer Monddistanz zu nennen. Varnhagen (Amerigo Vespucci, 1865) hat längst nachgewiesen, daß der Brief, in dem diese Beobachtung erwähnt wird, untergeschoben ist, und ich will zu seinen an sich schon durchschlagenden Gründen auch noch den hinzufügen, daß es eine Beleidigung für Vespucci sein würde, wenn man ihm zutrauen wollte, daß er dem Monde eine stündliche Bewegung von einem Grade zugeschrieben haben sollte“.

Die gegen die Echtheit des Briefes von Vespucci über seine zweite Reise von Varnhagen erhobenen Bedenken hatten auch den Nautiker Eugen Gelcich schon früher (1886) von der Unwahrscheinlichkeit der Längenbestimmung durch Mondabstände von Seiten des Florentiners überzeugt. „Varnhagen hat“, sagt er [2]), „die Illusion, daß Vespucci mit dieser Methode vertraut gewesen sei, unseres Erachtens in einer Art zerstört, welche keine Widerrede gestattet“. Im Anschluß an diese Ausführungen nahm auch Sigm. Günther 1904 [3]) eine andere Stellung zur Frage wie früher. Die Anwartschaft Vespuccis auf die Ehre, einen ganz neuen Gedanken in die Wissenschaft geworfen zu haben, sei durch Varnhagen stark erschüttert worden. Angeregt durch die Breusingsche Bemerkung bin ich schon damals der Frage nähergetreten, ohne jedoch die Ergebnisse meiner Untersuchung in ausführlicher Darlegung zu veröffentlichen; sie boten mir aber die Grundlage, um zuerst 1894 in meinem Lehrbuch der Geographie [4]) und später in den folgenden Auflagen kurz auf die Unwahrscheinlichkeit der Annahme hinzuweisen. Mit welchem negativen Erfolg alle diese

---

1) Bremen 1890, 46.

2) Zeitschr. f. wiss. Geogr., hrsg. v J. Kettler. Bd. VI. Weimar 1886, 149.

3) Geschichte der Erdkunde, Leipzig 1904, 115.

4) Hannover 1900, § 46. Lief. 1 erschien 1894.

Versuche der Widerlegung begleitet waren, beweisen die immer wiederkehrenden Erzählungen von der unbeanstandeten Längenbestimmung vom J. 1499, unter denen die jüngste, die Förstersche (1916), noch eine besondere Wirkung hervorgebracht hat.

4. Joaquim Bensaude's Stellungnahme. In den ganz neuerdings in Portugal erwachten Bestrebungen, die Selbständigkeit der Entwicklung der wissenschaftlichen Nautik bei den Portugiesen im Entdeckungszeitalter nachzuweisen und vor allem jede Beeinflussung durch deutsche Werke oder Personen, wie vor allem Regiomontan und Behaim, zu widerlegen, hatte besonders Joaquim Bensaude die Wertlosigkeit der Ephemeriden des Regiomontan für die Praxis der Breitenbestimmungen zur See im 15. Jahrhundert behauptet, und in seiner „L'astronomie nautique au Portugal à l'époque des grandes découvertes" (1912) mit triftigen Gründen auf bisher unbekannt gebliebene Deklinationstafeln der Sonne südeuropäischen Ursprungs hingewiesen. Dem gegenüber legte W. Förster 1916 eine Lanze für die Ephemeriden insofern ein, als er in den anfangs genannten Artikeln nachzuweisen suchte, daß, wenn nicht für Breitenbestimmungen, so hätten die Tafeln Regiomontans in jener Zeit doch für Längenbestimmungen ihre Anwendung finden können und gefunden. Als Beweis hiefür wird dann von Förster die Vespuccische vom 23. Aug. 1499, wie oben angedeutet, herangezogen. Joaquim Bensaude bezeichnet in seiner neuesten Schrift „Histoire de la science nautique portugaise"[1]) die Försterschen Bemerkungen als eine neue *„Prétension de priorité de l'Allemagne"* gegenüber den originalen Errungenschaften der Portugiesen und weist sie mit einigen nichtssagenden Floskeln zurück. Der Einwand Bensaudes wird uns weiter unten beschäftigen (§ 18). Das Bemerkenswerte dabei ist, daß auch Bensaude die tatsächliche Durchführung der dem Vespucci zugeschriebenen Längenbestimmung von 1499 mit keinem Wort bezweifelt, sodaß anzunehmen, daß diese Legende sich im Kreise der zahlreichen Autoren, welche besonders unter Südländern, Franzosen, Engländern den gesamten Bensaudeschen Ausführungen so lebhaft zugestimmt haben, von neuem einbürgern wird. Dieser Augenblick scheint mir daher der geeignete, sie nunmehr etwas gründlicher, als bisher geschehen, zu beleuchten.

---

1) Genève 1917, 67.

II. Das Schwanken der Ansichten über Amerigo Vespucci's Bedeutung.

5. Vespucci in seiner Zeit. Amerigo Vespucci's Name hat seit seinem ersten Auftauchen im Zeitalter der Entdeckungen dreimal eine große Rolle in der geographischen Literatur gespielt. Vermöge seiner Bildung und Schreibseligkeit hat er es noch selbst erlebt, in Italien und Mitteleuropa zu den bekanntesten und verdienstvollsten Entdeckern gerechnet zu werden und selbst einen Kolumbus zeitweise in den Schatten zu stellen. Das Schicksal seiner Reisebriefe, die unter dem Titel der *Quatuor navigationes* erschienen und bald in andere Sprachen übersetzt worden sind, ist zu bekannt, um uns hier noch beschäftigen zu können. Halten wir aber daran fest, daß in diesen zeitgenössischen Publikationen von der fraglichen Längenbestimmung an der südamerikanischen Küste vom 23. August 1499 nicht mit einem Wort die Rede ist.

6. Die Panegyriker Vespucci's im 18. Jahrhundert. Bandini. Canovai. Jahrhunderte vergingen, da taucht sein Name von neuem auf durch die Schrift Angelo Maria Bandini's „*Vita di Amerigo Vespucci*“ vom Jahre 1745. Alsbald wird letzterer von neuem von manchen Seiten als Entdecker Amerikas auf den Schild erhoben, sodaß es Mühe kostete dem Kolumbus seine Verdienste zurückzugewinnen. Ich erinnere nur an die Schrift E. Tozens: Der wahre und erste Entdecker der neuen Welt Christoph Colon gegen die ungegründeten Ansprüche, welche Americus Vespucci und Martin Behaim auf diese Ehre machen, verteidigt von E. Tozen (Göttingen 1761). Die Polemik zieht sich durch Jahrzehnte durch die geographische Literatur der Hauptnationen.

In diese zweite Epoche des Hervortretens von Vespucci's Namen fällt nun auch die eigentliche Begründung der Legende von seiner Längenbestimmung des Jahres 1499. Sie ist auf den italienischen Astronomen Stanislao Canovai zurückzuführen, der in Florenz geboren, geistlichen Standes vom Orden der frommen Schule, Lehrer der Mathematik in Cortona und später in Parma war und daselbst 1811 starb. Für uns kommt sein preisgekröntes *Elogio di Amerigo Vespucci* (Firenze 1788, 4. ed. 1798), mehr noch seine Abhandlung „*Sulle Vicende delle Longitudini Geografiche dai tempi di Cesare Augusto fino a quelli dell' Imperator Carlo V.*“ in Betracht. Sie ist erschienen im Tomo IX der „Saggi di Dissertazioni accademiche pubblicamente lette nella nobile accademia Etrusca

dell' antichissima città di Cortona"[1]). In dem Abschnitt über die „Epoca terza", die Canovai von Paolo Toscanelli bis zum Kaiser Karl V. rechnet, kommt er ausführlich auf die fragliche Längenbestimmung Vespucci's zu sprechen, um diese Tat als einen unvergänglichen Ruhmestitel seines Landsmanns hinzustellen. Er spricht von der neuen Methode, die, durch Vespucci inauguriert, eine neue Epoche der Astronomie eingeleitet habe (a. a. O. p. 332). Er ist überzeugt von den gründlichen mathematischen und astronomischen Kenntnissen Vespucci's „Or non era Astronomo, era Piloto il Vespucci, benchè niun Marinaro lo eguagliasse o nel possesso d'Euclide o nella perizia del calcolo o nell' assidua curiosità d'osservare" (a. a. O. p. 333).

Canovai stützt sich dabei ganz auf den Brief Vespucci's, den dieser am 18. Juli 1500 an seinen Gönner Lorenzo di Pier Francesco dei Medici (nicht zu verwechseln mit Lorenzo Magnifico) geschrieben haben soll und der erst 1745 von Bandini[2]) ans Licht gezogen ist. Canovai analysiert den Brief, wie wir weiter sehen werden, soweit die fragliche Längenbestimmung in Betracht kommt, Satz für Satz und, obwohl er die Fehlerhaftigkeit der Beobachtung anerkennt, so preist er Vespucci doch als den wahren Entdecker dieser neuen Methode der Längenbestimmung durch Mondabstände, keineswegs nur als den ersten praktischen Anwender derselben. Er grollt „der ganzen Schar von Astronomen und Geographen, welche sich die Methode aneigneten und sie baldigst verbreiteten, ohne sich ein einziges Mal ihres Urhebers zu erinnern, einem Joh. Werner (1514), Apian (1524), Orontio Fineus (1529), Gemma Frisius (1530), P. Nunes (1560), Ruscelli (1561)". „Obgleich die Irrtümer der Längenbestimmung durch die spätern Seefahrer und Geographen nach und nach verbessert wurden, verschwanden sie nicht völlig, bis, nachdem die Methode Vespucci's aus langer Vergessenheit hervorgeholt war, die Tafeln des verdienstvollen Tobias Mayer ans Licht und in die Hände der Piloten kamen" (a. a. O. p. 344).

Diese Abhandlung Canovai's vom J. 1791 ist es, welche im J. 1810 in ihren Hauptsätzen Aufnahme gefunden hat in v. Zach's Monatlicher Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde[3]). Schon der Titel, den der ungenannte Verfasser — der freilich niemand anders als v. Zach selbst sein kann — diesem

1) Firenze 1791, Diss. XIII, p. 283—364.

2) Vita e lettere di Amerigo Vespucci, raccolte e illustrate dell' Abate Angelo Maria Bandini. Firenze 1745; deutsch von G. Ch. Grund. Hamburg 1798.

3) Bd. XXII, 1810, S. 530—542.

Auszug gibt „Amerigo Vespucci erster Erfinder der Meereslänge durch Mondabstände“ zeigt, daß er allen Ausführungen Canovai's rückhaltlos beistimmt und seine Lobsprüche auf Vespucci fast noch überbietet. „Unstreitig gehört Amerigo Vespucci die Ehre dieser ersten Erfindung, wodurch seinem Namen vielleicht noch mehr, als durch die Entdeckung von America die Unsterblichkeit gebührt“ (a. a. O. p. 538). Die Folge war, daß nun insbesondere die deutschen Astronomen und ein großer Teil der Historiker der Geographie bis in die neueste Zeit (W. Förster 1916) die gleiche Legende verbreiteten, ohne von den seit 1865 erhobenen Bedenken gegen die Echtheit des Vespuccibriefes vom 18. Juli 1500 Notiz zu nehmen oder die Längenmessung selbst einer erneuten sachlichen Prüfung zu unterziehen.

7. Erneute Kritik seit Mitte des 19. Jahrhunderts. Zum dritten Male wird der Name Vespucci's in lebhafte Erörterung gezogen, als die vierhundertjährige Wiederkehr der Entdeckung Amerikas nahte und die Literatur über die zeitgenössischen Personen und Einzelentdeckungen mächtig anschwoll. Diese Periode wird aber schon etwas früher durch F. A. de Varnhagen's Schrift: *Amerigo Vespucci, son caractère, ses écrits (même les moins authentiques), sa vie et ses navigations* (Lima 1865) eingeleitet. In ihr spielt die uns hier allein interessierende Frage der Längenbestimmung von 1499 unmittelbar zwar kaum eine Rolle, aber indem sich der Kampf der Meinungen vielfach um die Echtheit des Briefes vom 18. Juli 1500 dreht, in welchem allein Vespucci über die Längenbestimmung berichtet, und dessen Echtheit nunmehr mit triftigen Gründen bestritten wird, wird in den Augen vieler Historiker der Erdkunde der Hypothese der vermeintlichen Längenmessung der Boden entzogen.

Statt die Angelegenheit durch den Hinweis auf den Mangel der Authentizität dieses erst zweieinhalb Jahrhundert nach Vespucci's Tod ans Licht gezogenen Dokumentes, nämlich seines Briefes vom 18. Juli 1500, als erledigt im negativen Sinn zu erklären, halte ich es für erforderlich auch den Nachweis der Unwahrscheinlichkeit der Vespucci zugeschriebenen Längenbestimmung zu versuchen.

III. Die Längenbestimmungen des Kolumbus nach Mondfinsternissen.

8. Breitenbestimmungen gehen vorher. Zunächst gilt es festzustellen, daß im Beginn des Zeitalters der Entdeckungen, oder kurz gesagt bis zur Entdeckung von Amerika, von seiten

der portugiesischen Nautik unter den astronomischen Ortsbestimmungen allein diejenige der Breite eine Rolle spielt, ja überhaupt nur erwähnt wird. Diese Tatsache haben die neueren Untersuchungen über den Anteil der Portugiesen an der Entwicklung der Nautik zur Evidenz erhoben. Referent hat sich an diesen vornehmlich durch eine Abhandlung „über die Entwicklung der wissenschaftlichen Nautik im Beginn des Entdeckungszeitalters nach neuern Anschauungen“ [1]) beteiligt, auf welche für manche Einzelheiten verwiesen werden möge. Sie schließt sich vielfach an J. Bensaude's Werk „L'astronomie nautique au Portugal à l'époque des grandes découvertes“ (Bern 1912) an.

Gegenüber früheren Ansichten, daß man schon im Zeitalter Heinrich des Seefahrers († 1460) bestrebt gewesen sei, die Orientierung durch Breitenbestimmungen in die portugiesische Nautik einzuführen, weisen die neueren Untersuchungen das Irrige derselben nach. Das „*navegar per altura do Sol*“ wird erst zum Schlagwort, als man an der Westküste Afrikas sich dem Äquator näherte; er ward 1471 überschritten. Geeignete Vorschriften für solche Breitenbestimmungen aufzustellen war eine Hauptaufgabe der von König Johann II. von Portugal im J. 1484 eingesetzten Junta dos Mathematicos, der auch Martin Behaim angehörte. Wir wissen von der praktischen Durchführung solcher Breitenmessungen von seiten des Mestre Josepe Vicinho (1485), Bartholomeu Dias (1486), Vasco da Gama (1497) etc. Es ist kein Wunder, daß für alle diese Seefahrer die Längenbestimmung noch kaum eine Rolle spielt; denn ihre Entdeckungen liefen fast ausschließlich in meridionaler Richtung längs der Westküste Afrikas fort.

9. Toscanelli. Kolumbus. Vespucci. Das wurde anders bei den gleichzeitig beginnenden Bestrebungen, Indien bezw. Ostasien auf dem Westwege zu erreichen. Daher tritt die Frage des Längenunterschiedes zwischen der europäischen Westküste (Lissabon) und dem gegenüberliegenden Ostrand Asiens in dem bekannten Brief Toscanelli's an den König von Portugal vom J. 1474 in den Vordergrund. Sie wird von dem Florentiner Kosmographen noch rein durch Angaben der terrestrischen Entfernungen gelöst. Lissabon solle von Quinsay um 26 Spatien zu je 250 Miglien entfernt sein. Da 50 Miglien in der Breite Lissabons nach Toscanellis Auffassung einem Längengrad entsprachen, so hieß das nichts anderes, als daß Quinsay um $5 \times 26 = 130^0$ westlich von Lissabon

1) Die Abhandlung wird in den Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie 1918 erscheinen.

gelegen sei[1]). Wohl bemerkt wird dabei über die Art und Weise, wie solche Entfernung auf astronomischem Wege bestimmt werden könne, noch nicht mit einem Wort gesprochen. So sehen wir in der zeitgenössischen Literatur vor 1500 nur zwei Namen mit dem Problem der Längenbestimmung in Verbindung gebracht: Kolumbus und Vespucci. Wenngleich uns hier nur eine solche des letztern beschäftigt, scheint es erforderlich, auf die beiden Versuche des Kolumbus, die geographische Länge westindischer Inseln zu bestimmen, noch näher einzugehen, um uns über den Grad des Könnens in damaliger Zeit einigermaßen zu orientieren. Dabei soll die Frage, ob Christoph Kolumbus selbst imstande gewesen sei, das von ihm beschriebene Verfahren der astronomischen Längenbestimmung durchzuführen, oder ob nicht vielmehr alles auf seinen in wissenschaftlich nautischen Dingen erfahreneren Bruder Bartolomeo zurückzuführen sei, ganz außer Betracht bleiben.

10. Die Längenbestimmungen des Kolumbus von 1494 und 1504. Kolumbus greift, man möchte sagen naturgemäß, zu der einzigen aus dem Altertum überkommenen Methode astronomischer Längenbestimmung, die einer häufigeren Anwendung fähig ist, als es mit Hilfe der Sonnenfinsternisse geschehen könnte, nämlich zum Vergleich der Ortszeiten, in denen entsprechende Phasen von Mondfinsternissen beobachtet werden. Es kommen dabei die beiden Finsternisse vom 14. September 1494 und vom 29. Februar 1504 in Betracht. Die erstere will er in Saona, einem Inselchen vor der Südostspitze Españolas (Haitis), beobachtet und daraus den Zeitunterschied gegenüber dem Kap S. Vicente in Portugal zu $5\frac{1}{2}$ Stunden gefunden haben. Zwischen beiden Punkten würde sich danach eine Längendifferenz von $82\frac{1}{2}^0$ ergeben, während sie tatsächlich kaum 60^0 beträgt. (Saona ca. $68\frac{2}{3}^0$ w. v. Gr., Kap S. Vicente ca. 9^0 w. v. Gr.) Im zweiten Fall wird die Beobachtung auf die Mitte der Nordküste der Insel Jamaica verlegt und der Unterschied der dortigen Ortszeit mit derjenigen von Calis (Cadix) in Spanien auf $7^h 15^m$ festgestellt, also im Bogen auf $108\frac{3}{4}^0$ L., während der durch Jamaica gehende Mittelmeridian (77^0 w. v. Gr.) tatsächlich nur $70\frac{2}{3}^0$ westlich von Cadix ($6^0 19'$ w. v. Gr.) liegt. Die ungeheure Überschätzung dieser Entfernungen — in einem Fall um $22^0\frac{1}{2}$, im andern gar um 38^0 L. — hat in neuerer Zeit oft dazu geführt, diese Längenbestimmungen einfach für wertlos und als Beweis der allgemeinen Unfähigkeit des Ko-

1) H. Wagner, Die Rekonstruktion der Karte Toscanelli's v. J. 1474 etc. (Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Philol.-hist. Klasse 1894, 228 ff.).

lumbus in Fragen der astronomischen Nautik hinzustellen. Im Gegensatz dazu wurden seine Irrtümer, wenngleich „von abenteuerlicher Größe“, früher d. h. zu einer Zeit, wo man seine nautischen Kenntnisse noch höher bewertete, mit den ähnlichen Irrtümern zeitgenössischer Astronomen entschuldigt [1]). Indessen können uns so allgemeine Ablehnungen oder Zustimmungen nichts nutzen. Uns kommt es wesentlich darauf an, die verschiedenartigen Elemente der Irrtümer, die den beiden Längenbestimmungen des Kolumbus anhaften, nach ihrem etwaigen Anteil zu untersuchen, um gleichzeitig Anhaltspunkte zur Beurteilung des vermeintlichen Versuches von Vespucci von 1499 zu gewinnen.

Dazu wird zunächst die Wiedergabe des Wortlauts der Überlieferung vonnöten sein. Wir entnehmen sie dem „*Libro de las Profecias*“ des Kolumbus und folgen der Transkription des faksimilierten Autogramms des Entdeckers, wie sie in der Raccolta Columbiana [2]) gegeben ist. Es ist die bemerkenswerte Stelle, in der Kolumbus die Ergebnisse seiner beiden westindischen Längenbestimmungen auf Grund der Mondfinsternisse unmittelbar auf demselben Blatt neben einander stellt, ohne freilich den innern Widerspruch, in dem sie stehen, zu erkennen oder mit einem Wort zu berühren.

„*El año de mil cuatrocientos noventa y cuatro (i. e. 1494) estando yo en la isla Saona, que es al cabo Oriental de la isla Española, hobo eclipsis de la luna á catorre de Setiembre, y se falló que habia diferencia de alli al Càbo de S. Vicente en Portugal cinco horas y mas de media*“.

„*Jueves veinte y nueve de Febrero de mil quiniento cuatro (i. e. 1504) estando yo en las Indias, en la isla de Janahica, en el porto que se diz de Santa Gloria que es casi en el medio de la isla de la parte septentrional, hobo eclipsis de la luna, y porque el comienzo fue primero que el sol se pusiese non pude notar, salvo el término de cuando la luna acabó de volver en su claridad; y esto fue muy certificado, dos oras y media pasadas de la noche, cinco ampolletas; muy ciertas.*

1) Vergl. u. a. O. Peschel, Gesch. d. Erdkunde 1865, 361; 2. Aufl. von S. Ruge 1877, 401. Auch die ausführlichere Behandlung, welche obige Längenbestimmungen durch d'Albertis in der Raccolta Columbiana (Part. IV, vol. I 1893) erfahren haben, berührt nur einige der in Frage kommenden Gesichtspunkte und bleibt auf der Oberfläche.

2) Raccolta Columbiana. Part I, vol. III. Roma 1894. Tav. CXXXVIIII; Abdruck des ganzen Passus auch bei Navarrete, Coleccion de los viages. Madrid 1825. II, 272.

La diferencia del medio de la isla de Janahica, en las Indias: con la isla de Calis, en España, es siete horas y quince minutos; de manera que se puso el sol primero que en Janahica con siete horas y quince minutos de hora (vide Almanach)".

„*En el puerto de Santa Gloria, en Janahica, se alza el polo diez è ocho grados, estando las guerdas en el brazo*".

Wie man sieht, bietet die Notiz über die Beobachtung der Mondfinsternis vom 14. Sept. 1494 wenig Anhaltspunkte, um den Quellen des so beträchtlich falschen Ergebnisses näher nachzuspüren. Es wird nur das letztere namhaft gemacht. Mehr wird uns im zweiten Falle mitgeteilt. Es stellte sich, heißt es da, als Kolumbus sich in der Mitte der Nordküste der Insel Jamaika befand, am „Donnerstag den 29. Februar 1504" eine Mondfinsternis ein, deren Beginn er zwar nicht beobachten konnte, da letzterer vor Sonnenuntergang erfolgte, deren Ende sich aber beim Austritt des Mondes aus dem Schattenkegel der Erde feststellen ließ. Das war „ganz genau", wie Kolumbus sagt, $2\frac{1}{2}$ Stunden nach Einbruch der Nacht („cinco ampolletas" d. h. nach Ablauf von 5 [halbstündigen] Sanduhren). Kolumbus gibt zugleich im letzten Absatz seinem Beobachtungsort eine Breite von 18^0. Als Ergebnis wird ein Zeitunterschied von $7\frac{1}{4}$ Stunden zwischen Jamaica und Calis in Spanien angegeben.

11. Die Zeitangaben für vorausberechnete Mondfinsternisse in den Tafelwerken Regiomontan's und Zacuto's. In früherer Zeit wurden allein die Ephemerides des Regiomontan, die dieser für die Jahre 1475—1504 berechnet hatte, als Quelle für die Zeiten der von Kolumbus beobachteten Mondfinsternisse angesehen. Seit aber Simon de la Rosa y López im Katalog der Bibliotheca Colombina 1888 den Almanach perpetuum des Abraham Zacuto als einen Bestandteil derselben nachgewiesen[1]) und 1891 den obigen handschriftlichen Zusatz „*vide Almanach*" auf den des Zacuto bezogen hatte[2]), haben spätere Kolumbusforscher den letzteren mit in die Betrachtung gezogen; so d'Albertis[3]) 1893, ohne freilich den Almanach selbst in der Hand gehabt oder verglichen zu haben. Meyer Kayserling[4])

1) Bibliotheca Colombina, Catálogo de sus libros impresos Tomo I. Sevilla 1888, 3.

2) Ebenda Tomo II, 1891. Libros autógrafos p. XVI.

3) Raccolta Colombiana, Pars IV, vol. I, 158.

4) M. Kayserling, Chr. Columbus und der Anteil der Juden an den spanischen und portugiesischen Entdeckungen. Berlin 1894, 42.

gab 1894 zwar im gleichen Zusammenhang eine etwas ausführlichere Beschreibung des wohl von ihm selbst in der Colombina zu Sevilla eingesehenen Exemplars dieses seltenen Werkes, aber die Tabelle der Mondfinsternisse berührt er nicht näher. In jüngster Zeit ist Zacuto's Name und speziell sein Almanach perpetuum als maßgebend für die Entwicklung der wissenschaftlichen Nautik in Portugal in den Mittelpunkt einer lebhaften Diskussion gestellt und durch die von J. Bensaude herausgegebene Faksimile-Ausgabe[1]) allgemein zugänglich gemacht. Es erscheint fraglich, ob Kolumbus die Angaben über die Finsternis vom 14. Sept. 1494 bereits dem Zacuto verdankt, da der Almanach perpetuum erstmalig in Leiria 1496 gedruckt ist. Zweifellos bezieht sich der Zusatz „*vide Almanach*“ jedoch, wie dies schon Simon de la Rosa annahm, auf diesen. Das dürfte auch aus der Angabe des Tages, an dem die Erscheinung eintrat (Jueves = Donnerstag) hervorgehen. Denn eben dies findet sich im Almanach bemerkt (dies 14, feria 5).

Die Angaben der Mondfinsternisse unterscheiden sich bei Zacuto und Regiomontan insofern, als ersterer in einer knappen *Tabula de eclipsibus lune*[2]) die Termine des Beginns und des Endes der Erscheinung angibt, was durch Differenzbildung der angeführten Zeiten, die uns also die ganze Dauer der Erscheinung erkennen und die Mitte berechnen läßt, unzweideutig bewiesen wird. Regiomontan führt dagegen auf der ersten Seite der einzelnen Jahres-Ephemeride als *eclipsis lune* die Zeit der wahren Opposition von Sonne und Mond oder der Mitte der Finsternis und zugleich die halbe Dauer (dimidia duratio) an. Wir stellen in der kleinen Tabelle die Einzelwerte, soweit sie uns hier interessieren, neben-

Zacuti Almanach perp. 1496										Regiomontani Ephemerides 1475—1504					
num. annorum	nom. mensium	dies	feria	hore	minut	finis eclipsis		duratio (berechnet)		Eclipsis lune		Dimidia duratio		finis (berechnet	
						hore	min.	h.	m.	h.	m.	h.	m.	h.	m.
1494	sept.	14	1	17	5	2	33	?		19	45	1	48	21	33
1497	ian.	18	4	3	50	7	18	3	28	6	38	1	46	8	24
1500	nov.	5	5	10	17	13	30	3	13	14	2	1	37	15	39
1501	maii	2	1	15	33	19	6	3	33	17	49	1	52	19	41
1502	oct.	15	7	10	15	12	9	1	54	12	20	1	1	13	21
1504	febr.	29	5	10	47	14	13	3	26	13	36	1	46	15	22
1505	aug.	14	5	5	42	9	6	3	24	8	18	1	43	10	1

1) Almanach perpetuum celestium motuum (Radix 1473). Tabulae astron. Raby Abr. Zacuti in Latinum translatae per Mag. Jos. Vizinum. Reprod. facsimile. Munich. J. B. Obernetter 1915.

2) Almanach, Faksimile-Ausg. 1915, 327.

einander, fügen die zwischen 1494 und 1504 eingetretenen Finsternisse aber bei. Wie bei Zacuto die „duratio", so findet sich auch bei Regiomontan das „finis" nicht. Sie sind nur zur Übersicht berechnet und beigefügt.

Hier muß zunächst ein sinnloser Druckfehler ausgemerzt werden, der sich übrigens auch in den Venetianer Ausgaben des Zacuto findet. Für das Ende der Mondfinsternis vom 14. Sept. 1494 muß es natürlich $20^h 33^m$ statt $2^h 33^m$ heißen, wonach dann die Dauer mit $3^h 28^m$ normal wird.

12. Die Fehler der Zeitangaben. Eine erste Quelle des Irrtums von Seiten des Kolumbus könnte in der fehlerhaften Berechnung der Eintrittszeiten der Finsternisse in den beiden Tafelwerken liegen. Die Größe der Fehler läßt sich durch einen Vergleich mit den Angaben des großen Oppolzer'schen Canons der Finsternisse[1]) feststellen. Nun gelten die Tafeln der Regiomontan'schen Ephemerides bekanntlich für den Meridian von Nürnberg[2]), die des Almanach perpetuum für Salamanca. Nürnberg (11° ö. v. Gr.) liegt in Zeit 44^m östlich von Greenwich, Salamanca (5° 40′ w. v. Gr.) dagegen 23^m westlich. Im Oppolzer'schen Canon sind alle Angaben auf Greenwich bezogen und in Weltzeit (bürgerlicher Zeit) ausgedrückt, wogegen Regiomontan und Zacuto nach astronomischer Zeit, für welche der Kalendertag mit dem Mittag beginnt, rechnen. Der Vergleich der beiden in Frage kommenden Finsternisse ergibt daher das Folgende (stets in Abrundung auf Zeitminuten):

I. Finsternis, 14. September 1494 (Mitte). Weltzeit

a) Nach dem Canon in Greenwich 15. Sept. $6^h 28^m$ a. m.
Zeitdifferenz für Nürnberg (11° O.) $+ 44^m$
in Nürnberg, 15. Sept. $7^h 12^m$ a. m.
nach den Ephemeriden 14. Sept.: $19^h 45^m = 7^h 45^m$ a. m. 15. IX.
Fehler $+ 33^m$

b) Nach dem Canon in Greenwich, 15. Sept. $6^h 28^m$ a. m.
Zeitdifferenz für Salamanca (5° 40′ W.) $- 23^m$
in Salamanca, 15. Sept. $6^h 5^m$ a. m.
nach dem Almanach perp., 14. IX. $18^h 49^m = 6^h 49^m$ a. m. 15. IX.
Fehler $+ 44^m$

1) Denkschr. der K. Akademie d. Wiss.: Math.-naturw. Classe Bd. 52. Wien 1887, 366.

2) Häufig wird Ulm als Ort bezeichnet, auf dessen Meridian sich die Regiomontan'schen Ephemeriden beziehen. Das ist insofern ein Irrtum, als der Verfasser zu Ulm keine Beziehungen hatte, wohl aber zu Nürnberg. Indessen nahm er, wie aus seiner Tabula civitatum hervorgeht an, daß beide Städte unter gleichem Meridian lägen, obwohl der Längenunterschied einen vollen Grad ausmacht.

Es geht daraus hervor, daß die Überschätzung der Längendifferenz Saona—Kap S. Vicente um $33^m = 8\frac{1}{4}^0$ L., bezw. um $44^m = 11^0$ L. verringert werden würde, falls dem Kolumbus die richtigen Werte für Nürnberg bezw. Salamanca zur Verfügung gestanden hätten. Denn die Erscheinung trat an beiden Orten tatsächlich früher ein, als die Tafelwerke angaben.

II. Beträchtlich kleiner sind die Fehler der älteren Angaben für die Finsternis am 29. Februar 1504.

	Weltzeit	
a) Mitte der Finsternis in Greenwich nach dem Canon, 1. März 1504	$0^h\ 39^m$	a. m.
Zeitdifferenz für Nürnberg	$+\ 44^m$	
in Nürnberg 1. März 1504	$1^h\ 23^m$	a. m.
dagegen nach den Ephemerides, 29. II. $= 13^h\ 36$ oder $=$	$1^h\ 36^m$	a. m. 1. III.
Fehler	$+\ 13^m$	
b) Mitte der Finsternis in Greenwich (Canon) am 1. März 1504	$0^h\ 39^m$	a. m.
Zeitdifferenz für Salamanca	$-\ 23^m$	
in Salamanca 1. März 1504	$0^h\ 16^m$	a. m.
Almanach perp. 29. II. $12^h\ 30^m$ oder $=$	$0^h\ 30^m$	a. m. 1. III.
Fehler	$+\ 14^m$	

In diesem Falle verringert sich also die Zeitdifferenz zwischen Jamaica und den europäischen Städten nur um $13-14^m$ oder der Längenunterschied um $3-3\frac{1}{2}^0$, falls man die richtigen Werte ein stellt.

13. Die Übertragung der Ephemeriden-Meridiane auf die östlichen Nullpunkte der Längenbestimmungen. Eine schwer aufzuhellende Frage ist, ob die im Entdeckungszeitalter astronomische Ephemeriden benutzenden Seefahrer sich klar darüber sind, daß die Zeiten, welche dort für einen bestimmten Meridian berechnet sind, erst auf den Ausgangspunkt der westlichen oder östlichen Längenrechnung übertragen werden mußten. Kolumbus geht bei seiner ersten Bestimmung von 1494 vom Kap S. Vicente, bei der zweiten von Calis (Cadix) aus. Das dürfte der historischen Entwicklung der Ereignisse entsprechen. Toscanelli nahm in seinem Briefe von 1474, der an den König von Portugal gerichtet war, als östlichen Anfangspunkt des vorgeschlagenen Westweges naturgemäß Lissabon an. Die Abfahrthäfen der späteren Entdeckungsreisen der Portugiesen und Spanier lagen an der Südküste, nämlich Lagos bezw. Palos. Darin daß Kolumbus

1494 noch das Kap S. Vicente als Anfangspunkt für seine Längenbestimmung wählte, können wir noch eine Nachwirkung der Schule von Sagres erblicken. Als jedoch bald nach der Entdeckung Amerikas Sevilla in den Vordergrund der spanischen Unternehmungen tritt, wird der Küstenpunkt Calis für die Folge theoretisch Nullpunkt für die Westwege.

Man ist bei solchen Fragen freilich nur zu sehr geneigt, die Lagenverhältnisse nach unsern heutigen genauen Kenntnissen zu beurteilen, statt sich in die geographische Vorstellung der Zeit — in unserm Falle also der um die Wende des 15. Jahrhunderts — mit ihrer so vielfach noch außerordentlich mangelhaften Kenntnis der gegenseitigen Ortslagen zu versetzen.

Betrachten wir die heutigen Karten, so zeigt sich, daß der Meridian von Cadix ($6^h\,19^m$ w. v. Gr.) nur sehr wenig von dem von Salamanca ($5^0\,40'$ W.) abweicht, so daß eine Übertragung der für Salamanca berechneten Ephemeriden auf Cadix einen in damaliger Zeit kaum empfundenen Fehler mit sich bringt. Ein wenig anders stellt sich die gleiche Übertragung auf Kap S. Vicente, da dieses (9^0 w. v. Gr.) schon mehr als 3^0 westlich von Salamanca liegt. Weit größer sind die Längenunterschiede natürlich zwischen Nürnberg und den südspanischen Punkten. Nürnberg (11^0 ö. v. Gr.) liegt fast 17^0 östlich von Salamanca. Versetzen wir uns dagegen in die Zeit des Kolumbus, so ist anzunehmen, daß auch er in einer Identifikation des Meridians von Salamanca und von Cadix kein Bedenken gesehen haben würde. In der „*Tabula longitudinis et latitudinis civitatum ab occidente habitato*“ des Almanach perpetuum Zacutos [1]) findet sich zwar Cadix nicht aufgeführt, aber die Portulankarten jener Zeit pflegten Sevilla (Sibilia) und Calis in die gleiche Nordsüdlinie zu zeichnen [2]). Und in der Tabula des Almanachs folgt Sibilia unmittelbar auf Salamantica, und sie gibt dem letzten Ort $25^0\,46'$ L., Sibilia dagegen $26^0\,5'$ L.; daraus folgt also ein Unterschied von nur 19 Bogen- oder $1\frac{1}{4}$ Zeit-Minuten, ein Wert, der für Kolumbus nicht irgendwie in Betracht kam. Denn man beachte, daß er seine Zeitangaben gelegentlich der Beobachtung der Mondfinsternisse bei ihrer Unzuverlässigkeit stets auf Viertelstunden abrundet ($5\frac{1}{2}^h$ und $7\frac{1}{4}^h$); einen Längenunterschied von $\pm\,\frac{1}{3}^0$ glaubt er also vernachlässigen zu dürfen. Was freilich Kap S. Vicente betrifft, so konnten ihn die Portulankarten größern Maßstabes aus

1) Faksimile-Ausgabe 1915, 325.

2) Tatsächlich ist der Längenunterschied zwischen Cadix ($6^0\,19'$ W.) und Sevilla ($5^0\,56'$ W.) nur 23'.

dieser Zeit nicht über die beträchtlich westlichere Lage als die von Calis oder Sibilia täuschen. Sie zeichneten Kap S. Vicente und Lissabon in gleiche Nord-Südlinie und Lissabon lag nach dem Almanach perpetuum (22° 54′) fast 3° westlich von Salamanca (25° 46′). Auf den Weltkarten damaliger Zeit verschwinden vermöge der Kleinheit ihres Maßstabes auch diese Differenzen mehr oder weniger. Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß man Kolumbus bei ausschließlicher Benutzung des Almanach perpetuum des Zacuto aus der Annahme, daß die in ihm enthaltenen Zeiten für Kap S. Vicente oder Calis annähernd ebenso gelten, wie für Salamanca, keinen ernsten Vorwurf machen könnte.

Anders liegt die Sache bei Benutzung der Ephemerides des Regiomontan. Ein einziger Blick in die *Tabula regionum*, die sich allerdings nicht in allen vor 1494 erschienenen Ausgaben derselben findet, mußte ihm sagen, daß die Längendifferenz zwischen den auf den Nullmeridian ($0^h 0^m$) verlegten Orten wie Prunsviga, Nuremberga, Ulma, Mediolanum einerseits und westspanischen Städten andererseits eine sehr bedeutende sei. Die Länge wird dort, wie angedeutet, in Zeit angegeben und z. B. erhält Corduba eine Länge von *m* $1^h 27^m$ (d. h. *minue* für alle westlich des Meridians $0^h 0^m$ gelegenen Orte), Toletum *m* $1^h 24^m$, Lisibona und Compostellum je *m* $1^h 40^m$. In den Venediger Ausgaben der Alfonsinischen Tafeln ward die gleiche Tabula regionum aufgenommen, aber (mit geringen Abweichungen) einfach auf den Meridian von Toledo ($0^h 0^m$) umgerechnet, so daß nun z. B. Nuremberga und Ulma die Länge *or.* $1^h 24^m$ erhalten. Man sieht, daß Regiomontan und die mitteleuropäischen Kosmographen seiner Zeit die fraglichen Längenunterschiede noch beträchtlich überschätzten. Lissabon soll 25° w. v. Nürnberg liegen, während der Längenunterschied tatsächlich nur 20° 13′ beträgt. Würde die Übertragung der den Regiomontan'schen Ephemerides entnommenen Zeiten auf Calis oder Kap S. Vicente durch Kolumbus auch einen sehr bedeutenden Teil der Überschätzung der Entfernung der westindischen Inseln erklären, so würde sie doch einen so tiefen Stand seiner astronomischen Kenntnisse, so gering man sie sonst bewerten mag, bekunden, daß man sich schwer entschließen kann, sie ihm zuzumuten. Hat Kolumbus 1504 den Almanach des Zacuto und die Ephemerides Regiomontan's gleichzeitig benutzt, so hätte ihm der beträchtliche Längenunterschied der beiden Ephemeridenmeridiane ja bereits aus dem Zeitunterschied der fraglichen Mondfinsternis klar entgegentreten müssen (Zacuto $12^h 30^m$, Regiomontan $13^h 36^m$, Differenz: $1^h 6^m$).

Ein letzter Einwand gegen diese Schlußfolgerungen könnte

dadurch erhoben werden, daß nicht alle Ausgaben der Ephemerides (wie z. B. die von 1474 oder Venetiis Impr. per Erh. Radolt 1484) die Tabula regionum enthalten und andererseits Zacuto's Tabula weit kleinere Längendifferenzen einsetzt, wie z. B. für Salamanca (25° 40′) — Venetiis (33° 30′) kaum 8° statt fast 16°. Indessen ist es an sich ungereimt anzunehmen, Kolumbus habe sich aus dem Almanach perpetuum erst über die Lage Nürnbergs orientieren wollen, über deren Bedeutung für die Ephemeriden ihm ja ohne die Tabula regionum überhaupt schwerlich etwas bekannt sein konnte.

14. Die Zeitbestimmung der im Westen beobachteten Finsternisse. Von verschiedenen Erklärern der so fehlerhaften Längenbestimmungen des Kolumbus wird auf die bekannte Schwierigkeit hingewiesen, den genauen Zeitpunkt von Beginn und Ende einer Mondfinsternis, und damit die Berechnung der Dauer der Erscheinung bezw. ihrer Mitte festzustellen, wobei an die Verschwommenheit der Penumbra, des Schattensaums, erinnert wird. So z. B. von O. Peschel[1]) und ebenso von E. A. d'Albertis[2]). Für die Zeiten, die uns hier beschäftigen, kommen noch die mangelhaften Hilfsmittel der Zeitmessung hinzu. Kolumbus bediente sich, wie er selbst angibt, halbstündiger Sanduhren (ampolletta). Für die Beobachtung am 29. Februar 1504 macht er eine kontrollierbare Zeitangabe. Der Austritt des Mondes aus dem Erdschatten oder das Ende der Finsternis sei genau $2\frac{1}{2}$ Stunden (cinco ampollettas) nach Sonnenuntergang erfolgt. Da man für den Beobachtungsort an der Nordküste von Jamaica die Breite von $17\frac{1}{2}^0$ annehmen kann, so ergibt, wenn man alle feinern Korrektionen außer Acht läßt, eine leichte Rechnung, daß die Sonne am 29. Februar 1504 nach Julianischem Kalender um $6^h 5^m$ p. m. unterging. Nach den Beobachtungen des Kolumbus müßte also das Ende der Finsternis um $6^h 5^m + 2^h 30^m = 8^h 35^m$ p. m. eingetreten sein. Andererseits muß dies Ereignis, welches nach dem Oppolzer'schen Canon in Greenwich am 1. März um $0^h 39^m + 1^h 43^m = 2^h 22^m$ a. m. eintrat, im Mittelmeridian von Jamaica (77^0 W. $= 5^h 8^m$) am 29. Februar um $2^h 22^m - 5^h 8^m = 9^h 14^m$ p. m. Ortszeit beobachtet worden sein. Der Irrtum, den Kolumbus in der Zeitbestimmung begangen hat, betrüge also mehr als eine halbe Stunde. Aber die Überschätzung der Längendifferenz ist damit auch nicht zum Teil erklärt, denn Kolumbus will ja das Ende der Finsternis über $\frac{1}{2}$ Stunde früher (um $8^h 35^m$) beobachtet haben, als sie nach Ortszeit stattfand.

---

1) Gesch. d. Erdkunde 1865, 360; 2. Aufl. 1877, 400.

2) Raccolta Columbiana Part IV, Vol. I. Madrid 1863, 161.

15. Schlußbetrachtung. Aus allen diesen Darlegungen geht hervor, daß keine der Einzelkorrektionen, die wir an den Angaben des Kolumbus über seine aus Mondfinsternissen abgeleiteten Längenbestimmungen versuchten, die Überschätzung der Entfernungen ausreichend erklärt. Die richtigen Ergebnisse würden die von ihm entdeckten Inseln dem europäischen Kontinente viel näher gerückt haben, als es ihm, der bis zum Tode an dem Gedanken festhielt, den Ostrand Asiens erreicht zu haben, in seine Schlußfolgerungen paßte. So kommt man auf den Gedanken, daß die beiden positiven Annahmen von $5\frac{1}{2}^h$ Zeitdifferenz zwischen Saona und Kap S. Vicente und von $7\frac{1}{4}^h$ zwischen Jamaica und Calis doch nur willkürlich eingesetzte Werte waren, auch wenn sie hier als Ergebnisse rationeller astronomischer Beobachtungen und Berechnungen hingestellt wurden. Gesetzt nun, Kolumbus sei selbst von einer so weiten Entfernung von Española (Saona) vom europäischen Kontinent überzeugt gewesen, wie er sie behauptet, so konnte er auf Grund seiner letzten westindischen Fahrten nicht wohl im Jahre 1504 noch der Ansicht sein, daß zwischen der Mitte Jamaicas und der Ostspitze Españolas (Haitis) ein Längenunterschied in Zeit bestehe, wie man sie aus seinen eigenen Angaben ableiten müßte, nämlich von $7\frac{1}{4}^h - 5\frac{1}{2}^h = 1\frac{3}{4}^h$ oder in Bogen von rund 26^0; denn er beträgt tatsächlich höchstens $10\frac{1}{2}^0$. Von diesem Standpunkt aus erscheint die eigenhändige Nebeneinanderstellung der Ergebnisse der beiden Längenbestimmungen im Libro de las Profecias, die durch das erhaltene Autogramm des Entdeckers verbürgt ist, doppelt seltsam.

IV. Die Längenbestimmung nach Mondabständen vom 23. August 1499 (Vespucci).

16. Canovai erhebt Vespucci zum Entdecker der neuen Methode (1791). Gehen wir nun des Näheren auf die dem Vespucci zugeschriebene Bestimmung der astronomischen Länge eines Punktes an der Küste von Venezuela mittels der Methode der Mondabstände ein, so ist mit Nachdruck zu betonen, daß bis 1917 von keinem Historiker der Astronomie behauptet oder nachgewiesen ist, daß diese Methode vor 1499 überhaupt bekannt gewesen sei. Sie vertreten, so viel ich sehe, von Canovai und seinen Nachfolgern abgesehen, durchweg die Ansicht, daß der erste Forscher, welcher auf sie aufmerksam gemacht habe, der deutsche Astronom Johannes Werner gewesen sei, der sie in seinem Werk „Primi libri Geographiae Cl. Ptolemaei paraphrasis“ 1514[1])

---

1) Werner's Werk in der Originalausgabe (Norimbergae 1514) ist selten,

veröffentlichte. Sie findet sich dort im Argumentum Cap. IV, Annotatio octava beschrieben. Nichts deutet dabei an, daß Werner eine schon früher bekannte Methode mitteilt. Wenn er zum Schluß Zweifler („Et si scrupuli hujus dubio angatur") auf das V. Buch des Ptolemaeischen Almagests verweist, so enthält bekanntlich dieses die allgemeine Theorie der Mondbewegung, aber nichts über die Längenbestimmung durch Mondabstände. Auch Canovai[1]) kennt diese Stelle aus Werners Werk, aber weil er die Methode von Vespucci schon 1499 angewendet sieht, ohne einen andern Vorgänger namhaft machen zu können, so erhebt er letztern zuerst zu ihrem Entdecker. Und v. Zach[2]) beeilt sich 1810 ihm fast wörtlich zu folgen:

„Auf die Aufgabe, die geographischen Längen aus der Beobachtung der Abstände der Gestirne vom Monde abzuleiten, ist weder Ptolemaeus noch seine vielfältigen Uebersetzer und Ausleger verfallen, obgleich er selbst im VII. Buch III. Capitel seines Almagests ganz bestimmt auf diese Methode hindeutet. Er führt nämlich unter andern Beobachtungen auch die einer Zusammenkunft des Mondes und der Kornähre (Spica virginis) im 27. Grad der Jungfrau an, und sagt dabey mit klaren Worten, daß diese Erscheinung, welche sich in Rom um 5 Uhr zugetragen habe, in Alexandrien erst um 6 Uhr 20 Minuten gesehen worden sei. Und doch hat dies so sichtbar hingeworfene Korn in so vielen Jahrhunderten keinen fruchtbaren Boden gefunden, in welchem es aufgekeimt wäre! Dem Entdecker der neuen Welt, dem berühmten Amerigo Vespucci war es vorbehalten, die wahre Methode zur Erfindung der Meereslänge auszudenken, vorzuschlagen, auch wirklich zur See in Anwendung zu bringen".

17. Spätern gilt Vespucci als erster Anwender der Methode. Die spätern Historiker der Astronomie scheinen den eben Genannten nicht gefolgt zu sein, sondern sie sprechen nur noch von einer ersten Anwendung der betreffenden Methode durch Vespucci, wie z. B. Rud. Wolf[3]). Und in der Tat, wer sich in seine Zeit versetzt und die Person oder die Schicksale des Entdeckers richtig würdigt, dem wird es heute nicht mehr in den Sinn kommen, in ihm denjenigen zu erblicken, der eine so sinnreiche neue astronomische Methode geographischer Ortsbestimmung theoretisch ersonnen haben könne. Zwar kann, nach allem, was wir von Vespucci wissen, darüber kein Zweifel sein, daß er in seiner

doch ist sie wieder abgedruckt in der „Introductio geographica Petri Apiani in doctissimas Verneri annotationes" etc. Ingolstadii An. 1533. fol. Nicht allgemein bekannt dürfte sein, daß hierin die Bogen *b—k*, den Hauptteil von Werner's Schrift enthaltend, nach Druck, Wasserzeichen des Papiers und Druckfehlern unmittelbar der Restauflage des ältern Werkes entnommen sind.

1) Saggi Accad. Etrusca IX. 1791, 343.

2) Monatl. Correspondenz Bd. 22, 1810, 531.

3) Geschichte d. Astronomie, München 1877, 155.

weit höhern Vorbildung und nach seinen Kenntnissen wissenschaftlicher Nautik weit einen Kolumbus überragte. Aber den gleichen Fehler, aufs ruhmredigste mit diesen seinen Fähigkeiten und seinem Wissen zu prahlen, hatte er mit ihm gemein. Es ist denkbar, daß Vespucci (geb. 1451) in seiner Heimat Florenz die Unterweisung eines Toscanelli († 1482) genossen, auch den in Ferrara wirkenden Giovanni Bianchini gekannt habe. Und seine Berufung zur Stellung eines spanischen Piloto major im Jahre 1508, welches Amt er bis zu seinem Tode 1512 innehatte, spricht für das hohe Ansehen, das er sich als Nautiker bei seinen Zeitgenossen erworben hat. Dennoch ist damit nicht bewiesen, daß er als Praktiker das habe leisten können, was astronomischen Theoretikern vorbehalten blieb, wie einem Joh. Werner (1514), P. Apian (1529), Gemma Frisius (1530), um nur die Männer zu nennen, die noch in der Zeit der Entdeckungen neue Vorschläge für die Längenbestimmung machten. Erinnern wir uns aber für die nachfolgende Betrachtung über die dem Vespucci zugeschriebene erstmalige Anwendung der neuen Methode, daß es sich um einen Mann nicht ohne wissenschaftliche Kenntnisse der astronomischen Nautik handelt.

18. Die Alfonsinischen Tafeln enthalten nichts über die Methode (contra Bensaude). Hat Vespucci nun tatsächlich die Beobachtungen gemacht, welche er in dem ihm zugeschriebenen Brief vom 18. Juli 1500 an Lorenzo dei Medici entwickelt, ohne der Erfinder der Methode zu sein, so müßte man eine Quelle, aus der er schöpfte, nachweisen können. Das war bisher weder dem für ihn begeisterten Canovai noch irgend einem andern den Fall behandelnden Forscher gelungen. Auch Wilhelm Förster, der ihn in allerjüngster Zeit (1916) wieder ans Licht zog, um damit die Bedeutung der Ephemerides des Regiomontan für die astronomische Längenmessung im Entdeckungszeitalter nachzuweisen, gibt darüber keine Auskunft. Auf eine höchst einfache Weise löste dagegen in jüngster Zeit der Portugiese Joaquim Bensaude, der Verfasser des trefflichen Werkes L'astronomie nautique au Portugal à l'époque des grandes découvertes (Bern 1912), die verwickelte Frage, anknüpfend an die Worte Vespucci's, daß er den Almanach des Johannes Monteregio übereinstimmend mit den „*calcolazioni del Re D. Alfonso*" gefunden habe (s. u.). In seinem Übereifer, den von deutscher Seite seiner Meinung nach weit überschätzten Einfluß des Regiomontan auf die Entwicklung der portugiesischen Nautik herabzumindern, weist Bensaude auf den — übrigens von keiner Seite behaupteten — Umstand hin, daß Vespucci aus den Canones der „Ephemerides" keine Belehrung

über die Methode der Längenbestimmung durch Mondabstände habe schöpfen können, da in ihnen eine Anweisung nicht gegeben sei. „Vespucci trouvait chez Regiomontanus la date et l'heure de la conjunction de la lune et le Mars, le 23 août 1499. Il n'y trouvait rien sur la méthode, qu'il avait prisée dans les Libros del Saber du roi Alphonse, où elle se trouve plusieurs fois (sic) répétée"[1]. Für diese ganz neue Erkenntnis, die hier in so apodiktischer Kürze aufgestellt wird, bringt Bensaude, der sonst seine literarischen Quellen in erfreulicher Vollständigkeit und Korrektheit zitiert, auch nicht den Schatten eines Beweises. Trotzdem er an anderer Stelle (a. a. O. 62) die wichtigen neuen Arbeiten Alfred Wegeners[2], welche viel Klarheit über die astronomischen Werke Alfons X., insbesondere die Libros del Saber, verbreitet haben, lobend erwähnt, zeigt der portugiesische Forscher in diesem Falle die gleiche Oberflächlichkeit, die er den deutschen Historikern der mathematischen Geographie mit so viel Emphase vorwirft. Denn es ist eine ganz unbewiesene Behauptung, wenn er sagt (a. a. O. p. 67): „Comment Vespucci a-t-il connu la méthode du calcul, est-ce par les Ephémérides? Non, puisque nulle part dans ce livre il en est question; c'est dans les 'calcolazioni delle Tavole del Re D. Alfonso' qu'il a appris le procédé". Warum führt Bensaude die mehrfachen Stellen in den Libros del Saber nicht vor? Wohl findet sich in diesen ein kurzes Kapitel, überschrieben: *„De saber tomar la longueza de las uillas por los eclipses lunares"*[3]. Aber dort ist ausschließlich von dem allgemeinen Grundgedanken der Längenbestimmung durch Vergleichung der Ortszeit zweier Punkte der Erdoberfläche auf Grund des Eintritts der Mondfinsternisse die Rede; mit keinem Worte wird dagegen auf eine bestimmte Methode, geschweige denn diejenige, sie durch Messung der Mondabstände zu finden, hingewiesen. Und an keiner andern Stelle der Libros del Saber, die bekanntlich bis 1863 als Handschrift in den Archiven und Bibliotheken vergraben waren und dem Vespucci sicher niemals zu Gesicht gekommen sind, und ebensowenig in den umfangreichen Canones zu den Venetianer Ausgaben der Alfonsinischen Tafeln findet sich irgend eine Andeutung über die fragliche Methode. Diese neue, durchaus unbegründete Legende hat

1) Hist. de la science naut. portugaise 1917, 66.

2) Die Alfonsin. Tafeln für den Gebrauch des modernen Rechners, Diss. Berlin 1905; Die Astronomischen Werke Alfons X. (Bibliotheca Mathematica. 3. Folge. Bd. 6. 1905. 129—185).

3) Libros del Saber. Vol. III. Madrid 1864. Cap. XLI, 195.

also Herr Joaquim Bensaude erst 1917 in die Welt gesetzt. Es scheint, daß hiebei der Irrtum noch nachgewirkt hat, in dem er sich 1912 befand. Mehrfach (L'astron. naut. p .10 und 21) spricht er dort vom „calcul des longitudes par la méthode de la différence de l'heure d'une éclipse de la lune, comme l'a fait Vespucci en 1499".

19. Der Wortlaut des Briefes vom 18. Juli 1500 über die vermeintliche Längenmessung vom 23. August 1499. Wie hervorgehoben, gilt dieser zuerst 1745 von Bandini veröffentlichte Brief der Mehrzahl der neuern Historiker der Geographie, wie auch mir selbst, als unecht. Um aber die sachlichen Ungereimtheiten desselben nachzuweisen, vereinfacht es die Sache, wenn wir zuerst Vespucci, als sei er der wirkliche Verfasser, reden lassen, um die Gründe für die Unechtheit des Briefes am Schluß (s. § 25) zu behandeln. Aus der Einleitung bedarf es nur der Hervorhebung folgender Stelle in betreff der Überfahrt von den Canarischen Inseln an die Nordküste von Südamerika während der zweiten Reise des Vespucci unter Führung des Hojeda: „*Fecemo vela di un' Isola che si chiama la Gomera e metemmo la prua per il libeccio e navigammo XXIIII. dì con fresco vento, senza vedere terra nessuna, e al capo. di XXIIII. dì avemmo vista di terra, e trovammo avere navigato al piè di 1300. leghe discosto dalla Città di Calis per la via di libeccio*".

Da Vespucci an einer spätern Stelle (s. u. § 24) den Erdgrad zu $16\frac{2}{3}$ leghe oder $66\frac{2}{3}$ miglia annimmt, entspricht die hier angegebene Entfernung von 1300 leghe einem Abstand im Bogen von rund 78°. Wir kommen auf diesen Punkt zurück (§ 24). Die lange Ausführung über die Breitenlagen von Calis in $35\frac{1}{2}°$ Br. und des Endpunkts der Fahrt an der Nordküste von Südamerika (6° Br.) übergehen wir. In letztgenannter geographischer Breite, meint er, ist die Tageslänge im August nicht merklich verschieden von der der Nacht. Dann geht er zur Längenbestimmung über:

„*Quanto alla longitudine diço, che in saperla trovai tanta difficoltà, che ebbi grandissimo travaglio in conoscer certe il camino, che avevo fatto per la via della longitudine, e tanto travagliai, che al fine non trovai miglior cosa, che era a guardare e veder di notte le oposizione dell' un pianeta coll' altro e mover la Luna con gli altri pianeti; perchè il pianeta della Luna è più leggier di corso, che nessuno altro, e riscontravalo con l'Almanaco di Giovanni di Montereggio, que fu composto al meridiano della Città di Ferrara, accordandolo con la calcolazione delle Tavole del Re Don Alfonso: e dipoi di molte note, que ebbi fatto sperienza, una notte infra l'altre, essendo a' ventitrè di Agosto del 1499,*

che fu in conjunzione della Luna con Marte, la cuale seconde l'Almanacco aveva a essere a mezza notte, o mezza ora prima; trovái, che quando la Luna salì all' orizonte nostro, che fu un' ora e mezza dipoì diposto di Sole, aveva passato il pianeta alle parte dell'oriente, dico, che la Luna stava più orientale, che Marte, circa d'un grado e alcun minuto più, e a mezza notte stava più all oriente 5 gradi e mezz. poco più o meno di modo che fatta la perpensione, se 24. ore mi vagliono 360. gradi che mi varranno 5. ore, e mezz. trovo che mi varranno 82. gradi e mezz., e tanto mi trovavo di longitudine del meridiano della Città di Calis, che dando a ogni grado 16 leghe, mi trovavo più all' occidente, che la Città di Calis 1366 leghe e due terzi, que sono 5466 miglia e due terzi. La ragione perchè io do 16 leghe e due terzi per ogni grado, perchè secondo Tolomeo, e Alfragano la terra volge 24 000, che vagliono 6000. leghe, che ripartendole per 360. gradi, avvene a ciascun grado 16. leghe e due terzi, e questa ragione la çertificai molte volte col punto de' piloti, e la trovai vera e buona".

Die einleitenden Worte Vespucci's, daß es ihm die größte Schwierigkeit bereitet habe, die Länge des Weges, den er zurückgelegt hat, zu bestimmen, versteht Canovai (a. a. O. p. 336) nicht, da er ja kurz vorher dieselbe zu 1300 leghe bei Südwestkurs zwischen Calis (35° 30′ Br.) und seinem zeitigen Aufenthalt angegeben habe. Wie dem auch sei, meint Canovai, seine Zweifel hätten Vespucci auf die ganz neue Methode geführt. Doch diesen Punkt verfolgen wir nach den obigen Bemerkungen nicht weiter.

20. Zeitpunkt der Konjunktion in Regiomontans Ephemerides. Die Grundlage der Methode, beruhend in erster Linie auf der weit schnellern Bewegung des Mondes gegenüber derjenigen der Planeten, ist richtig dargestellt. Als Ausgangspunkt dient ihm eine Angabe im „Almanach" (sc. den Ephemerides) des Regiomontan, wonach für den 23. August 1499 um 12^h Nachts eine Konjunktion von Mond und Mars vorausberechnet war. In der Tat findet sich eine solche in den Ephemerides und zwar in der Zeichensprache astronomischer Tafelwerke, die dem Laien unverständlich ist, also einen Benutzer voraussetzt, der sie kennt, und in solchen Ephemeriden zu lesen versteht. In der mit ♂, dem Zeichen des Mars, überschriebenen Kolumne steht auf der dem Monat August 1499 gewidmeten Seite unter dem 23. August 1499 das Konjunktionszeichen ☌ neben der Zahl 12. Zweifellos geht hieraus eine direkte Einsicht Vespucci's in das Ephemeridenwerk des Regiomontan hervor. Nicht sicher ist, wie der Zusatz im Briefe: „*a mezza notte o mezza ora prima*" zu verstehen ist. Canovai stellt zur Erwägung (a. a. O. 337), ob Vespucci hier im

Vorbeigehen nicht vielleicht auf eine damals sehr bekannte Entdeckung Toscanelli's habe anspielen wollen, dem die Sonnenfinsternisse seit langer Zeit so viele und große Anomalien in der Mondbewegung geoffenbart hätten, daß er an den gewöhnlichen Tafeln eine Verbesserung von $\pm \frac{1}{2}$ Stunde habe anbringen wollen. Die Sache ist, scheint es, nicht zu entscheiden, jedenfalls hält sich Vespucci in seiner Berechnung an die Konjunktion um Mitternacht.

21. Die stillschweigende Substitution von Calis für Nürnberg bezw. Ferrara durch Vespucci. Nun aber erhebt sich die wichtigste Frage. Unter welchem Meridian, an welchem Orte ward die Erscheinung um Mitternacht beobachtet? Daß dieser grundlegende Punkt von einem in der nautischen Astronomie nicht unbewanderten Mann, wie Vespucci, der doch gleich anfangs der Briefstelle selbst darauf aufmerksam macht, daß der Almanach des Regiomontan nach dem Meridian von Ferrara angefertigt sei, mit keinem Wort erläutert wird, bildet m. E. eines der Hauptargumente dafür, die ganze Längenmessung für apokryph, für eine künstlich zurecht gezimmerte Legende zu erklären.

Begreiflicher Weise macht dieser Punkt auch dem Verteidiger des Vespucci, Stanislao Canovai, ernste Schwierigkeiten. Nebensächlich ist dabei, daß an sich nicht die Rede davon sein kann Regiomontan habe seine Ephemeriden auf den Meridian von Ferrara gegründet. Ferrara wird nicht einmal in der *Tabula regionum* des Regiomontan erwähnt. Es scheint mir hier eine Verwechselung mit den *Tabulae Joannis Bianchini* (Blanchinus) vorzuliegen, die in der Tat den Meridian von Ferrara zu Grunde legten[1]). Bekanntlich basieren die Ephemerides des Regiomontan auf dem Meridian von Nürnberg (s. oben S. 281). Groß ist freilich der Fehler bei einer Substitution von Ferrara in Wirklichkeit nicht, da dieser Ort kaum $\frac{1}{2}^0$ östlich von Nürnberg liegt. Nach Regiomontan's Auffassung, wie sie sich in seiner *Tabula regionum* ausspricht, in welch letzterer der Stadt Venezia eine Länge von *a.* $0^h\,10^m$ in Zeit, also $2\frac{1}{2}^0$ östlich von Nürnberg, gegeben wird, ist die Identifikation des Meridians von Ferrara und von Nürnberg freilich schon bedenklicher. Indessen verschwinden diese geringen Differenzen gegen-

---

1) In den Canones der „Tabulae Jo. Blanchini celestium motuum" (Venetiis 1495, A. 4, Bl. 2) heißt es: „Radices etiam motuum seu locorum ad meridianum felicissime civitatis ferrarie et per consequens bononie sexti climatis intelligant".

über dem unverzeihlichen Hauptfehler, den Vespucci begeht, indem er die Zeit, für welche die Konjunktion des Mondes mit dem Mars (12^h Nachts) am 23. August 1499 für Nürnberg vorausberechnet wurde, ohne alles Bedenken auf Calis (Cadix) in Südspanien überträgt. Canovai bemüht sich im Anfang seiner Abhandlung „Sulle Vicende delle Longitudini Geografiche" lang und breit festzustellen, welche Längendifferenz nach Ansicht der ältern Astronomen zwischen Ferrara und Calis bestanden habe. Für die Zeiten vor Vespucci oder bis zur Entdeckung von Amerika weiß Canovai allerdings nur Ptolemaeus und die Alfonsinischen Tafeln mit $27^0 20'$ bezw. $27^0 30'$ Längendifferenz anzuführen, wobei er, da seine Quellen beide Orte nicht nennen, für Ferrara den Meridian von Padua, für Calis den von Lissabon einstellt. Wir haben oben (S. 281) darauf hingewiesen, daß die Zeitgenossen der Entdecker um 1500 den Längenunterschied wohl mindestens auf 17^0 annahmen. Canovai ist zwar der Ansicht, daß Vespucci vor seiner Berechnung die im Almanach für Ferrara angegebene Zeit auf Calis übertragen habe, aber die Tatsache, daß er die Zeitdifferenz, die dem Längenunterschied zwischen Europa und Spanien entspricht, ausschließlich darauf bezieht, daß die Konjunktion in Calis um Mitternacht erfolge, beweist das Gegenteil. Einem Nautiker vom Range eines Amerigo Vespucci ist ein solches fundamentales Versehen nicht zuzutrauen und eben deshalb spricht die Erzählung in diesem Punkte zweifellos gegen die Urheberschaft der Messung von Seiten des italienischen Entdeckers.

22. Vespucci's Beobachtungen in Westindien. Vespucci sieht am Abend des 23. August 1499 und zwar $1\frac{1}{2}^h$ nach Sonnenuntergang, also um $7\frac{1}{2}^h$ p. m., Mond und Mars nahe bei einander, nämlich den erstern nur 1^0 östlich des Mars stehen. Um Mitternacht bemerkt er, daß sich der Mond um $5\frac{1}{2}^0$ vom Mars entfernt hat. Also hat er in der Zeit von $7^h 30^m$ bis 12^h nachts, oder in $4\frac{1}{2}$ Stunden, einen Bogen von $4\frac{1}{2}^0$ zurückgelegt, demnach je 1^0 in einer Stunde, und die Konjunktion muß daher vor $5\frac{1}{2}$ Stunden, d. h. um $6\frac{1}{2}^h$ p. m. stattgefunden haben.

Hier erhebt sich zunächst die Frage, auf welchem Wege Vespucci diese Entfernungen von 1^0 und $4\frac{1}{2}^0$ bestimmt haben könne? Die allein ihm zur Verfügung stehenden Instrumente, Astrolabium und Quadrant, welche nur Winkel in der Vertikalebene zu beobachten gestatteten, für die Nautiker damaliger Zeit also besonders zur Bestimmung von Polhöhen oder Sonnenhöhen Verwendung fanden, konnten ihm bei Beobachtung der Mondabstände von Sternen

nicht dienen. Der Jakobstab oder Gradstock war, wie wir heute wohl allgemein annehmen, nachdem die älteren Legenden, daß Regiomontan ihn erfunden und Behaim ihn in die portugiesische Nautik eingeführt habe, mit triftigen Gründen widerlegt sind, zu Vespucci's Zeit noch nicht in die Marinen eingeführt. Jedenfalls hätte er mit einem solchen so kleine Winkel wie 1^0 und $4\frac{1}{2}^0$ überhaupt nicht direkt messen können, da das Instrument dies nicht gestattet. Allenfalls ließe sich annehmen, er habe, wenn er den Jakobstab hätte anwenden können, die genannten Entfernungen indirekt dadurch bestimmt, daß er den Winkel zwischen Mondrand und einem weiter entfernten Fixstern um $7\frac{1}{2}^h$ und 12^h nachts gemessen und ebenso denjenigen zwischen demselben Fixstern und dem kaum sich fortbewegenden Mars maß, um daraus dann die Entfernungen Mond—Mars abzuleiten. Aber auch dieser Ausweg ist hinfällig bei dem Fehlen des Instruments. Denn, wie gesagt, den Jakobstab hatte er nicht zur Verfügung. So bleibt nur die rohe Schätzung mit dem Auge übrig, in der ja freilich die scharf beobachtenden Seeleute zu allen Zeiten Meister waren. Es ist von vornherein anzunehmen, daß auch Vespucci der landläufigen Anschauung huldigte, welche dem scheinbaren Durchmesser des Mondes eine Größe von $\frac{1}{2}^0$ zuweist. So hätte also um $7\frac{1}{2}^h$ p. m. der westliche Mondrand in der Entfernung zweier Monddurchmesser östlich vom Mars gestanden. Dagegen ließe sich nicht viel sagen. Gewagter ist es schon, mit bloßem Auge eine Entfernung von 11 aneinandergereihten ideellen Mondscheiben am Himmel verbürgen zu wollen, um zu behaupten, der Mond habe um 12^h nachts eine Entfernung von $5\frac{1}{2}^0$ vom Mars gehabt.

23. Die stündliche Fortbewegung des Mondes. Wollen wir also zugeben, daß es nicht völlig unmöglich ist, seine Beobachtung nach diesem allerdings sehr rohen Verfahren zu erklären, so spricht wiederum das Ergebnis gänzlich gegen die Wahrscheinlichkeit. Denn dieses besagt nichts anderes — Vespucci spricht es ja selbst aus —, als daß der Mond sich in jeder Stunde um einen vollen Grad fortbewegt habe. Das aber widerspricht der Natur dieser Bewegung so vollkommen, daß damit die ganze Erzählung in sich zusammenbricht. Denn bekanntlich ist die mittlere stündliche Bewegung des Mondes nur wenig über $\frac{1}{2}^0$, genauer 33′, und erreicht im Höchstfall des Perigaeums 37′ in einer Stunde.

Es ist in der Tat seltsam, daß, wie in der Einleitung nachgewiesen ward, eine große Anzahl von Astronomen an diesem gegen die Wahrscheinlichkeit der ganzen Beobachtung sprechenden

Bedenken ohne Anstand vorübergeht und nur Nautiker darauf hinweisen, daß man einem erfahrenen Seemann, wie es Vespucci doch jedenfalls war, unmöglich zutrauen könne, er habe angenommen, der Mond besitze eine stündliche Bewegung von einem ganzen Grad (Breusing s. o. S. 269).

Dem muß im vorliegenden Fall ein weiterer Grund gegen die Wahrscheinlichkeit solcher Annahme durch Vespucci hinzugefügt werden. Hatte er die Ephemerides des Regiomontan zur Hand, so zeigte ihm ja jede Seite, also auch die, auf welcher er die Konjunktion von Mond und Mars fand, das tägliche Fortschreiten des Mondes in der Ekliptik. Bei der geringen Neigung der Mondbahnebene zu dieser unterscheidet sich die Zunahme der Länge nur unmerklich von der Fortbewegung des Mondes in seiner Bahn. Regiomontan gibt nun als Mondlänge am 22. August 1499: 25° 8′ *piscium*, am 23. August 7° 41′ *arietis*, am 24. 20° 10′ *arietis*, also im ersten Falle für 24 Stunden 12° 33′, im zweiten 12° 29′. Daraus mußte doch Vespucci ohne weiteres sich überzeugen, daß die stündliche Fortbewegung um die Zeit jener Konjunktion sehr nahe nur einen halben, und nicht einen vollen Grad betrage. Die Alfonsinischen Tafeln, die er zum Vergleich herangezogen haben soll, enthalten zudem eine eigene *Tabula veri motus Lune in una hora*, die mit 30′ 18″ beginnt und mit 36′ 4″ endigt (Tabulae astron. Alfonsi Regis, Venetiis 1492, *h* 4).

Und ein Mann, dem man die selbständige Entdeckung eines so sinnreichen Verfahrens der astronomischen Längenbestimmung zutraut, sollte nicht beim Ergebnis seiner eigenen Messung, die dem Mond einen vollen Grad für jede Stunde an Fortbewegung zuweist, gestutzt haben? Begreiflicher Weise berührt auch Canovai diesen heiklen Punkt (a. a. O. 333). Aber er gleitet über die Schwierigkeit mit der seltsamen Bemerkung hinweg, es sei in Anbetracht der Eigenheit jener Zeiten nicht zu verwundern (non ripugna), Amerigo als völligen Neuling in der bekannten Theorie der jährlichen Bewegung der Planeten zu finden, da im 16. Jahrhundert so und so viele ausgezeichnete Gelehrte über den fraglichen Punkt im unklaren gewesen seien und selbst ein Ruscelli dem Monde eine stündliche Fortbewegung von einem Grad gegeben habe. Auch sei Vespucci ja Pilot und Nautiker, nicht Astronom gewesen. Dem gegenüber halte ich mit Breusing daran fest, daß man gerade dem in der täglichen Beobachtung der Himmelserscheinungen bewanderten Nautiker eine Bekanntschaft mit dem richtigen Ausmaß der Fortbewegung des Mondes zutrauen müsse.

Als Ergebnis findet Vespucci für den Abstand seines Stand-

punktes an der Küste von Venezuela und Calis $82\frac{1}{2}^0$, entsprechend dem Zeitunterschied von $5\frac{1}{2}^h$. Mit Sicherheit kennt man den Küstenpunkt nicht, an welchem die Expedition Hojedas sich am 23. August 1499 befand; man pflegt den Eingang in den See Maracaibo an der Küste Venezuelas als solchen anzunehmen. Dort befindet man sich etwa 71^0 westlich von Greenwich. Es ist daher der reine Zufall, daß das Ergebnis mit den tatsächlichen Lagenverhältnissen gut übereinstimmt, aber nur sobald man die Mitternacht-Konjunktion zwischen Mars und Mond auch auf den Punkt, für dessen Meridian sie von Regiomontan berechnet war, nämlich Nürnberg, bezieht. Denn da diese Stadt 11^0 ö. v. Gr. liegt, ergibt sich gegenüber Venezuela ein Längenunterschied von etwa 82^0 und die Konjunktion, die für Nürnberg auf 12^h nachts beim Übergang vom 23. auf den 24. August berechnet war, hätte nach Ortszeit jenes südamerikanischen Küstenpunktes am 23. August um $6\frac{1}{2}^h$ p. m. beobachtet werden müssen. Man könnte also sagen, der Hauptfehler, welcher der Entfernung Calis—Venezuela $82\frac{1}{2}^0$ statt etwa 65^0 gab, entfalle auf die irrtümliche Übertragung der Mitternachtbeobachtung auf Cadix, während sie für Nürnberg gilt. Hätte letztere in der Tat in Cadix stattgefunden, dann hätte die Erscheinung im westindischen Küstenpunkt aber erst um $12^h - 4^h 20^m = 7^h 40^m$ p. m. beobachtet werden können, nicht um $6\frac{1}{2}^h$, wie Vespucci auf Grund seiner falschen Praemissen angibt. Kurz, auch hier kommt man aus dem Circulus vitiosus nicht heraus.

24. Die Größe des Erdgrades. Vespucci erläutert seinem Gönner Lorenzo jedoch das Ergebnis seiner Längenbestimmung auch noch durch eine Umrechnung der Bogendifferenz in eine Wegestrecke. Eingehend setzt er dabei den Begriff eines Erdgrades und die Größe eines solchen auseinander. Das wäre an sich in einer Zeit, in der über die Größe der Erde noch so schwankende Ansichten herrschten und die verschiedensten aus Altertum und Mittelalter überkommenen Werte für Erdumfang oder Erdgrad nebeneinander benutzt wurden, nicht befremdlich. Vespucci gibt dem Erdgrad $16\frac{2}{3}$ Leghe oder $66\frac{2}{3}$ Miglien und findet daher für $82\frac{1}{2}^0$ die Strecke von $1366\frac{2}{3}$ Leghe, oder $5466\frac{2}{3}$ M.[1]), eine Zahl, die von der durch Kurs und Distanz abgeschätzten, am Eingang des Briefes namhaft gemachten Wege von 1300 leghe (s. oben S. 288) nicht viel verschieden ist, letztere vielmehr in den Augen des Briefadressaten zu bestätigen geeignet war.

---

1) Daß die Zahlen $5366\frac{2}{3}$ und $15466\frac{2}{3}$, welche sich in Bandini's Abdruck des Briefes finden, lediglich auf Druckfehlern beruhen, hat schon Canovai nach Einsicht in das Original des Briefes festgestellt (a. a. O. 340).

Hier liegt nun für den Kenner der Geschichte der mathematischen Geographie jener Tage ein weiterer deutlicher Beweis für die Unechtheit des Briefes vom 18. Juli 1500 vor. Denn die allgemeinere Annahme der Erdgröße zu 24000 Leghe bezw. des Erdgrades zu $16\frac{2}{3}$ durch die Portugiesen datiert aus einer späteren Zeit, als hier in Frage kommt. Sie gehört erst dem zweiten und dritten Jahrzehnt des 16. Jahrhunderts an. Das scheint eine gewagte Behauptung gegenüber der, wie ich meine, nicht mehr zu bezweifelnden Tatsache, daß Paolo Toscanelli in seinem berühmten Brief vom Jahre 1474 an den König von Portugal eben diese auf die Araber zurückzuführende Größe der Erde, $1^0 = 16\frac{2}{3}$ Leg. $= 66\frac{2}{3}$ M., zugrunde legte. Oder auch gegenüber der Tatsache, daß d'Avezac in seiner großen literarischen Fehde mit F. A. de Varnhagen von 1858 in Hinsicht der Anschauungen, welche Spanier und Portugiesen im Entdeckungszeitalter über die Größe des Erdgrades hegten, die Schätzung $1^0 = 16\frac{2}{3}$ Leguas geradezu als *„préconisée par Amerigo Vespucci"* [1]) bezeichnete. Aber, wie ich bereits 1894 ausführlich dargelegt habe [2]), stützt sich d'Avezac dabei ganz auf den Brief vom 18. Juli 1500, ohne zu beachten, daß der Wert $1^0 = 16\frac{2}{3}$ L. gar nicht mit der Angabe des echten Briefes von 1503 übereinstimmt. Dieser ist zwar nicht genau nach dem Tage datiert, gilt aber heute als der erste als echt erkannte Brief; Vespucci beschreibt in ihm seine dritte Reise. Die Breite von Lissabon wird in diesem Briefe zu $39\frac{1}{2}^0$ angenommen, von dort soll der Weg nach Gran Canaria, welche Insel auf $27\frac{1}{2}^0$ Br. gelegen sei, 280 Leguas *„per el vento infra mezodi e libeccio"* betragen. Der Kurs ist also SSW (S $22\frac{1}{2}$ W). Nach der Raxon de martoloio ergeben die 280 Leguas, auf den Meridian reduziert, etwa $280 \times 0{,}92 = 258$ Leghe. Diese Zahl durch den Breitenunterschied von 12^0 ($= 39\frac{1}{2} - 27\frac{1}{2}$) geteilt, führt niemals auf einen Erdgrad von $16\frac{2}{3}$ Leghe, sondern auf $21\frac{1}{2}$ Leg. $= 86$ Millas, worin man unschwer den Eratosthenischen Wert $1^0 = 87\frac{1}{2}$ M. erkennt, dessen sich auch Moses Jaimes Ferrer [3]) 1495 bediente. Die Annahme von $1^0 = 16\frac{2}{3}$ L. muß dem letztern Werte gegenüber als die geläuterte angesehen werden, von dem es sich vermuten läßt, daß Vespucci sich in spätern Jahren ihm noch zugewandt hat. Aber undenkbar ist es, daß er 1503 zu dem zweifelhaften Wert von $1^0 = 86$ L. zurückgegriffen hätte, wenn er schon 1500 sich so entschieden für $1^0 = 16\frac{2}{3}$ L. $= 66\frac{2}{3}$ M. ausgesprochen hätte. Ich möchte nicht näher

1) Bull. Soc. de Géogr. de Paris. IVe Série, Tome XVI, 1858, p. 270.

2) Die Rekonstruktion der Toscanellikarte, a. a. O. S. 259.

3) S. Navarrete, Coleccion de los viages. Madrid 1825, II, 102.

auf diesen Punkt eingehen, bitte aber den Leser dieser Zeilen, meine ausführliche Kritik[1]) über die heillose Verwirrung nachzusehen, welche nicht nur im 15. Jahrhundert bei allen Nationen über die Größe des Erdgrades herrschte, sondern auch bei den neuern Forschern des Zeitalters der Entdeckungen, einem Peschel, S. Ruge, K. Kretschmer, E. Gelcich, G. Uzielli, L. Hugues, d'Albertis etc. festgestellt werden mußte. Ich wiederhole also nur, daß dieser Punkt dazu entschieden beiträgt, den Brief vom 18. Juli 1500 als unecht und viel später kompiliert zu stempeln.

25. Die Unechtheit des Briefes vom 18. Juli 1500. Das Ergebnis dieser Betrachtungen ist also, daß nicht etwa nur ungenaue Beobachtungen und Zeitbestimmungen, wie sie jenem Zeitalter begreiflicherweise noch vielfach anhaften, die vermeintliche Längenbestimmung Vespucci's in ihrem Ergebnis entstellt haben, sondern daß ihr schwere Fehler in den Voraussetzungen innewohnen. Ein Mann wie Vespucci kann daher nicht ihr Urheber gewesen sein. Die gesamte Erzählung scheint von Spätern ohne genügende Sachkenntnis zusammengestellt zu sein, um den Entdecker von neuem ins Licht zu setzen.

Mehrfach ist schon hervorgehoben, daß man lange Jahrzehnte an der Echtheit des Briefes vom 18. Juli 1500 nicht gezweifelt hat. In demselben Jahr 1858, in welchem sich, wie oben angedeutet, d'Avezac noch ganz auf diesen Brief stützte, konnte sich Oskar Peschel noch dahin aussprechen[2]), daß „der einzige echte in Bezug auf die Chronologie mit den übrigen Quellen kongruente, also für die Geschichte allein brauchbare Text über diese Reise (gemeint ist die sog. zweite, am 18. Mai 1499 begonnene Reise) der Brief ist, den Vespucci einen Monat nach seiner Rückkehr (sic) am 18. Juli 1500 von Sevilla aus an Lorenzo di Pierfrancesco di Medici in Paris schrieb und den Bandini 1745 veröffentlichte". Indessen hatte schon im Jahre 1842 der gelehrte Vicomte de Santarem[3]) ernste Bedenken gegen die Echtheit dieses Briefes geäußert. Sie wurden vor allem verstärkt durch F. A. de Varnhagen[4]) (1858), der dann 1865 alle drei nach dem Tode Vespucci's (1512) veröffentlichten Briefe für Fälschungen erklärte[5])

1) Die Rekonstruktion der Toscanellikarte, 1894, 242—268.

2) Gesch. des Zeitalters der Entdeckungen. 1858, 309.

3) Recherches hist., crit. et bibliograph. sur Am. Vespuce et ses voyages. Paris 1842, 211 ff.

4) Bull. Soc. de géogr. de Paris, IVe Série, vol. XV, 1858, 250.

5) Amerigo Vespucci, son caractère, ses écrits (même les moins authentiques) etc. Lima 1865, 67 ff.

und für den uns hier allein interessierenden triftige Gründe anführte. Während später nach der Jubelfeier der Entdeckung Amerikas 1892 der Italiener Luigi Hugues[1]) in seinem Beitrag zur bändereichen Raccolta Colombiana die Frage noch als unentschieden hinstellte, hat J. Berchet[2]), dem im gleichen Werk der Abdruck sämtlicher authentischen historischen Dokumente der Zeitgenossen des Kolumbus und seiner unmittelbaren Nachfolger oblag, sich nicht entschließen können, den Vespuccibrief vom 18. Juli 1500 mit aufzunehmen, weil der Inhalt sowohl den andern Briefen als den geschichtlichen Tatsachen widerspreche. Ohne noch weitere Namen aus der Zahl der Zweifler zu nennen, erinnere ich nur noch an Henry Vignaud, den zähen Vorkämpfer für die Nichtexistenz von Brief und Karte Paolo Toscanellis von 1474 oder irgendwelcher Beziehungen desselben zu Kolumbus, also jedenfalls einen scharfsinnigen Kritiker. Auch er erklärt 1911 den Brief Vespucci's für apokryph[3]).

Nur kurz sollen die wichtigsten der Einwände gegen die Echtheit des Briefes zum Schluß zusammengestellt werden.

1. Das Original des Briefes vom 18. Juli 1500 befindet sich in einem Handschriftenband der Bibliotheca Riccardiana zu Florenz, der einst im Besitz des 1514 daselbst verstorbenen Pier Vaglianti[4]) war. Nach Varnhagen, der im Jahre 1858 dieses Original prüfte, ist das Papier, auf dem der Brief geschrieben, florentinischen Ursprungs und weder die Schrift noch die Signatur unter dem Brief von der Hand Amerigo Vespucci's[5]).

2. Der Brief ist vom 18. Juli 1500 aus Sevilla datiert. Es steht nach eingehenden Untersuchungen jetzt fest, daß die Expedition Hojedas, an der Vespucci teilnahm — es ist dies seine sogenannte zweite Reise —, nicht schon im Juni 1500, wie noch

1) Raccolta Colombiana. Part. V, Vol. 2. 3. 1894, 119.

2) Ebenda III, 2, 1894, 135.

3) Americ Vespuce, ses voyages et ses découvertes devant la critique. Journ. de la Soc. des Américanistes de Paris. Nouv. Sér. VIII, 1911, 23—54.

4) Während Varnhagen Vaglianti als den Brieffälscher hingestellt und ihn ans Ende des 16. oder Anfang des 17. Jahrhunderts verlegt hatte, hat G. Uzielli in seiner Schrift „Toscanelli, Notes e Documents I 1. Band. 1893 (mehr ist von dieser Zeitschrift nicht erschienen) nachgewiesen, daß Pier Vaglianti in Florenz 1514 starb.

5) Daß, wie Vignaud (a. a. O. 17 Anm. 1) behauptet hat, G. Uzielli in seiner Schrift „Toscanelli“ p. 30 (s. vor. Anmerkung) in der Handschrift des Vespuccibriefes diejenige Vaglianti's erkannt habe, ist unrichtig. Die Bemerkung Uzielli's, der übrigens an der Authentizität des Vespuccibriefes festhält, spricht dort von der Schrift ganz anderer Vagliantischer Manuskripte.

Peschel 1858 annahm, sondern erst am 8. September heimkehrte. Alsdann kann Vespucci unmöglich am 18. Juli 1500 einen solchen Brief aus Sevilla abgesandt haben.

3. Der Brief enthält Ansichten über den Zusammenhang des Vespucci'schen Mundus novus mit dem äußersten Asien des Ptolemaeus, welche mit den in den authentischen Briefen niedergelegten unvereinbar sind.

4. Die Annahme der Größe des Erdgrades zu $16\frac{2}{3}$ Leghe beweist, daß der Brief um mindestens ein Jahrzehnt später als 1500 verfaßt sein muß, da Vespucci noch 1503 an der Ansicht festhielt, daß die Erde wesentlich größer sei, der Erdgrad etwa 21—22 Leghe umfasse (vergl. § 24).

26. Das Ergebnis. Ist also der Brief, in welchem Vespucci über eine Längenbestimmung mittels der Methode der Mondabstände berichtet, die er am 23. August 1499 ausgeführt haben soll, unecht, dann zerfällt für alle, die sich dieser Ansicht anschließen, von vornherein die Legende, daß Vespucci der erste gewesen sei, der eine solche versucht oder gar der Entdecker dieser Methode gewesen sei. Das 15. Jahrhundert kennt in Wahrheit noch keine Längenbestimmung nach Mondabständen.

Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper.

Von

E. Hecke in Basel.

Vorgelegt von E. Landau in der Sitzung vom 9. Juni 1917.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) habe ich gezeigt, daß die Dirichlet-Dedekindsche Funktion $\zeta_k(s)$ eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers die Eigenschaft hat: $(s-1)\zeta_k(s)$ ist eine ganze transzendente Funktion und genügt einer gewissen Funktionalgleichung. Im folgenden übertrage ich die dort angewendete Methode auf diejenigen Funktionen, welche in einem beliebigen Zahlkörper den bekannten L-Funktionen entsprechen, wobei für $\Re(s) > 1$

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$$

und χ ein Charakter nach einem ganzzahligen Modul ist.

Die Fortsetzbarkeit der allgemeinen L-Funktionen wird in höchst einfacher Weise, ebenso wie die von $\zeta_k(s)$, durch eine Transformationsformel gewisser Thetafunktionen bewiesen. Durch die bekannten Methoden gewinne ich hieraus den Beweis für die allgemeinste Formulierung des Satzes von Dirichlet über die Primzahlen einer arithmetischen Reihe, nämlich:

Sei $\mathfrak{f}$ ein Ideal eines algebraischen Zahlkörpers, $\mathfrak{r}$ ein beliebiges zu $\mathfrak{f}$ primes Ideal. Dann gibt es in der durch $\mathfrak{r}^{-1}$ bestimmten Idealklasse[2]) unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}$, derart, daß die Zahl

$$\xi = \mathfrak{p}\mathfrak{r}$$

nach dem Modul $\mathfrak{f}$ einer Einheit kongruent ist.

1) Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper. Diese Nachrichten 1917 (Sitzung vom 23. Dez. 1916).

2) Ich führe den Beweis nur für den weiteren Äquivalenzbegriff durch.

Nimmt man $\mathfrak{r}$ gleich einem zu $\mathfrak{f}$ primen Hauptideal, so gibt es also unendlich viele Primzahlen π im Körper, welche der Kongruenz

$$\pi \equiv \varrho \pmod{\mathfrak{f}}$$

genügen.

Für diesen Satz braucht man nur die Fortsetzbarkeit der L, nicht die Funktionalgleichung. Ich gebe in einer anderen Arbeit aber eine Anwendung dieser Funktionalgleichung auf die Teilungskörper der elliptischen Funktionen, und entwickele daher hier auch gleich diese Gleichung, deren Beweis zwar prinzipiell sehr einfach ist, aber eine Reihe formaler Überlegungen erfordert.

§ 1.

Hilfssätze über algebraische Körper[1]).

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper vom Grade n. Die konjugierten Körper und Zahlen unterscheiden wir durch obere Indizes. Wir legen den gewöhnlichen (weiteren) Äquivalenzbegriff zu Grunde, wonach zwei Ideale äquivalent sind, wenn ihr Quotient gleich einer Körperzahl ist. Wir betrachten Kongruenzen nach ganzen und nach gebrochenen Idealen. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei Ideale, so verstehen wir unter dem Ideal $\mathfrak{j} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ die Gesamtheit der Zahlen μ, wofür $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}(\mu)$ ein ganzes Ideal ist, und setzen die rationale Zahl

$$\frac{N(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{b})} = N(\mathfrak{j}).$$

Jedes Ideal $\mathfrak{j}$ hat eine Basis. Das Quadrat der Determinante, die aus den Basiszahlen und ihren Konjugierten gebildet ist, hat den Betrag $d \, . \, N^2(\mathfrak{j})$, wenn d der absolute Betrag der Körperdiskriminante ist. Die Kongruenz

$$\mu_1 \equiv \mu_2 \pmod{\mathfrak{j}}$$

soll besagen, daß $\mu_1 - \mu_2$ eine Zahl aus $\mathfrak{j}$ ist. Von grundlegender Bedeutung ist der folgende Satz[2]):

---

1) Vgl. zu diesem Paragraphen die oben zitierte Arbeit, wo sich noch nähere Angaben finden.

2) Herr Landau hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß dieser zuerst von *Landsberg* (Math. Ann. Bd. 50) ausgesprochene, aber dort recht kompliziert begründete Satz sich fast unmittelbar aus der Theorie von *Dedekind* ergibt und deshalb richtig als Dedekindscher Satz zu bezeichnen ist. (Über die Diskriminanten endlicher Körper, Abh. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Bd. 29 [1882]).

Es sei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die Basis eines beliebigen Ideals $\mathfrak{a}$. Betrachten wir die zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \ldots & \alpha_n^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \ldots & \alpha_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{(n)} & & \ldots & \alpha_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

reziproke Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1^{(1)} & \mathrm{A}_1^{(2)} & \ldots & \mathrm{A}_1^{(n)} \\ \mathrm{A}_2^{(1)} & \mathrm{A}_2^{(2)} & \ldots & \mathrm{A}_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{A}_n^{(1)} & \mathrm{A}_n^{(2)} & \ldots & \mathrm{A}_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

so sind die Zahlen

$$\mathrm{A}_1^{(1)}, \ \mathrm{A}_2^{(1)}, \ \ldots \ \mathrm{A}_n^{(1)}$$

der ersten Spalte die Basiszahlen des Ideals $\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}$, wobei $\mathfrak{d}$ die Differente des Körpers $k = k^{(1)}$ bedeutet.

Hieraus folgt: Ist η eine ganze oder gebrochene Zahl aus k, deren Nenner in der Differente $\mathfrak{d}$ aufgeht, so ist die Spur von η eine ganze Zahl.

Setzen wir nämlich:

$$\xi^{(p)} = \sum_{r=1}^{n} m_r \alpha_r^{(p)}, \qquad p = 1, \ldots n,$$

so wird wegen

$$\sum_{p=1}^{n} \mathrm{A}_q^{(p)} \alpha_r^{(p)} = \delta_{qr}$$

$$\sum_{p=1}^{n} \mathrm{A}_q^{(p)} \xi^{(p)} = m_q, \qquad q = 1, \ldots n.$$

Nehmen wir nun das Ideal $\mathfrak{a} = 1$, so durchläuft $\xi = \xi^{(1)}$ alle ganzen Zahlen aus k, wenn die m_r alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen. Die letzte Gleichung sagt also dann aus, daß die Spur jeder Zahl des Ideals $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ eine ganze Zahl ist.

Die Spur einer Zahl ω bezeichnen wir mit

$$S(\omega) = \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \cdots \omega^{(n)}.$$

Wir führen jetzt die bekannte Klasseneinteilung aller Ideale nach einem Modul $\mathfrak{f}$ ein, der ein g a n z e s Ideal sein soll. Zwei

zu $\mathfrak{f}$ prime ganze Ideale $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ heißen äquivalent mod. $\mathfrak{f}$, wenn es ein ganzes zu $\mathfrak{f}$ primes Ideal $\mathfrak{a}$ gibt, derart, daß

$$\mathfrak{a}\mathfrak{m}_1 = (\alpha_1), \quad \mathfrak{a}\mathfrak{m}_2 = (\alpha_2)$$

Hauptideale werden und

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod{\mathfrak{f}}.$$

Die Gesamtheit aller zu einem bestimmten Ideal mod. $\mathfrak{f}$ äquivalenten Ideale bilden eine „Klasse mod. $\mathfrak{f}$“. (Unter „Klasse“ schlechthin verstehen wir auch weiterhin nur die Idealklassen im alten Sinn). Jedes ganze Ideal, welches zu $\mathfrak{f}$ prim ist, gehört genau einer Klasse mod. $\mathfrak{f}$ an.

Die Gesamtheit der Klassen mod. $\mathfrak{f}$ läßt sich offenbar bei der Zusammensetzung durch gewöhnliche Multiplikation als eine Abelsche Gruppe auffassen. Die Hauptklasse oder Einheitsklasse mod. $\mathfrak{f}$ besteht aus denjenigen Hauptidealen (α), wo

$$\alpha \equiv \text{Einheit} \pmod{\mathfrak{f}}$$

ist. Der Grad der Gruppe ist

$$h(\mathfrak{f}) = \frac{1}{w(\mathfrak{f})} h \cdot \varphi(\mathfrak{f}).$$

Hierin ist h die Klassenzahl von k, $w(\mathfrak{f})$ ist die Anzahl der Einheiten in k, welche inkongruent mod. $\mathfrak{f}$ sind, und $\varphi(\mathfrak{f})$ ist die Anzahl der inkongruenten Restklassen mod. $\mathfrak{f}$, die zu $\mathfrak{f}$ prim sind.

Äquivalenz mod. $\mathfrak{f}$ bezeichnen wir durch $\sim \pmod{\mathfrak{f}}$.

Auf gebrochene Ideale, deren Zähler und Nenner zu $\mathfrak{f}$ prim ist, überträgt man den Äquivalenzbegriff so:

$$\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1} \sim \frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{b}_2} \pmod{\mathfrak{f}},$$

wenn

$$\mathfrak{b}_2 \mathfrak{a}_1 \sim \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2 \pmod{\mathfrak{f}}.$$

Es seien jetzt $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots w(\mathfrak{f})$ inkongruente Einheiten mod. $\mathfrak{f}$. Ferner $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$ ein vollständiges System mod. $\mathfrak{f}$ nicht äquivalenter ganzer Ideale, welche in einer festen Klasse liegen. Es gibt dann also ein Ideal $\mathfrak{a}$, sodaß

$$\mathfrak{a}\mathfrak{m}_1 = \mu_1, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{m}_2 = \mu_2 \ldots$$

Zahlen aus k sind. Ihre Anzahl ist $\frac{\varphi(\mathfrak{f})}{w(\mathfrak{f})}$. Wir bilden jetzt die $\varphi(\mathfrak{f})$ Zahlen, welche entstehen, wenn man die μ mit den $w(\mathfrak{f})$ Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ multipliziert. Derartige $\varphi(\mathfrak{f})$ Zahlen nennen wir

ein *vollständiges Restsystem von Zahlen mod.* $\mathfrak{f}$, *das durch* $\mathfrak{a}$ *teilbar ist* und bezeichnen es zur Abkürzung mit

$$R(\mathfrak{a};\ \text{mod. } \mathfrak{f}).$$

Hierbei darf $\mathfrak{a}$ ganz oder gebrochen sein, auch mit $\mathfrak{f}$ gemeinsame Teiler besitzen. R hat also folgende Eigenschaften:

Es besteht aus $\varphi(\mathfrak{f})$ durch $\mathfrak{a}$ teilbaren Zahlen, die sich so anordnen lassen:

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_1\mu_1, & \varepsilon_1\mu_2 & \ldots \\ \varepsilon_2\mu_1, & \varepsilon_2\mu_2 & \ldots \\ \varepsilon_3\mu_1, & \varepsilon_3\mu_2 & \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \varepsilon_{w(\mathfrak{f})}\mu_1 & \ldots & \end{array}$$

und jedes zu $\mathfrak{f}$ prime Ideal aus der Idealklasse $\mathfrak{a}^{-1}$ ist mit einem Ideal $\mu\,\mathfrak{a}^{-1}$ äquivalent mod. $\mathfrak{f}$.

§ 2.

Charaktere mod. $\mathfrak{f}$.

Nunmehr sei χ ein Charakter der durch $\mathfrak{f}$ bestimmten Abelschen Gruppe. Jedem zu $\mathfrak{f}$ primen Ideal $\mathfrak{j}$ ist dann eine Einheitswurzel $\chi(\mathfrak{j})$ zugeordnet, die denselben Wert hat für alle Ideale, die mit $\mathfrak{j}$ mod. $\mathfrak{f}$ äquivalent sind. Falls $\mathfrak{j}$ nicht prim zu $\mathfrak{f}$ ist, definieren wir noch $\chi(\mathfrak{j}) = 0$ und stets $\chi(o) = 0$.

Weiterhin sei $\mathfrak{f} \neq 1$. Unter $\mathfrak{c}$ verstehen wir ein festes ganzes Ideal derart, daß

$$\mathfrak{c}\mathfrak{f} = \omega$$

eine Zahl ist; $\mathfrak{a}$ sei ein beliebiges Ideal und

$$\lambda = \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}$$

eine Zahl, $\mathfrak{l}$ ein ganzes Ideal. Dann betrachten wir folgende Summe:

$$F(\lambda) = \sum_{\mu} \chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\right) e^{2\pi i S\left(\frac{\mu\lambda}{\omega}\right)} \qquad (\mu \sim R(\mathfrak{a}\mathfrak{c};\ \text{mod. } \mathfrak{f})).$$

Wie in der Klammer angedeutet, soll μ ein $R(\mathfrak{a}\mathfrak{c};$ mod. $\mathfrak{f})$ durchlaufen. Diese Zahl $F(\lambda)$ entspricht den Wurzelzahlen aus der Theorie der Kreiskörper.

Zunächst hängt $F(\lambda)$ nicht von den individuellen Repräsentanten μ ab, sondern ist für alle Systeme $R(\mathfrak{a}\mathfrak{c};\ \text{mod. } \mathfrak{f})$ dasselbe. Setzt man nämlich erstens in dem Exponenten $\eta\mu$ an Stelle von μ, wo η eine beliebige Einheit ist, so wird für jede der $w(\mathfrak{f})$-Einheiten ε_i

$$\eta\,\varepsilon_i \equiv \varepsilon_{i'} \quad (\text{mod. } \mathfrak{f})$$

und

$$S\left(\frac{\eta\,\varepsilon_i\,\mu\,\lambda}{\omega}\right) = S\left(\frac{\varepsilon_i\,\mu\,\lambda}{\omega}\right) + S\left((\eta\,\varepsilon_i - \varepsilon_{i'})\,\frac{\mu\,\lambda}{\omega}\right).$$

Die zweite Zahl rechts ist aber offenbar eine Zahl des Ideals $\frac{1}{\mathfrak{d}}$, deren Spur wegen des Dedekindschen Satzes eine ganze rationale Zahl ist, und diese kommt bei der Exponentialfunktion nicht in Betracht. Wird nun über die Einheiten ε_i summiert, so durchläuft $\varepsilon_{i'}$ genau dieselben Einheiten, und es kommen also wieder in Σ genau dieselben Glieder vor.

Ersetzen wir zweitens in $\mu = \mathfrak{m}\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ $\mathfrak{m}$ durch ein mod. $\mathfrak{f}$ äquivalentes ganzes Ideal $\mathfrak{n}$, so können wir setzen:

$$\nu = \mathfrak{n}\mathfrak{a}\mathfrak{c}$$

und

$$\mu \equiv \nu \ (\text{mod. } \mathfrak{f}\mathfrak{a}\mathfrak{c})$$

und aus demselben Grunde wie oben ändert sich nichts.

Ferner hängt $F(\lambda)$ offenbar nicht von λ selbst, sondern nur von dem *Ideal* $\mathfrak{l}$ ab, da die Ersetzung von μ durch $\mu\eta$, die ja nichts ändert, auf dasselbe herauskommt, als wenn man λ durch $\eta\lambda$ ersetzt. Endlich hängt $F(\lambda)$ nur ab von der Klasse, welcher $\mathfrak{l}$ mod. $\mathfrak{f}$ angehört in folgendem Sinne: Wenn ein zu $\mathfrak{f}$ primes Ideal $\mathfrak{q}$ existiert, sodaß

$$\mathfrak{q}\mathfrak{l}_1 = \gamma_1 \quad \mathfrak{q}\mathfrak{l}_2 = \gamma_2$$

und

$$\gamma_1 \equiv \gamma_2 \quad (\text{mod. } \mathfrak{f}),$$

(also, wenn die Ideale zu $\mathfrak{f}$ prim sind, $\mathfrak{l}_1 \sim \mathfrak{l}_2$ (mod. $\mathfrak{f}$)), so ist offenbar

$$F(\lambda_1) = F(\lambda_2),$$

wieder auf Grund des Dedekindschen Satzes.

Um diese Eigenschaften in der Bezeichnung auch zum Ausdruck zu bringen, können wir die Ideale $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ selbst einführen, und ordnen jedem ganzen Ideal $\mathfrak{l}$ folgende Größe zu:

$$F(\lambda) = G(\mathfrak{l}) = \sum_{\mathfrak{m},\ \varepsilon_i} \chi(\mathfrak{m})\, e^{2\pi i S\left(\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{l}}{\mathfrak{f}\mathfrak{d}}\right)}$$

und darin ist die Summation also über irgend $\frac{\varphi(\mathfrak{f})}{w(\mathfrak{f})}$ verschiedene ganzen Ideale $\mathfrak{m}$ zu erstrecken, die in der Idealklasse $\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{d}}{\mathfrak{l}}$ liegen und mod. $\mathfrak{f}$ nicht äquivalent sind, und sodann noch über die Einheiten ε_i.

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

1) $\mathfrak{l}$ sei prim zu $\mathfrak{f}$.

Dann sei $\mathfrak{l}_1$ ein ganzes Ideal, wofür $\mathfrak{l}_1\mathfrak{l} \sim 1$ (mod. $\mathfrak{f}$). Setzen wir jetzt $\mathfrak{n}\mathfrak{l}_1$ an Stelle von $\mathfrak{m}$, so müssen wir $\mathfrak{n}$ die mod. $\mathfrak{f}$ nichtäquivalenten Ideale aus der Klasse $\mathfrak{f}\mathfrak{d}$ durchlaufen lassen, und es ergibt sich:

$$G(\mathfrak{l}) = \chi(\mathfrak{l}_1) \sum_{\mathfrak{n},\, \varepsilon_i} \chi(\mathfrak{n}) e^{2\pi i S\left(\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{f}\mathfrak{d}}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\right)}.$$

Wegen $\mathfrak{l}_1\mathfrak{l} \sim 1$ (mod. $\mathfrak{f}$) ist aber wieder die Summe von $\mathfrak{l}$ ganz unabhängig und wir haben

$$\sum_{\mathfrak{n},\, \varepsilon_i} \chi(\mathfrak{n}) e^{2\pi i S\left(\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{f}\mathfrak{d}}\right)} = \sum_{\nu} \chi(\nu \cdot \mathfrak{f}\mathfrak{d}) e^{2\pi i S(\nu)} = C(\chi),$$

worin nun ν ein $R\left(\frac{1}{\mathfrak{f}\mathfrak{d}};\ \text{mod. } \mathfrak{f}\right)$ durchläuft. Diese Zahl hängt außer von $\mathfrak{f}$ nur von dem Charakter χ ab, dagegen nicht von $\mathfrak{l}$. Verstehen wir unter $\bar{\chi}$ den zu χ reziproken, d. h. den konjugiert-imaginären Wert von χ, so ist offenbar

(1) $$C(\chi) \text{ konjugiert imaginär zu } C(\bar{\chi}).$$

Wir haben also den Satz:

Ist $\mathfrak{l}$ prim zu $\mathfrak{f}$, so ist

(2) $$F\left(\frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\right) = G(\mathfrak{l}) = \bar{\chi}(\mathfrak{l}) \cdot C(\chi).$$

2) Ist aber $\mathfrak{l}$ nicht prim zu $\mathfrak{f}$, so wollen wir über den Charakter χ eine Voraussetzung machen. Wir unterscheiden in bekannter Weise zwischen eigentlichen und uneigentlichen Charakteren mod. $\mathfrak{f}$. Ist nämlich $\mathfrak{f}_1$ ein echter Teiler von $\mathfrak{f}$ und hat der Charakter $\chi(\mathfrak{j})$ für alle (zu $\mathfrak{f}$ primen) Ideale, welche mod. $\mathfrak{f}_1$ äquivalent sind, den gleichen Wert, so können wir χ als Charakter mod. $\mathfrak{f}_1$ betrachten. In diesem Fall nennen wir χ einen uneigentlichen Charakter mod. $\mathfrak{f}$.

Im andern Falle, wo also χ kein Charakter nach einem echten

Teiler von $\mathfrak{f}$ ist, heißt χ ein eigentlicher Charakter mod. $\mathfrak{f}$. $\mathfrak{f}$ ist bei dieser Unterscheidung immer von 1 verschieden angenommen. Wir zeigen nun:

Wenn χ ein eigentlicher Charakter mod. $\mathfrak{f}$ ist, so ist $G(\mathfrak{l}) = 0$, sobald $\mathfrak{l}$ zu $\mathfrak{f}$ nicht prim ist. D. h. die Formel (2) gilt auch, wenn $\mathfrak{l}$ mit $\mathfrak{f}$ einen Teiler gemein hat, denn dann ist ja $\bar{\chi}(\mathfrak{l}) = 0$.

Der Beweis ist wie im rationalen Körper zu führen: Sei $\mathfrak{f}_1 = (\mathfrak{f}, \mathfrak{l})$. Nach Voraussetzung gibt es mindestens eine ganze Zahl ϱ, sodaß:

$$\varrho \equiv \text{Einheit} \left(\text{mod. } \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_1}\right), \quad \varrho \not\equiv \text{Einheit} \ (\text{mod. } \mathfrak{f}), \quad \chi(\varrho) \neq 1.$$

Dann ist

$$G(\mathfrak{l}) = \sum_{\mu} \chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\right) e^{2\pi i S\left(\frac{\mu\lambda}{\omega}\right)} = \sum_{\mu} \chi\left(\frac{\mu\varrho}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\right) e^{2\pi i S\left(\frac{\mu\varrho\lambda}{\omega}\right)}$$
$$= \chi(\varrho)\, G(\varrho\mathfrak{l}).$$

Andrerseits aber ist $G(\varrho\mathfrak{l}) = G(\mathfrak{l})$, weil $\varrho\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}$ durch Multiplikation mit einem zu $\mathfrak{f}$ primen Ideal in zwei Zahlen übergehen, die mod. $\mathfrak{f}$ kongruent sind. Also muß wegen $\chi(\varrho) \neq 1$ $G(\mathfrak{l}) = 0$ sein.

Die Formel (2) *gilt also für jeden eigentlichen Charakter und jedes ganze Ideal* $\mathfrak{l}$.

Die Ausdrucksweise hätte sich bei diesen Fragen etwas vereinfachen lassen, wenn wir $\mathfrak{a}$ als ganzes, zu $\mathfrak{f}$ primes Ideal hätten annehmen können. Für die folgenden Anwendungen, wo $\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{d}$ auch gemeinsame Faktoren haben kann, wären diese Annahmen aber zu eng gewesen.

§ 3.

Eine Thetaformel.

Um die Thetaformel, auf welcher die Fortsetzbarkeit der L-Funktionen beruht, herleiten zu können, denken wir uns die konjugierten Körper $k^{(1)}, \ldots$ in eine bestimmte Reihenfolge gebracht. Es seien r_1 reelle und $2r_2$ imaginäre unter den n konjugierten Körpern k vorhanden; die reellen seien:

$$k^{(1)}, \quad k^{(2)}, \quad \ldots \quad k^{r_1}:$$

sodann seien

$$k^{(r_1+1)}, \quad k^{(r_1+2)}, \quad \ldots \quad k^{(r_1+r_2)}$$

imaginär und keine zwei der erzeugenden konjugierten Zahlen seien hierbei konjugiert imaginär, vielmehr sei immer

$$k^{(r_1+m)} \text{ konjugiert imaginär mit } k^{(r_1+r_2+m)} \text{ für } m=1, 2, \ldots r_2.$$

Der gegebene Körper k ist also einer der $k^{(p)}$ und die auf ihn bezüglichen Größen sollen weiterhin sowohl mit als auch ohne oberen Index bezeichnet werden. Wir ordnen ferner jedem Körper $k^{(p)}$ eine positive reelle Variable t_p zu mit der Maßgabe, daß

$$t_{r_1+m} = t_{r_1+r_2+m} \quad (m = 1, 2, \ldots r_2), \tag{3}$$

also konjugiert imaginäre Körper gleiche Variabelnwerte t erhalten. Es sind also unter ihnen $r+1 = r_1+r_2$ unabhängige Variable vorhanden.

Unter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ verstehen wir die Basis eines Ideals $\mathfrak{a}$ im Körper k und bilden mit den Zahlen aus $\mathfrak{a}$

$$\mu = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots m_n\alpha_n$$

die positiv definite quadratische Form:

$$\sum_{p=1}^{n} |\mu^{(p)}|^2 t_p$$

der Größen $m_1, m_2, \ldots m_n$. Mit dieser quadratischen Form als Exponent läßt sich eine n-fach unendliche Thetareihe bilden; unser Ziel ist die Herleitung einer Transformationsformel, welche man durch Spezialisierung auch aus der allgemeinen Transformationstheorie erhalten kann.

Ich setze der Vollständigkeit halber den Beweis hier noch auseinander. Die reelle Funktion der reellen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$

$$f(x) = \sum_{\mu=0(\mathfrak{a})} \exp\left\{-\pi \sum_{p=1}^{n} |\mu^{(p)} + u^{(p)}|^2 t_p\right\}, \tag{4}$$

wobei zur Abkürzung steht:

$$\exp x = e^x \quad \text{und} \quad u^{(p)} = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q^{(p)} x_q,$$

ist offenbar nebst allen Ableitungen periodisch und läßt sich daher in eine Fouriersche Reihe

$$f = \sum_{m_1, \ldots m_n} g(m_1, m_2, \ldots m_n)\, e^{2\pi i \sum_{q=1}^{n} m_q x_q} \tag{4a}$$

entwickeln. Dabei ist dann

$$g(m_1, \ldots m_n) = g((m)) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int \exp\left\{-\pi \sum_{p=1}^{n} |\mu^{(p)}|^2 t_p - 2\pi i \sum_{q=1}^{n} m_q x_q\right\} dx_1 \ldots dx_n.$$

Sei jetzt $\sum_{p,q=1}^{n} b_{pq} x_p x_q$ eine positiv definite quadratische Form, B ihre Matrix. Um

$$\int_{-\infty} \cdots \int \exp\left\{-\pi \sum_{p,q} b_{pq} x_p x_q - 2\pi i \sum_{q} m_q x_q\right\} dx_1 \ldots dx_n = J$$

zu berechnen, transformiere man die Form auf eine Quadratsumme, indem man setzt:

$$x_q = \sum_{r=1}^{n} l_{qr} y_r \qquad q = 1, \ldots n.$$

Ist L die Matrix dieser Transformation, so ist also:

$$L' B L = 1$$

und der Integrand lautet, wenn $|L|$ der Betrag der Determinante von L ist,

$$|L| \exp\left\{-\pi \sum_{p} y_p^2 - 2\pi i \sum_{q,r} m_q y_r l_{qr}\right\} =$$

$$|L| \exp\left\{-\pi \sum_{p} (y_p + i \sum_{q} m_q l_{qp})^2 - \pi \sum_{p} (\sum_{q} m_q l_{qp})^2\right\}.$$

Damit wird

$$J = |L| \exp\left\{-\pi \sum_{p} (\sum_{q} m_q l_{qp})^2\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int \exp\left\{-\pi \sum_{p} (y_p + i \sum_{q} m_q l_{qp})^2\right\} dy_1 \ldots dy_n$$

$$= |L| \exp\left\{-\pi \sum_{p} (\sum_{q} m_q l_{qp})^2\right\}.$$

Nun ist $|L| = (\sqrt{|B|})^{-1}$; die quadratische Form in den m_q, die hier auftritt, hat die Matrix $L L'$; wegen

$$L' B L = 1 \quad \text{ist} \quad B = L'^{-1} L^{-1}, \quad L L' = B^{-1}.$$

Die quadratische Form im Exponenten von J ist also die zur ursprünglichen Form B reziproke Form.

In dem gesuchten Integral $g((m))$ handelt es sich um die quadratische Form

$$\sum_{p} |\mu^{(p)}|^2 t_p = \sum_{p,q,r} x_r x_q \alpha_r^{(p)} \bar{\alpha}_q^{(p)} t_p.$$

(Der Querstrich bedeutet die konjugiert imaginäre Größe). Wir wollen mit T die Matrix bezeichnen, die in der Hauptdiagonale die Elemente $t_1, t_2, \dots t_n$, sonst lauter Nullen hat. Der Koeffizient b_{rq} unserer Form hat den Wert:

$$b_{rq} = \tfrac{1}{2}(\sum_p t_p \alpha_r^{(p)} \bar{\alpha}_q^{(p)} + t_p \bar{\alpha}_r^{(p)} \alpha_q^{(p)}) = \sum_p t_p \alpha_r^{(p)} \bar{\alpha}_q^{(p)}.$$

Daher läßt sich die Matrix B unter Benutzung von:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \dots & \alpha_n^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{(n)} & \dots & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

so schreiben:

$$B = A' T \bar{A} = \bar{A}' T A.$$

Folglich ist

$$B^{-1} = A^{-1} T^{-1} \bar{A}'^{-1}.$$

D. h. man erhält die Form B^{-1} aus B, indem man statt der t_p die reziproken Werte und an Stelle des Ideals $\mathfrak{a}$ das zur Matrix A'^{-1} gehörige Ideal setzt, welches nach den zitierten Sätzen gleich $\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}$ ist.

Endlich ist $|B| = d N^2(\mathfrak{a}) \cdot t_1 t_2 \dots t_n$. Damit wird

$$(5) \qquad g((m)) = \frac{1}{\sqrt{d N^2(\mathfrak{a}) t_1 \dots t_n}} \exp\left\{-\pi \sum_{p=1}^{n} \left| \sum_{q=1}^{n} \mathrm{A}_q^{(p)} m_q \right|^2 \frac{1}{t_p}\right\}$$

und wegen $x_q = \sum_{p=1}^{n} \mathrm{A}_q^{(p)} u^{(p)}$ wird

$$(5\,\mathrm{a}) \qquad \sum_{q=1}^{n} m_q x_q = \sum_{p=1}^{n} u^{(p)} \left(\sum_{q=1}^{n} m_q \mathrm{A}_q^{(p)} \right).$$

Die sich aus (4), (5), (5a) ergebende Formel wollen wir nun gleich in etwas veränderter Schreibweise angeben, indem wir die Bezeichnungen der vorigen Paragraphen wieder aufnehmen.

Es sei $\mathfrak{f}$ ein ganzes Ideal, $\mathfrak{c}$ ein festes Ideal der Klasse $\mathfrak{f}^{-1}$, also:

$$\mathfrak{c}\mathfrak{f} = \omega$$

eine Zahl. Nun setzen wir in den eben gefundenen Formeln erst

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{f} \text{ an Stelle von } \mathfrak{a}$$

und dann:

$$\frac{t_p}{|\omega^{(p)}|}\frac{1}{\sqrt[n]{d\,N(\mathfrak{a}^2\mathfrak{c})}} \text{ an Stelle von } t_p.$$

Dabei bleibt die Bedingung (3) bestehen. Endlich soll

ϱ eine Zahl aus $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ sein, $= \mathfrak{r}\mathfrak{a}\mathfrak{c}$

also $\mathfrak{r}$ ein ganzes Ideal, und

$$u^{(p)} = \varrho^{(p)}.$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$c = c(\mathfrak{a}) = \frac{\pi}{\sqrt[n]{d\,N(\mathfrak{a}^2\mathfrak{c})}}.$$

Dann wird unser Ausdruck (4)

$$(6) \qquad \Theta = \sum_{\mu \equiv 0(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{f})} \exp\left\{-c\sum_{p=1}^{n}\frac{|\mu^{(p)}+\varrho^{(p)}|^2}{|\omega^{(p)}|}t_p\right\}$$

und wir erhalten folgende Transformationsformel:

$$(7) \qquad \Theta = \frac{1}{\sqrt{N(\mathfrak{f})t_1\ldots t_n}} \sum_{\lambda \equiv 0\left(\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\right)} \exp\left\{-c'\sum_{p=1}^{n}\frac{|\lambda^{(p)}|^2}{|\omega^{(p)}|}\frac{1}{t_p} + 2\pi i S\left(\frac{\lambda\varrho}{\omega}\right)\right\}$$

mit

$$c' = c\left(\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{c}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt[n]{d\,N(\mathfrak{a}^{-2}\mathfrak{d}^{-2}\mathfrak{c}^{-1})}}.$$

Die Summation ist in allen Fällen über sämtliche Zahlen der betreffenden Ideale incl. 0 zu erstrecken.

Lassen wir in (7) ϱ ein $R(\mathfrak{a}\mathfrak{c};\ \text{mod. } \mathfrak{f})$ durchlaufen, so durchlaufen $\mu + \varrho$ offenbar alle Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, welche nach Division mit $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ zu $\mathfrak{f}$ prim sind.

Nun sei $\mathfrak{f} \neq 1$ und χ ein eigentlicher Charakter mod. $\mathfrak{f}$. Wir multiplizieren (7) mit $\chi(\mathfrak{r}) = \chi\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\right)$ und summieren über ein System $R(\mathfrak{a}\mathfrak{c};\ \text{mod. } \mathfrak{f})$ für ϱ. Diese Summe nennen wir

$$(8) \qquad \vartheta(t;\chi,\mathfrak{a}) = \sum_{\varrho}\chi\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\right)\Theta = \sum_{\mu \equiv 0(\mathfrak{a}\mathfrak{c})}\chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\right)\exp\left\{-c\sum_{p=1}^{n}\frac{|\mu^{(p)}|^2}{|\omega^{(p)}|}t_p\right\}.$$

Ihre Abhängigkeit von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}$, die im folgenden fest bleiben, bringen wir in der Bezeichnung garnicht erst zum Ausdruck. c ist dabei die oben angegebene nur von $\mathfrak{a}$ abhängige, von t, χ unabhängige Größe. Mit dieser Bezeichnung ergibt sich dann aus (7) die fundamentale Transformationsformel:

(9) $$\vartheta(t;\, \chi, \mathfrak{a}) = \frac{C(\chi)}{\sqrt{N(\mathfrak{f})\, t_1 t_2 \ldots t_n}}\, \vartheta\left(\frac{1}{t};\, \bar{\chi},\, \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\right).$$

Dabei haben wir die im vorigen Paragraphen untersuchten Summen und die für alle eigentlichen Charaktere χ mod. $\mathfrak{f}$ gültige Formel (2) benutzt. Setzen wir noch die von $\mathfrak{a}$ unabhängige Größe

$$W(\chi) = \frac{C(\chi)}{\sqrt{N(\mathfrak{f})}},$$

so wird

(10) $$\vartheta(t;\, \chi, \mathfrak{a}) = W(\chi) \frac{1}{\sqrt{t_1 \ldots t_n}}\, \vartheta\left(\frac{1}{t};\, \bar{\chi},\, \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\right),$$

woraus mit Benutzung von (1) noch folgt, daß

(11) $$|W(\chi)| = |W(\bar{\chi})| = 1.$$

Die Gleichung (10) gilt, um es noch einmal zu sagen, für jeden eigentlichen Charakter mod. $\mathfrak{f}$ und jedes ganze oder gebrochene Ideal $\mathfrak{a}$.

Ist dagegen $\mathfrak{f} = 1$, so definieren wir

(8a) $$\vartheta(t;\, \mathfrak{a}) = \sum_{\mu \equiv 0\,(\mathfrak{a})} \exp\left\{-c \sum_{p=1}^{n} |\mu^{(p)}|^2 t_p\right\}$$

und erhalten aus (6) und (7) für $\omega = 1$, $\varrho = 0$ die Transformationsformel

(10a) $$\vartheta(t;\, \mathfrak{a}) = \frac{1}{\sqrt{t_1 t_2 \ldots t_n}}\, \vartheta\left(\frac{1}{t};\, \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\right).$$

§ 4.

Die L-Funktionen und ihre Funktionalgleichung.

Es sei jetzt s eine komplexe Variable, deren reeller Teil $\sigma > 1$ ist. Für einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Charakter mod. $\mathfrak{f}$ ist dann

(12) $$L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{r}} \frac{\chi(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s},$$

summiert über alle ganzen Ideale $\mathfrak{r}$ des Körpers k, eine analytische Funktion von s, welche auch die Produktdarstellung

(13) $$L(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \chi(\mathfrak{p})\, N(\mathfrak{p})^{-s}}$$

zuläßt, worin $\mathfrak{p}$ alle Primideale des Körpers durchläuft. Ist χ kein eigentlicher Charakter mod. $\mathfrak{f}$, so ist er ein solcher mod. $\mathfrak{f}_1$,

wo $\mathfrak{f}_1$ ein Teiler von $\mathfrak{f}$ ist. D. h. es gibt einen eigentlichen Charakter χ_1 *mod.* $\mathfrak{f}_1$, derart, daß für alle zu $\mathfrak{f}$ primen Ideale $\mathfrak{a}$

$$\chi_1(\mathfrak{a}) = \chi(\mathfrak{a})$$

ist, und diese Gleichung ist auch richtig, wenn $\mathfrak{a}$ ein Ideal $\neq 1$ ist, das gemeinsamer Teiler von $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_1$ ist, da χ_1 und χ dann Null sind. Es unterscheiden sich in der Produktdarstellung $L(s, \chi)$ und $L(s, \chi_1)$ nur um die Faktoren, welche von den Primidealen $\mathfrak{q}$ herrühren, welche in $\mathfrak{f}$, aber nicht in $\mathfrak{f}_1$ aufgehen und zwar wird

$$L(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{q} | \mathfrak{f}} (1 - \chi_1(\mathfrak{q}) N(\mathfrak{q})^{-s})\, L(s, \chi_1). \tag{14}$$

Das Produkt ist über die endlich vielen Primideale $\mathfrak{q}$ zu erstrecken, die in $\mathfrak{f}$ aufgehen.

Es genügt also, die analytische Natur der Funktionen L nur für eigentliche Charaktere χ nach einem Modul $\mathfrak{f}$ zu untersuchen.

Von jetzt ab sei daher in diesem Paragraphen

χ ein eigentlicher Charakter mod. $\mathfrak{f}$, wenn $\mathfrak{f} \neq 1$.

Die Summe $L(s, \chi)$ zerfällt nun in Partialsummen über die Ideale $\mathfrak{r}$ der einzelnen Idealklassen. Wir setzen für $\mathfrak{f} \neq 1$, wenn wieder $\mathfrak{c}\mathfrak{f} = \omega$,

$$\zeta(s;\, \chi, \mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{r}\mathfrak{a}\mathfrak{c} \sim 1} \frac{\chi(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s} = N(\mathfrak{a}\mathfrak{c})^s \sum_{\substack{\mu \equiv 0 (\mathfrak{a}\mathfrak{c}) \\ (\mu)}} \frac{\chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\right)}{N(\mu)^s}. \tag{15}$$

Das ist die Summe, welche der Idealklasse

$$\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}$$

entspricht; $\mathfrak{a}$ ist ein ganzes oder gebrochenes Hilfsideal und die letzte Summe ist über die verschiedenen nicht assoziierten Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ excl. 0 zu erstrecken. ζ hängt nicht von $\mathfrak{a}$ selbst, sondern nur von der Klasse von $\mathfrak{a}$ ab. Entsprechend für $\mathfrak{f} = 1$

$$\zeta(s;\, \mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{r}\mathfrak{a} \sim 1} \frac{1}{N(\mathfrak{r})^s}. \tag{15a}$$

Nun setzen wir für reelle Körper $k^{(p)}$

$$\frac{c^{-\frac{s}{2}} |\omega^{(p)}|^{\frac{s}{2}}}{|\mu^{(p)}|^s} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^\infty \exp\left\{-c \frac{|\mu^{(p)}|^2}{|\omega^{(p)}|} t_p\right\} t^{\frac{s}{2}-1}\, dt_p \qquad p = 1, 2 \ldots r_1;$$

für imaginäre Körper $k^{(p)}$:

$$\frac{2^{-s} c^{-s} |\omega^{(p)}|^s}{(\mu^{(p)} \overline{\mu}^{(p)})^s} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \exp\left\{-2c \frac{|\mu^{(p)}|^2}{|\omega^{(p)}|} t_p\right\} t_p^{s-1} \, dt_p \qquad p = r_1 + 1, \ldots r_1 + r_2 = r + 1$$

und indem wir das Produkt dieser $r+1$-Größen bilden:

(16)
$$\frac{N(\omega)^{\frac{s}{2}} c^{-\frac{ns}{2}} 2^{-r_2 s}}{|N(\mu)|_s} =$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_1}} \int_0^\infty \cdots \int \exp\left\{- c \sum_{p=1}^{n} \frac{|\mu^{(p)}|^2}{|\omega^{(p)}|} t_p\right\} (t_1 t_2 \ldots t_n)^{\frac{s}{2}} \frac{dt_1 \, dt_2 \ldots dt_{r+1}}{t_1 t_2 \ldots t_{r+1}}$$

c und ω haben die frühere Bedeutung, vermöge der die linke Seite den Wert

$$\frac{N(\mathfrak{a}\mathfrak{c})^s}{N(\mu)^s} \left[d \cdot N(\mathfrak{f}) \pi^{-n} 2^{-2r_2}\right]^{\frac{s}{2}}$$

erhält. Führen wir die Funktion

(17)
$$Z(s;\ \chi, \mathfrak{a}) = \zeta(s;\ \chi, \mathfrak{a}) \left[d N(\mathfrak{f}) \pi^{-n} 2^{-2r_2}\right]^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2}$$

und entsprechend für $\mathfrak{f} = 1$

(17a)
$$Z(s, \mathfrak{a}) = \zeta(s;\ \mathfrak{a}) \left[d \pi^{-n} 2^{-2r_2}\right]^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2}$$

ein, so ergibt sich also

(18)
$$Z(s;\ \chi, \mathfrak{a}) =$$

$$\int_0^\infty \cdots \int \sum_{(\mu) \equiv 0 (\mathfrak{a}\mathfrak{c})} \chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\right) \exp\left\{- c \sum_{p=1}^{n} \frac{|\mu^{(p)}|^2}{|\omega^{(p)}|} t_p\right\} t_1 \ldots t_n)^{\frac{s}{2}} \frac{dt_1 \ldots dt_{r+1}}{t_1 \ldots t_{r+1}}.$$

Um von hier auf die Thetareihe (8) zu kommen, bei der über *alle* Zahlen μ des Ideals $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ summiert wird, führen wir ein System von Grundeinheiten des Körpers k ein, etwa $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_r$. Ist dann

(19) $\eta = \eta_1^{a_1} \eta_2^{a_2} \ldots \eta_r^{a_r} \quad a_1, a_2, \ldots = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

eine Einheit dieser Gruppe und führen wir die Substitution

(20) $t_p = |\eta^{(p)}|^2 t'_p \qquad p = 1, \ldots n$

aus, wobei die Relationen (3) erfüllt bleiben auch für die t', so hat das denselben Erfolg, als wenn wir unter dem Integral-

zeichen μ durch die assoziierte Zahl $\eta\mu$ ersetzen. In dem Raume der positiven Variabeln $t_1, t_2, \ldots t_r$ besitzt nun die durch (19), (20) definierte Gruppe von linearen Transformationen bekanntlich einen Fundamentalbereich. Nennen wir ein bestimmt ausgewähltes Exemplar derselben B, so liefert offenbar die Integration über B und die Summation über die Zahlen μ und die nach der Gruppe äquivalenten Zahlen $\eta\mu$ dasselbe Resultat wie die Integration und Summation in (18). Berücksichtigen wir endlich noch die w in k vorhandenen Einheitswurzeln, die ja nebst ihren konjugierten den Betrag 1 haben, so folgt wegen (8)

$$(21)\qquad w\,G(s;\ \chi, \mathfrak{a}) = \int\limits_{(B)}\!\!\cdots\!\int \vartheta(t;\ \chi,\ \mathfrak{a})\,(t_1\ldots t_n)^{\frac{s}{2}}\,\frac{dt_1\ldots dt_{r+1}}{t_1\ldots t_{r+1}}.$$

Wir teilen jetzt den Integrationsbereich B in zwei Teile:

$$B_1,\ \text{wo}\ t_1 t_2 \ldots t_n > 1$$

und

$$B_2,\ \text{wo}\ t_1 t_2 \ldots t_n < 1.$$

In dem Integral über B_2 führen wir $\dfrac{1}{t_p}$ an Stelle von t_p ein; dadurch geht bei unserer Auswahl von B, wie wir nachher gleich zeigen wollen, B_2 in B_1 über und die Heranziehung der Formel (10) liefert uns endlich das Ergebnis:

$$w\,Z(s;\ \chi, \mathfrak{a}) =$$

$$= \int\limits_{(B_1)}\!\!\cdots\!\int \left[\vartheta(t;\chi,\mathfrak{a})(t_1\ldots t_n)^{\frac{s}{2}} + W(\chi)\,\vartheta\left(t;\ \bar{\chi},\ \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\right)(t_1\ldots t_n)^{\frac{1-s}{2}}\right]\frac{dt_1\ldots dt_{r+1}}{t_1\ldots t_{r+1}}.$$

Den Bereich B können wir durch Einführung neuer Koordinaten sehr einfach beschreiben: Wir führen $u, x_1, x_2 \ldots x_r$ an Stelle von $t_1 \ldots t_{r+1}$ ein durch die Gleichungen:

$$(22)\qquad t_p = u\,e^{\sum\limits_{q=1}^{r} x_q \log|\eta_q^{(p)}|^2}\qquad p = 1, 2 \ldots r+1.$$

Es ist die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(t_1, \ldots t_{r+1})}{\partial(u, x_1, \ldots x_r)} = \frac{t_1 t_2 \ldots t_{r+1}}{u}\,P$$

wo

$$P = \begin{vmatrix} 1, & \log|\eta_1^{(1)}|, & \log|\eta_2^{(1)}|, & \log|\eta_r^{(1)}| \\ 1, & \log|\eta_1^{(2)}|, & \log|\eta_2^{(2)}|, & \log|\eta_r^{(2)}| \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & & & \log|\eta_r^{(r+1)}| \end{vmatrix} .\, 2^r = \pm\, n\, 2^{r_1 - 1} R$$

und R der Regulator des Körpers ist. Ferner

$$t_1 t_2 \dots t_n = u^n,$$

und die Bereiche B, B_1, B_2 sind durch die Ungleichungen

$$\begin{array}{lll} B: & u > 0, \; |x_q| < \frac{1}{2} & \\ B_1: & u > 1, \; |x_q| < \frac{1}{2} & (q = 1, 2 \dots r) \\ B_2: & 0 < u < 1, \; |x_q| < \frac{1}{2} & \end{array}$$

charakterisiert. In diesen Variabeln wird dann

$$w \, . \, Z(s;\; \chi, \mathfrak{a}) = 2^{r_1 - 1} n R \times$$

$$\int\limits_{u=1}^{\infty} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \dots \int \left[\vartheta(t;\; \chi, \mathfrak{a}) \, u^{\frac{ns}{2}} + W(\chi) \, \vartheta\left(t;\; \bar{\chi}, \frac{1}{\mathfrak{a} \mathfrak{c} \mathfrak{d}}\right) u^{\frac{n(1-s)}{2}} \right] \frac{du}{u} \, dx_1 \dots dx_r.$$

In analoger Weise folgt bei $\mathfrak{f} = 1$, wo in den Thetareihen noch das Glied mit dem Exponenten Null zu berücksichtigen ist:

$$w \, Z(s;\; \mathfrak{a}) = \frac{2^{r_1} R}{s(s-1)} + 2^{r_1 - 1} n R \times \tag{23a}$$

$$\int\limits_{u=1}^{\infty} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \dots \int \left[(\vartheta(t;\; \mathfrak{a}) - 1) \, u^{\frac{ns}{2}} + \left(\vartheta\left(t;\; \frac{1}{\mathfrak{a} \mathfrak{d}}\right) - 1\right) u^{\frac{n(1-s)}{2}} \right] \frac{du}{u} \, dx_1 \dots dx_r.$$

Hieraus folgt wegen $W(x) \, W(\bar{\chi}) = 1$

1) $Z(s;\; \chi, \mathfrak{a})$ ist für $\mathfrak{f} \neq 1$ eine ganze transzendente Funktion von s.

2) Es besteht die Funktionalgleichung:

$$Z\left(1 - s;\; \bar{\chi}, \frac{1}{\mathfrak{a} \mathfrak{c} \mathfrak{d}}\right) = W(\bar{\chi}) \, Z(s;\; \chi, \mathfrak{a}).$$

1a) $Z(s;\; \mathfrak{a})$ ist außer bei 0, 1 überall im Endlichen regulär.

2a) Es besteht die Funktionalgleichung

$$Z\left(1 - s;\; \frac{1}{\mathfrak{a} \mathfrak{d}}\right) = Z(s;\; \mathfrak{a}).$$

Man erhält hieraus die L, indem man über $\mathfrak{a}$ summiert und $\mathfrak{a}$ je ein Ideal aus jeder Idealklasse durchlaufen läßt, das Gleiche tut dann auch $\frac{1}{\mathfrak{a} \mathfrak{c} \mathfrak{d}}$. So ergeben sich die Sätze:

I. *Für jeden Charakter* χ *mod.* $\mathfrak{f}$, *der nicht der Hauptcharakter ist, und für* $\mathfrak{f} = 1$ *oder* $\neq 1$, *ist* $L(s, \chi)$ *eine ganze transzendente Funktion.*

II. *Man setze A gleich der nur von $\mathfrak{f}$ abhängigen Zahl*

$$A = [d \,.\, N(\mathfrak{f}) \pi^{-n} 2^{-2r_2}]^{\frac{1}{2}}.$$

Dann gilt für jeden eigentlichen Charakter mod. $\mathfrak{f}(\neq 1)$ *und bei* $\mathfrak{f} = 1$ *für jeden Charakter: Die Funktion*

$$A^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} L(s, \chi) = \xi(s, \chi)$$

ändert sich nur um einen von s unabhängigen Faktor vom Betrage 1, wenn man s durch $1-s$ und χ durch $\bar{\chi}$ ersetzt. Insbesondere wird bei $\mathfrak{f} = 1$

$$\xi(1-s, \bar{\chi}) = \bar{\chi}(\mathfrak{d})\, \xi(s, \chi).$$

III. *Für jeden Charakter χ mod. $\mathfrak{f}$ ($\neq 1$ oder $= 1$), der nicht der Hauptcharakter ist, haben die $L(s, \chi)$ in der Halbebene $\Re(s) < 0$ Nullstellen nur bei den Polen der Funktion $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2}$. Das Produkt $\xi(s, \chi) \,.\, \xi(s, \bar{\chi})$ ist als Funktion von $\left(s - \frac{1}{2}\right)^2$ eine ganze transzendente Funktion vom Geschlechte Null, deren Nullstellen alle dem Streifen $0 \leq \Re(s) \leq 1$ angehören.*

Da das Produkt aller L-Funktionen (vgl. den folgenden Paragraphen) eine Dirichletsche Reihe mit positiven Koeffizienten ist, so folgt nach einem bekannten Satz der Herren Hadamard und de la Vallée Poussin, daß auf der Graden $\sigma = 1$ keine Nullstelle von L liegt; wegen der Funktionalgleichung hat daher jedes einen eigentlichen Charakter entsprechende L auch keine Nullstellen auf der imaginären Achse.

§ 5.

Die Primideale in den Klassen mod. $\mathfrak{f}$.

Die obigen Sätze über die analytische Natur der Funktionen L setzen uns in den Stand zu zeigen, daß in jeder Idealklasse mod. $\mathfrak{f}$ unendlich viele Primideale liegen, ohne daß wir dazu die Existenz der zugehörigen „Klassenkörper" zu kennen brauchen. Der Beweisgang darf gegenwärtig wohl als zur Genüge bekannt gelten. Ich bringe hier nur den Hauptpunkt des Beweises [1]):

Für $\chi \neq 1$ ist $L(1, \chi) \neq 0$.

---

1) Dieser Beweis entspricht dem Beweise von Herrn Landau für die L-Reihen im rationalen Körper. (Über das Nichtverschwinden einer Dirichletschen

Zum Beweise setzen wir $L(s, \chi) = L_0(s)$, wenn χ der Hauptcharakter (d. h. $\chi = 1$) ist. $L_0(s)$ unterscheidet sich von der Funktion $\zeta_k(s)$ nur um unwesentliche Faktoren und ist, außer beim Pole 1. Ordnung $s = 1$, eine für alle endlichen s reguläre Funktion.

Betrachten wir nun das über alle Charaktere $\chi \neq 1$ zu erstreckende Produkt

$$Z(s) = L_0(s) \prod_{\chi} L(s, \chi).$$

Vermöge der Bedeutung der Charaktere χ gestattet nach (13) dieses Produkt die Darstellung:

$$Z(s) = \prod \frac{1}{(1 - N(\mathfrak{p})^{-fs})^e} \qquad (\mathfrak{p}, \mathfrak{f}) = 1, \tag{24}$$

worin e, f ganze, von $\mathfrak{p}$ abhängige Exponenten (mit $e . f = h(\mathfrak{f})$) sind. Hieraus geht hervor, daß

$$Z(s) = \sum_n \frac{c_n}{n^s} \tag{25}$$

für $\Re(s) > 1$ eine Dirichletsche Reihe mit ganzen rationalen Koeffizienten $c_n \geqq 0$ ist.

Wäre nun für ein $\chi \neq 1$ $L(1, \chi) = 0$, so wäre $Z(s)$ eine ganze transzendente Funktion. Nach dem Satze von Herrn Landau über Dirichletsche Reihen mit positiven Koeffizienten müßte dann die Reihe (25) für alle s konvergent sein. Wegen der Ganzzahligkeit der c_n könnte sie also nur endlich viele Glieder $\neq 0$ enthalten. Das ist aber nicht möglich, denn in dem Produkt (24) kommen ja alle unendlich vielen in $\mathfrak{f}$ nicht aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}$ vor. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Zum Schluß erwähne ich, daß die obigen Beweismethoden natürlich nicht nur auf den Fall „weiterer Äquivalenz" beschränkt sind. Wie im rationalen Grundkörper lassen sich auch für einen beliebigen Körper k die entsprechenden Formeln für den engeren Äquivalenzbegriff herleiten. Bei dem Übergang zu den Thetareihen hat man dann nur die Ableitungen der Thetas nach den Argumenten an Stelle der Thetas selbst zu benutzen. Ich habe die Rechnung indes nicht ausgeführt.

Reihe, Sitzungsber. d. königl. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1906, S. 319), doch ist er bisher nur auf das Produkt $L_0(s) . L(s, \chi)$ für einen reellen Charakter χ angewendet worden. Das Nichtverschwinden der L-Reihen für komplexe Charaktere läßt sich bekanntlich elementar leicht zeigen.

Das asymptotische Verteilungsgesetz für die Anzahl $\varrho(x)$ der Primideale einer Klasse mod. $\mathfrak{f}$, deren Norm $\leqq x$ ist, wird nun sofort durch eine fertig vorliegende Formel von Herrn Landau[1]) gegeben:

$$\varrho(x) = \frac{1}{h(\mathfrak{f})} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x e^{-\sqrt[a]{\log x}}\right)$$

(a ist eine positive Konstante).

Diese Formel ist an der zitierten Stelle unter der Voraussetzung bewiesen, daß für die Hauptklasse

$$\sum_{\mathfrak{p} \sim 1(\mathfrak{f})} \frac{1}{N(\mathfrak{p})}$$

divergent ist, was bisher nur in einzelnen Fällen bekannt war, was aber auf Grund der obigen Sätze nun ganz allgemein gilt.

Für die über die Primideale $\mathfrak{p}$ einer beliebigen Klasse mod. $\mathfrak{f}$ erstreckte Summe ist, wenn $\Re(s) > 1$

$$\sum_{\mathfrak{p}} N(\mathfrak{p})^{-s} = \frac{1}{h(\mathfrak{f})} \log \frac{1}{s-1} + G(s),$$

wo

$$G(s) \text{ bei } s = 1 \text{ regulär ist.}$$

Basel, Januar 1917.

---

1) *Landau,* Über die Verteilung der Primideale in den Idealklassen eines algebraischen Zahlkörpers. Math. Ann. 63 (1907) S. 197.

Berichtigung.

S. 100, Z. 13 lies $-\beta$ statt $-\beta-\varrho$.

Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen.

XXIX.

Abwandelung von Menthon in Pulegenon.

Von

O. Wallach und E. Grote.

Vorgelegt in der Sitzung vom 26. Oktober 1917.

Vor einiger Zeit ist ein Weg gefunden (Nachr. d. Königl. Ges. d. Wissensch. 1915, S. 244—263), der es erlaubt, Cyklohexanone in Cyklopentanone abzuwandeln. Es wurde nämlich gezeigt, daß bei direkter Einführung von Brom in Cyklohexanone zwei Bromatome sich benachbart zum Carbonyl stellen. Werden so gewonnene Dibromketone dieser Reihe mit Alkali behandelt, so erhält man Verbindungen der allgemeinen Formel $C_n H_{2n-4} O_2$, die sich gut isolieren lassen und die weiter zu Oxykarbonsäuren abwandelbar sind. Letztere bilden ein Fünfringsystem und liefern bei der Oxydation Cyklopentanone.

Eine nähere Untersuchung der Zwischenprodukte $C_n H_{2n-4} O_2$, die zumeist in kristallisierter Form erhalten werden konnten, und die man als ungesättigte Oxyketone (bezw. Halbenole von Orthodiketonen) auffassen kann, deren einfachsten Typus die Verbindung

—OH

=O

vorstellen würde, war nach verschiedenen Richtungen erwünscht.

Beim Studium des Verhaltens dieser Verbindungen $C_n H_{2n-4} O_2$ gegen Brom gelang es nun, eine neue interessante Reaktionsfolge aufzudecken, die etwas eingehender an der z. Z. zugänglichsten

Verbindung der Reihe, dem aus Menthon gewinnbaren $C_{10}H_{16}O_2$ zunächst studiert ist und die nachstehend beschrieben werden soll.

Wenn man reines 2,4Dibrommenthon-2 mit Alkali behandelt, so entstehen gleichzeitig zwei isomere Verbindungen $C_{10}H_{16}O_2$, deren eine, als α-bezeichnete (l. c. S. 256), bei 82⁰—83⁰ schmilzt, während die andere (β) den Schmelzpunkt 36⁰—38⁰ aufweist.

Eine ausführliche Besprechung dieser Verbindungen, deren ganz kurze Charakterisierung l. c. enthalten ist, wurde in einer Annalenabhandlung gegeben, die schon vor langer Zeit der Redaktion zugegangen, die aber noch nicht im Druck erschienen ist. Es sei daher aus dem dort Mitgeteilten hier wiederholt, daß die α-Verbindung $C_{10}H_{16}O_2$ sich als identisch mit Diosphenol oder dem natürlichen Buccokampfer erwiesen hat. Wie mir erst nach Fertigstellung meiner Arbeit bekannt wurde, hat auch Cusmano (Chem. Centralbl. 1914. I. 976) das Verhalten von Dibrommenthon gegen Alkali untersucht und ist zu demselben Resultat gekommen. Die β-Verbindung hat er dagegen nicht aufgefunden.

Verhalten der Verbindung $C_{10}H_{16}O_2$ gegen Brom.

Die α- und die β-Modifikation verhalten sich, soweit bisher festgestellt werden konnte, Brom gegenüber gleich. Man kann daher zu den folgenden Versuchen auch das Verbindungsgemisch verwenden, das man bei der Umsetzung des Menthondibromids mit Kali erzielt und für dessen Beschaffung in etwas größerer Menge wir der Firma Schimmel & Co. in Miltitz zu großem Dank ververpflichtet sind. Ganz besonders ist festgestellt worden, daß sich die reine bei 82⁰—83⁰ schmelzende α-Verbindung genau so gegen Brom verhält, wie der natürliche Buccokampfer (Diosphenol), von dem uns obige Firma auch eine Probe verschafft hat. Den Schmelzpunkt dieses natürlichen Produkts findet man zwar bei 83⁰—84⁰ angegeben, es ist das aber nach meinen Beobachtungen um einen Grad zu hoch.

Die Einwirkung von Brom auf natürlichen Buccokampher ist nun sowohl von Semmler (Ber. d. d. chem. Ges. 39, 1158 (1908), als auch von Cusmano (l. c.) schon untersucht. Unsere Resultate gehen über die von den genannten Forschern mitgeteilten aber weit hinaus.

Wenn man die α-Verbindung aus Menthondibromid mit Brom behandelt, so hängt es ganz von den Versuchsbedingungen ab, was für Produkte man erhält. Namentlich ist das angewandte Lösungsmittel und die Temperatur nicht ohne Einfluß auf das Resultat. Von besonderem Interesse ist ein bis dahin unbekanntes,

prachtvoll krystallisierendes gelbes Dibromid $C_{10}H_{14}Br_2O_2$ vom Schmelzpunkt 44⁰—45⁰, das wir aus unserer Verbindung erhalten haben und dessen Verhalten nachher besprochen werden soll.

Dieses gelbe Dibromid kann man in einem Schritt aus dem $C_{10}H_{16}O_2$ erhalten (s. u.), man kann es aber auch durch weiteres Bromieren eines farblosen Monobromids darstellen, das als erstes Reaktionsprodukt zu fassen ist und das auch schon Cusmano aus Buccokampher erhalten hat. Dem, was Cusmano über die Konstitution dieses Monobromids annimmt, kann aber nicht zugestimmt werden. Da nun die Ermittelung der Stellung des Bromatoms in diesem Monobromid wesentlich ist, um dessen Verhalten zu verstehen, so sollen die bezüglich dieses Monobromids gemachten Beobachtungen zuerst mitgeteilt werden.

1) Monobromid $C_{10}H_{15}BrO_2$, F. 77⁰—78⁰.

Ein Gemisch von α- und β-$C_{10}H_{16}O_2$, oder reines α-$C_{10}H_{16}O_2$ (also Buccokampher) wird in der 15-fachen Menge Eisessig gelöst und mit 1 Mol. Brom, das vorher auch in Eisessig gelöst war, tropfenweise versetzt: Es tritt dabei Bromwasserstoff auf. Wird nach beendeter Reaktion die Flüssigkeit mit Eiswasser versetzt, so scheidet sich das entstandene Bromid in weißen Krystallen ab, die mit Wasserdampf flüchtig sind und auf Grund dieser Eigenschaft gereinigt werden können. Aus dem gleichen Gewicht Methylalkohol läßt sich das Monobromid gut umkristallisieren, wenn man das Rohprodukt unter sehr schwachem Erwärmen in wenig Alkohol löst und die Lösung dann gleich stark abkühlt. Die farblosen Krystalle schmelzen bei 77⁰—78⁰ und färben sich beim Aufbewahren an der Luft bald braun. Die Ausbeute ist gut.

1) 0.1958 Gr. gaben 0.1508 AgBr.
2) 0.1846 „ „ 0.1437 „

Ber. für $C_{10}H_{15}O_2Br$.		Gef.
Br. 33.25	32.77	33.12.

Dasselbe Bromid hat unzweifelhaft auch Cusmano beim Bromieren von Buccokampher in Chloroformlösung erhalten (l. c. S. 977). Allerdings gibt er den Schmelzpunkt zu 85⁰ an. Wir haben aber, auch wenn nach seinem Verfahren bromiert wurde, das obige Bromid von etwas niedrigerem Schmelzpunkt erhalten. Cusmano schreibt dem Bromid die Formel zu[1]):

1) Atti R. Accad. dei Lincei 22. II. 569 (1913).

CH_3

$-OH$

Br $=O$

C_3H_7

und geht dabei von der Voraussetzung aus, daß dem Buccokampher die von Semmler vorgeschlagene Formel

CH_3

$-OH$

$=O$

C_3H_7

zukommt. In meiner ausführlichen Abhandlung habe ich die Möglichkeiten diskutiert, welche Atomfiguration man den Verbindungen der Formel $C_nH_{2n-4}O_2$, zu denen der Buccokampher gehört, zuerteilen kann und hervorgehoben, das auch andere Formeln in Betracht kommen. Jedenfalls hat man es mit recht labilen Verbindungen zu tun, die unter dem Einfluß von Reagentien sich leicht verändern können. Man darf aber, wie schon einleitend bemerkt ist, die obige Formel eines ungesättigten Ketons den Betrachtungen zu Grunde legen, wie Cusmano es tut. Die Cusmano'sche Formel des Monobromids entbehrt jedoch der Wahrscheinlichkeit. Cusmano gründet sie auf die von ihm festgestellte Tatsache, daß dies weiße Monobromid bei der Behandlung mit Alkali in Oxythymochinon übergeht und schließt daraus, daß bei der Umsetzung das Brom gegen OH ausgetauscht wird und gleichzeitig Oxydation eintritt, indem die ursprünglich entstandene hydroaromatische Verbindung in die aromatische übergeht.

Daß der Reaktionsmechanismus tatsächlich anders verläuft, geht aus Folgendem hervor.

Wenn man das Monobromid bei Ausschluß von Wasser mit Pyridin erwärmt, so spaltet sich leicht Bromwasserstoff ab und es entsteht ein ziemlich farbloses Produkt, das nach dem Ansäuern mit Schwefelsäure durch Wasserdampf übergetrieben werden kann. Dabei geht dann ein Oel von schwachem Geruch über, das fast ganz im Wasser gelöst bleibt. Aethert man aus, so hinterbleibt nach Entfernung des Aethers ein gelbes Oel, das sich bei Luftabschluß farblos in Alkali löst. Die alkalische Lö-

sung färbt sich aber bei Luftzutritt und wird beim Einleiten von Sauerstoff kirschrot. Dabei scheiden sich auch in Alkali unlösliche Teile in kleiner Menge ab, die abfiltriert wurden. Säuert man das rote Filtrat an, so scheiden sich gelbe Flocken aus, die durch Destillation mit Wasserdampf gereinigt werden können. In rohem Zustand lag der Schmelzpunkt dieser Verbindung bei 173°, nach dem Umkrystallisieren aus Alkohol bildete sie Nadeln vom Schmelzpunkt 166°—167°. Die Analyse stimmte auf Oxythymochinon [1]).

Aus diesem bei Ausschluß von Wasser eingeleiteten Reaktionsverlauf darf man schließen, daß die Bildung von Oxythymochinon aus dem Monobromid im ersten Schritt n i c h t auf dem Austausch von Brom gegen Hydroxyl beruht, sondern daß zunächst Bromwasserstoff abgespalten wird. Damit ist die Schlußfolgerung, die zur Annahme der Stellung 5 des Broms im Monobromid führte, als nicht beweiskräftig nachgewiesen. An und für sich ist es auch viel wahrscheinlicher, daß beim Bromieren des Oxyketons das tertiäre Wasserstoffatom in der Stellung 4 substituiert wird, daß dem Monobromid also die Konstitution

CH_3 —OH =O Br— C_3H_7

zukommt. Es ist auch nicht ausgeschlossen, daß während der Reaktion Verschiebungen der Konfiguration eintreten, die zu einem Bromid mit der Stellung 1 im Molekül führen könnten:

CH_3 —OH =O C_3H_7 → CH_3 =O =O C_3H_7 → CH_3 =O —OH C_3H_7 → CH_3 —Br =O —OH C_3H_7

Eine Verbindung, die unter Bromwasserstoffaustritt aus dem zuerst formulierten Bromid entstehen müßte, würde unter primärer

---

1) Bezüglich des Schmelzpunkts von Oxythymochinon liegen recht abweichende Angaben vor. (C a r s t a n j e n gibt 187° an, L i e b e r m a n n 183—184°. Ber. X, 79 (1877).

Addition von Wasser und nachfolgender Oxydation und Bindungsverschiebung auch Oxythymochinon liefern können:

Man findet, daß bei solchem oder ähnlichem Reaktionsverlauf aus dem Bromid eben so gut nur eines der beiden isomeren Oxythymochinone entstehen könnte, als auch ein Gemisch beider. Letzteres ist sogar nicht ganz unwahrscheinlich, da der Schmelzpunkt des erhaltenen Chinons nie ganz konstant war, was allerdings auch auf Beimengungen von Dioxythymochinon zurückgeführt werden könnte.

Wenn man das Monobromid statt mit Pyridin mit Natronlauge behandelt, so spielt sich der Vorgang ganz ähnlich ab. In einer Wasserstoffatmosphäre löst sich das Bromid in Natronlauge fast farblos auf. Erst bei Sauerstoffzutritt färbt sich die Flüssigkeit rot und wird beim Einleiten von Sauerstoff schnell vollkommen oxydiert. Beim Ansäuern der schließlich tiefrot gefärbten Flüssigkeit, entsteht ein ockergelber Niederschlag. Dieser geht beim Behandeln mit Wasserdampf z. T. in Form gelber Kryställchen über, die zunächst bei 175°, nach mehrmaligem Umkrystallisieren aus Alkohol nicht ganz scharf bei 166°—167° schmolzen. Der nicht mit Wasserdampf flüchtige Reaktionsrückstand war nicht unerheblich und stellte ein Oel vor, das nach dem Erkalten zu einer braunen Masse erstarrte. Dies, wohl höher molekulare, amorphe Produkt ist in Alkali mit brauner Farbe löslich.

2) Monobromid $C_{10}H_{15}BrO_2$ (?), F. 100°—101°.

Beim Bromieren der Verbindung $C_{10}H_{16}O_2$ in Eisessiglösung wurde mehrfach die Entstehung eines Bromids beobachtet, dessen Eigenschaften von denen des eben beschriebenen Monobromids (F. 77°—78°) und denen des nachher zu beschreibenden Dibromids (F. 44°) ganz erheblich abwichen. Ist es jenen beigemengt, so modifiziert es deren Eigenschaften, worauf zu achten ist. Die Entstehung dieses neuen, hochschmelzenden Monobromids scheint wesentlich von den Temperaturbedingungen, unter denen man die Bromierung vornimmt, abzuhängen. Ziemlich sicher wird es erhalten, wenn man folgendermaßen verfährt.

1 Gr. $C_{10}H_{16}O_2$ (F. 82⁰) werden in 8 ccm. Eisessig gelöst und auf 60⁰ erwärmt. Dann fügt man sogleich eine Lösung von 2 Mol. Brom, in Eisessig gelöst, zu der Flüssigkeit. Es tritt heftige Bromwasserstoffentwicklung ein und die Flüssigkeit bleibt rötlich gefärbt. Nun fügt man Wasser bis zu beginnender Trübung hinzu und dann Aethyl-, oder auch Methylalkohol. Es fällt eine, bald zu gelblichen Nädelchen erstarrende Substanz aus. Da diese in kaltem Alkohol außerordentlich schwer löslich ist, so kann man sie durch Auswaschen mit Alkohol von Beimengungen befreien. Schließlich krystallisiert man sie um, indem man in der etwa fünffachen Menge Chloroform, oder der zehnfachen Menge Alkohol unter vorsichtigem Erwärmen löst und die Lösung sogleich stark abkühlt.

Das so dargestellte Bromid bildet gelbliche, seidige Kryställchen, die unter Zersetzung bei 100⁰—101⁰, oder auch etwas höher schmelzen.

1) 0.1641 Gr. gaben 0.1284 AgBr
2) 0.1594 „ „ 0.1232 „
3) 0.1470 „ „ 0.1139 „

Berechnet für $C_{10}H_{15}O_2Br$	Gefunden		
Br 32.35	33.10	32.89	32,97

Dieses Monobromid, dessen Wasserstoffgehalt noch nicht ermittelt ist, unterscheidet sich von dem vorher beschriebenen nicht nur durch seine außerordentliche Schwerlöslichkeit in organischen Lösungsmitteln, sondern auch durch seine Unlöslichkeit in Alkali und dadurch, daß es mit Wasserdämpfen gar nicht flüchtig ist.

Wenn man dies gelbe Monobromid in Eisessiglösung weiter bromiert und zwar das Brom längere Zeit einwirken läßt, so erhält man ein farbloses festes Bromid, das sich in Alkohol viel leichter löst, nach dem Umkrystallisieren bei 163⁰ schmilzt und in Alkali unlöslich ist. Diese Verbindung scheint ein Dibromid zu sein. Die Untersuchung ist aber noch nicht durchgeführt.

3) Dibromid $C_{10}H_{14}Br_2O_2$, F. 44⁰—45⁰.

Zu diesem interessantesten Halogenderivat der Verbindung $C_{10}H_{16}O_2$ kann man auf verschiedenen Wegen gelangen. Entweder, man bromiert das bei 77⁰ schmelzende Monobromid weiter, oder, was weit bequemer und zweckmäßiger ist, man läßt auf eine Lösung der Verbindung $C_{10}H_{16}O_2$ direkt einen Ueberschuß von Brom einwirken. Die Bromierung geht dabei nie über die Bildung des Dibromids hinaus und nach beendeter Bromaufnahme, die von vorn-

herein unter lebhafter Bromwasserstoffentwickelung einsetzt, kann man überschüssig vorhandenes Brom durch etwas schwefelige Säure fortnehmen. Als Lösungsmittel kann man Eisessig verwenden, hat dabei aber Rücksicht darauf zu nehmen, daß sich dann auch leicht etwas von dem eben beschriebenen hochschmelzenden Monobromid bildet, dessen Anwesenheit die Reinigung erschwert.

Am sichersten gelangt man zu dem Dibromid in sehr reinem Zustand, wenn man in verdünnter ätherischer Lösung bromiert und nicht mehr als ein Gramm $C_{10}H_{16}O_2$ in einer Portion in Arbeit nimmt.

Man löst 1 Gr. $C_{10}H_{16}O_2$ in 12 ccm. Aether, läßt 1 ccm. Brom hinzufließen und gießt nach beendeter Reaktion die Lösung in eine flache Schale aus. Nach dem Verdunsten des Aethers hinterbleibt das Bromid zunächst gewöhnlich als Oel, das aber, namentlich nach dem Anreiben oder Animpfen schnell erstarrt. Man reibt es dann, um etwa noch anhaftendes freies Brom zu entfernen, mit schwefeliger Säure durch, löst das abfiltrierte und abgepreßte Bromid in wenig Methylalkohol und kühlt die Lösung zwecks Krystallisation stark ab.

Das Dibromid krystallisiert ausgezeichnet in gelben, etwas dichroitischen, grünstichigen Krystallen, die etwa das Aussehen der Pikrinsäure haben. Die Ausbeute ist sehr gut, verschlechtert sich aber, wenn man größere Mengen Substanz auf einmal bromiert.

Was die nachstehenden Analysen betrifft, so sind die Bestimmungen 1 und 2 nach Carius ausgeführt, dagegen 3 und 4 nach einer Methode, die der nachgebildet wurde, die ich früher für die Halogenbestimmungen in Platinsalzen empfohlen habe (Ber. d. d. chem. Ges. **14**, 753 (1881), d. h. das Bromid wurde durch Erwärmen mit einer Lösung von frisch bereitetem Natriummethylat in einem Kölbchen an aufsteigendem Kübler bis zur Zersetzung gekocht, der Alkohol entfernt und nach dem Ansäuren des Rückstandes mit Salpetersäure, ev. nach dem Filtrieren, das Brom durch Silbernitrat gefällt.

1) 0.1637 Gr. gaben 0.1892 AgBr.
2) 0.1385 „ „ 0.1591 „
3) 0.1602 „ „ 0.1849 „
4) 0.1523 „ „ 0.1757 „

Berechnet für $C_{10}H_{14}O_2Br_2$	Gefunden			
Br. 49.03	49.18	48.88.	49.12	49.09

Es sei noch einmal hervorgehoben, daß man zu demselben

Bromid gelangt, gleichgültig, ob man von reinem α- oder β-$C_{10}H_{16}O_2$ aus Menthon, oder ob man von natürlichem Buccokampher ausgeht.

Das Bromid ist für sich in reinem Zustand recht beständig. Man kann es in Eisessiglösung kochen, ohne daß eine wesentliche Zersetzung eintritt. Wird das Dibromid in Eisessiglösung mit Zinkstaub behandelt, so wird die Ausgangsverbindung $C_{10}H_{16}O_2$ zurückgebildet, die leicht abgeschieden und an ihren charakteristischen Eigenschaften erkannt werden kann.

Erwärmt man das Bromid mit Pyridin (25 Gr. Bromid und 50 Gr. Pyridin), auf dem Wasserbade, so tritt nach einigen Minuten stürmische Reaktion ein und der Kolbeninhalt färbt sich dunkel. Nach beendeter Reaktion wurde die Masse mit etwas Wasser versetzt und mit Schwefelsäure angesäuert. Es fiel ein braunes, in Alkali lösliches Oel aus, das ausgeäthert und nach Entfernung des Aethers mit Wasserdampf behandelt wurde. Es ging dabei ein farbloses Oel über, das, aus dem Destillat wieder ausgeäthert, schließlich als bräunliches Oel gewonnen wurde. Bei der Destillation im Vakuum ging unter 11 mm die Hauptmenge zwischen 30°—40° über. Dies Produkt war aber nicht analysenrein. Die Substanz ist in Alkali löslich und diese Lösung entsprechend oxydabel, wie die auf analoge Weise aus dem bei 77° schmelzenden Monobromid erhaltene Verbindung. Wurde in die Flüssigkeit Sauerstoff eingeleitet, so entstand auch in diesem Fall, außer entsprechenden Nebenprodukten, Oxythymochinon, mit den oben angegebenen Eigenschaften.

Verhalten des Dibromids $C_{10}H_{14}Br_2O_2$ F. 44°, gegen Alkali.

Das bei weitem charakteristischste Verhalten zeigt das Dibromid bei der Umsetzung mit wässrigem Alkali, in dem sich das gepulverte Bromid schnell löst. Trägt man eine etwas größere Menge auf einmal in nicht zu verdünnte Kalilauge ein, so erfolgt eine überaus stürmische Reaktion, während der sich Dunkelfärbung und teilweise Zersetzung (unter Harzbildung) bemerklich macht, außerdem entsteht ein mit den sich entwickelnden Wasserdämpfen fortgehendes Oel, das an seinem Geruch und den chemischen Eigenschaften leicht als ein cyklisches Keton erkannt werden konnte.

Da man unter Berücksichtigung seiner Entstehung und der Farbe in dem Dibromid das Dibromorthodiketon

CH_3
—Br
=O
=O
—Br
C_3H_7

als vorliegend annehmen konnte, so lag die Vermutung nah, daß sich in Berührung mit Alkali hier eine ganz ähnliche Reaktion vollzogen habe wie bei der Umsetzung von Dibrommenthon mit Alkali, d. h. daß durch eine Oxycarbonsäure hindurch ein Fünfringsystem entstanden sei. Das Keton konnte seine Entstehung einer sekundären Reaktion verdanken.

Diese Annahme hat sich nur in Bezug auf den letzten Punkt bestätigt. Es ließ sich leicht nachweisen, daß bei der Umsetzung des Dibromids mit Alkali zunächst — und zwar unter den richtigen Versuchsbedingungen sehr glatt — eine schön krystallisierende Säure entsteht, die bei gewöhnlicher Temperatur zwar ganz beständig ist, aber sowohl beim Erhitzen für sich als auch beim Ueberhitzen ihrer Lösungen, oder konzentrierter Lösungen ihrer Salze, unter Entstehung des erwähnten Ketons zerfällt. Diese Zerfallsbedingungen sind aber gegeben, wenn man größere Mengen des Bromids mit konzentriertem Alkali auf einmal umsetzt, da dabei eine bedeutende Temperatursteigerung einsetzt. Es wurde daher nun das folgende Verfahren eingeschlagen.

Säure $C_{10}H_{20}O_6$, Schmelzpunkt 88°—89°.

Je 9 Gramm reines, umkrystallisiertes und dann gepulvertes gelbes Dibromid (F. 44°—45°) wurden in kleinen Mengen unter Umschütteln allmählig in 75 ccm. kalte verdünnte Kalilauge (bereitet durch Auflösen von 8 Gr. Kali in 100 Gr, Wasser) in der Weise eingetragen, daß mit einem erneuten Eintragen von Bromid gewartet wurde, bis alles vorher eingetragene in Lösung gegangen war. Zur Umsetzung der angegebenen Menge braucht man auf diese Weise einige Stunden, aber die Lösung färbt sich nur schwach, ohne daß eine Oelabscheidung erfolgt. Säuert man, wenn Alles in Lösung gegangen ist, an und äthert mehrmals aus, so geht in das Lösungsmittel eine Säure, die sogleich gut krystallisiert, aber, namentlich in der bei der ersten Ausschüttelung gewonnenen Portion, etwas gefärbt und durch klebrige Bestandteile verunreinigt ist. Die gefärbten Anteile kann man entweder dadurch beseitigen, daß man die Säure von neuem in Wasser löst und die gefärbten

Verunreinigungen mit wenig Aether aufnimmt, oder, was geringere Verluste bedingt, wenn man die gepulverte und getrocknete rohe Säure mit wenig Aether digeriert. Man kann so die Verunreinigungen fortwaschen und beim Umkrystallisieren aus der vierfachen Menge kochendem Wasser erhält man nun die Säure in prachtvoll ausgebildeten, wasserhellen Prismen vom Schmelzpunkt 88°—89°. Die Ausbeute an roher Säure bleibt nicht viel hinter der theoretischen zurück.

1) 0.1149 Gr. gaben 0.2122 CO_2 u. 0.0915 H_2O
2) 0.1327 „ „ 0.2446 „ „ 0.1068 „
3) 0.1271 „ „ 0.2404 „ „ 0.1010 „
4) 0.1229 „ „ 0.2268 „ „ 0.0982 „

Ber. für $C_{10}H_{20}O_6$	Gefunden			
	1	2	3	4
C 50.81	50.37	50.27	51.50	50.33
H 8.53	8.91	9.00	8.89	8.94

Die Analysen stimmen also auf die Formel $C_{10}H_{20}O_6$ für die analysierte Säure. Daß diese ein Hydrat ist, geht schon daraus hervor, daß sie beim Krystallisieren aus ganz trockenen Lösungsmitteln syrupös heraus zu kommen pflegt, dieser Syrup aber beim Anrühren mit Wasser, oder beim Herauskommen aus feuchtem Aether erstarrt. Ebenso weist die, allerdings nicht ganz befriedigende Analyse des in Wasser ziemlich löslichen und lichtempfindlichen Silbersalzes, das aus Wasser umkrystallisiert werden kann, darauf hin, daß man die Formel der Säure in $C_{10}H_{18}O_5 + 1\,H_2O$ auflösen darf. Für das nicht leicht zu reinigende Silbersalz wurden folgende Werte gefunden:

1) 0.1584 Gr. gaben 0.2104 CO_2 u. 0.0752 H_2O u. 0.0526 Ag.
2) 0.1534 „ „ 0.0505 Ag.
3) 0.1423 „ „ 0.0471 „

Ber. für $C_{10}H_{17}O_5Ag$	Gefunden		
	1	2	3
C 36.92	36.23	—	—
H 5.27	5.31	—	—
Ag 33.19	33.21	32.91	33.10

Die Säure läßt sich aus der vierfachen Menge kochenden Wassers gut umkrystallisieren. Die alkalische Lösung liefert mit Jod die Jodoformreaktion. Eine wässrige Lösung ist gegen Permanganat einige Zeit beständig, wobei eine Ketonsäure auftritt, die ein sehr lösliches Semikarbazon gibt. Die Säure wird aber

leicht weitgehend abgebaut. Dasselbe gilt für ihre Oxydation vermittelst Chromsäure.

Beim Erhitzen für sich spaltet die Säure zunächst Wasser ab, dann Kohlendioxyd und es entsteht das schon erwähnte Keton. Eine entsprechende Zersetzung findet statt, wenn man die Säure mit nicht zu verdünnter Schwefelsäure oder mit Lösungen in konzentriertem Alkali erwärmt.

Keton $C_9H_{14}O$.

Für die Darstellung dieses Ketons hat es sich am bequemsten erwiesen, die Säure der trockenen Destillation zu unterwerfen. Das dabei überdestillierende Keton kann man, zwecks Reinigung, direkt mit Semikarbazidlösungen versetzen, oder es vorher durch Destillation mit Wasserdampf reinigen.

Die Bildung des Semikarbazons erfolgt sehr langsam und das sich ausscheidende Produkt ist gelb gefärbt. Es wird abfiltriert, getrocknet und mit Aether ausgewaschen, wobei das gelb gefärbte Produkt sich fortwaschen läßt, während man den farblosen Rückstand durch Krystallisation aus Alkohol reinigt, worin er ziemlich löslich ist.

Das so erhaltene Semikarbazon schmolz bei 183⁰—184⁰.

1) 0.1090 Gr. gaben 0.2458 CO_2 u. 0.0881 H_2O
2) 0.1034 „ „ 0.2340 „ „ 0.0848 „

Ber. für $C_{10}H_{17}N_3O$	Gefunden	
C 61.49	61.50	61.72
H 8.78	9.04	9.10

Das aus dem Semikarbazon regenerierte Keton $C_9H_{14}O$ siedete bei 188,5⁰—189⁰ und zeigte $n_D = 1.4660$ bei 20⁰.

Bei der Behandlung mit Palladiumwasserstoff nahm es leicht Wasserstoff auf. Es entstand dabei ein gesättigtes Keton, dessen Eigenschaften mit denen des Dihydrokampherphorons übereinstimmten. Der Schmelzpunkt des sich langsam bildenden Semikarbazons wurde, je nach der Art des Erhitzens bei 196⁰—197⁰ oder 200⁰ gefunden. Das Semikarbazon erlitt keine Schmelzpunktserniedrigung, wenn es mit einem entsprechenden Präparat aus Dihydrokampherphoron gemischt wurde. Die Analyse ergab:

1) 0.1094 Gr. gaben 0.2449 CO_2 u. 0.0996 H_2O
2) 0.1148 „ „ 0.2560 „ „ 0.0998 „

Ber. für $C_{10}H_{19}N_3O$	Gefunden	
C 60.88	61.05	60.82
H 9.71	10.18	9.72

Die Ueberführbarkeit des ungesättigten Ketons $C_9H_{14}O$ in Dihydrokampherphoron zeigt, daß in ihm der Sauerstoff zwischen der Methyl- und der Isopropylgruppe steht. Festzustellen bleibt demnach nur die Lage der Aethylenbindung. Drei Fälle sind möglich:

CH_3 / =O / C_3H_7 — I; CH_3 / =O / C_3H_7 — II; CH_3 / =O / C_3H_7 — III

Davon ist I oder das Δ^5-Methyl-isopropyl-cyklopentenon-2 bekannt (Ann. d, Chem. **369**, 96 (1909); **379**, 194 (1911). Es hat andere Eigenschaften als die für unser Keton gefundenen. II ist unbekannt, die Lage der Aethylenbindung in Δ^4 darf als recht unwahrscheinlich bezeichnet werden. III oder das Δ^3-Methylisopropyl-cyklopentenon-2 = Pulegenon zeigt Eigenschaften (s. Ann. **327**, 133 (1903), die mit den beobachteten nah übereinstimmen, nämlich: Kp. 189°—190°; $n_D = 1.4645$; Semikarbazon: F. 183°—184°.

Es darf also wohl Identität angenommen werden.

Wie man sich die Bildung von Pulegenon aus der Säure $C_{10}H_{18}O_5 + H_2O$ zu denken und die Konstitution der letzteren vorzustellen hat, davon kann man sich etwa folgendes Bild machen.

Nimmt man an, daß dem gelben Dibromid, F. 44°, die Formel I zukommt, so könnte sich bei dessen Umsetzung mit Alkali folgender Reaktionsverlauf vollziehen:

CH_3, Br, =O, I, =O, Br, C_3H_7 ($C_{10}H_{14}Br_2O_2$) → CH_3, OH, =O, =O, OH, C_3H_7 $+ 2H_2O$ → CH_3, OH, COOH, II, $CH(OH)_2$, OH, C_3H_7 ($C_{10}H_{20}O_6$) → CH_3, COOH, OH, OH, OH, C_3H_7 →

CH_3, H, III, =O, C_3H_7

$C_9H_{14}O$ Pulegenon

d. h. es entstände aus dem Bromid das Hydrat einer offenen Dioxy-aldehydo-carbonsäure (II), die unter Kondensation in einen Fünfring und unter gleichzeitiger Abspaltung von Kohlendioxyd und Wasser leicht in Pulegenon (III) übergehen könnte.

Ob diese Erklärung zulässig ist, müssen erst weitere Versuche lehren. Gegen die Auffassung der Säure $C_{10}H_{20}O_6$ als einer Aldehydosäure spricht einigermaßen der Umstand, daß der Säure nicht so stark reduzierende Eigenschaften zukommen, als man von einer Verbindung der Formel II erwarten sollte.

Da die Umsetzung der Bromverbindungen aus dem $C_{10}H_{16}O_2$ aus Menthon zu so bemerkenswerten Resultaten geführt hatte, lag es nah zu untersuchen, ob die aufgefundene Reaktion sich nicht würde verallgemeinern und auf alle analogen Verbindungen $C_nH_{2n-4}O_2$, die l. c. beschrieben worden sind, würde übertragen lassen. Vorläufig konnten nur einige orientierende Versuche mit der schön krystallisierenden Verbindung angestellt werden, die man aus dem zweifach bromierten 1.2-Methylcyklohexanon ableiten kann (s. l. c. S. 248).

Aus dieser bei 62°—63° schmelzenden Verbindung $C_7H_{10}O_2$ kann man, je nach der Art des Bromierens, verschiedene Bromide erhalten.

Bei der Einwirkung eines Ueberschusses von Brom auf die ätherische Lösung von $C_7H_{10}O_2$ entstand unter starker Bromwasserstoffentwickelung ein auch in warmem Aether nicht ganz leicht lösliches Bromid, das nach mehrmaligem Umkrystallisieren unter vorheriger Sinterung bei 115°—116° schmolz. Das Bromid bildet, aus Aether oder Eisessig umkristallisiert, dicke, gelbe sechsseitige Platten und erwies sich als Tribromid:

0.1873 Gr. gaben 0.2923 AgBr

Ber. für $C_7H_7Br_3O_2$	Gefunden
Br 66.12	66.41.

In Alkali löste sich das Tribromid unter Entstehung einer Säure auf, die sich aber als bromhaltig erwies. Bei der Reduktion des Tribromids in Eisessiglösung mit Zink wurde die Ausgangsverbindung $C_7H_{10}O_2$ zurückerhalten.

Wird das $C_7H_{10}O_2$ mit nur 1 Mol. Brom behandelt, so erhält man u. a. ein farbloses Bromid, das in Aether viel löslicher ist als das Tribromid und nach dem Umkrystallisieren Nadeln bildet, die unter starker vorheriger Braunfärbung bei 180° schmelzen. Auch

diese Verbindung löst sich in Alkali und bei Luftzutritt wird unter Dunkelfärbung der Flüssigkeit Sauerstoff aufgenommen. Beim Ansäuren fällt dann eine gelbe, mit Wasserdampf flüchtige Verbindung, die ein Oxychinon sein dürfte.

Das z. Z. zu Gebote stehende Material hat es noch nicht erlaubt, diese Reaktionen weiter zu verfolgen. Das wenige Mitgeteilte deutet aber schon darauf hin, daß eine Verallgemeinerung der neu beschriebenen Reaktionen durchführbar sein dürfte.

Notiz über das mittlere Krümmungsmass einer n-fach ausgedehnten Riemann'schen Mannigfaltigkeit.

(Aus einem Briefe an Herrn F. Klein.)

Von

H. Vermeil in Dresden.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung am 26. Oktober 1917.

Wenn man entsprechend dem Riemann'schen Habilitationsvortrag[1]) und seiner Pariser Preisarbeit[2]) das Bogenelement ds^2 einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in Riemann'schen Normalkoordinaten anschreibt — d. h. die Koordinaten $y_1, y_2, \ldots y_n$ eines Punktes P durch seinen geodätischen Abstand ϱ von einem Anfangspunkt O und die Azimute des Anfangselementes von ϱ gegen ein orthogonales isometrisches n-Bein in O bestimmt — so nimmt das vom Punkte y_i zum Punkte $y_i + dy_i$ führende Linienelement bekanntlich die Form an:

$$ds^2 = \sum dy_i^2 + \sum \mathfrak{P}_{ik,\,rs}(y_1\, y_2 \ldots y_n) \cdot p_{ik}\, p_{rs},$$

wo $\mathfrak{P}_{ik,\,rs}$ eine Potenzreihe der y_i und wo

$$p_{ik} = y_i\, dy_k - y_k\, dy_i$$

ist. Beschränkt man sich nur auf die konstanten Glieder $\alpha_{ik,\,rs}$ der Potenzreihen, bleibt man also in nächster Nähe des Anfangspunktes 0, so hat man:

$$(1) \qquad ds^2 = \sum dy_i^2 + \sum \alpha_{ik,\,rs}\, p_{ik}\, p_{rs}.$$

---

1) Werke 2. Aufl. pg. 276—281.

2) Werke 2. Aufl., pg. 401—403. — Man vergleiche auch die von Weber hinzugefügten Anmerkungen, Werke 2. Aufl., pg. 405—412.

Hier ist die zweite Summe eine quadratische Form der $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungen p_{ik}.

Nach der Wahl eines Anfangspunktes O sind die Riemann'schen Normalkoordinaten noch nicht eindeutig festgelegt, sondern es sind dann noch alle orthogonalen Transformationen des n-dimensionalen Raumes (d. h. Drehungen oder Umlegungen des n-Beins) möglich. Wenn die y_i eine orthogonale Transformation im n-dimensionalen Raum erfahren, so erfahren, wie man leicht feststellt, auch die p_{ik}, als Koordinaten eines $\frac{n(n-1)}{2}$ dimensionalen Raumes aufgefaßt, eine orthogonale Transformation; jedoch sind letztere nicht die allgemeinsten orthogonalen Transformationen der p_{ik}, denn zwischen ihnen bestehen $\binom{n}{4}$ Identitäten von der Form:

$$p_{ik} p_{rs} + p_{ir} p_{sk} + p_{is} p_{kr} = 0.$$

Sie stellten mir nun die Frage, welche linearen Verbindungen der Koëffizienten $\alpha_{ik,\,rs}$ der zweiten Summe von (1) orthogonale Invarianten sind. Da man es durch eine orthogonale Transformation mit der Determinante ± 1 stets erreichen kann, daß die Axen des gedrehten Systems in jeder beliebigen Kombination mit den Axen des festen Systems zusammenfallen, so ergibt sich, daß alle Indizeskombinationen i, k, r, s in der Weise gleichberechtigt sind, daß die $\alpha_{ik,\,rs}$ in drei Typen zerfallen:

1) die beiden Indizespaare sind gleich, z. B. $\alpha_{ik,\,ik}$,
2) nur zwei Indizes sind gleich, z. B. $\alpha_{ir,\,is}$,
3) alle vier Indizes sind verschieden, z. B. $\alpha_{ik,\,rs}$.

Die allgemeinste lineare Invariante wird demnach wegen dieser Gleichberechtigung der Indizes die Gestalt haben müssen:

$$I' = \lambda \sum\sum \alpha_{ik,\,ik} + \mu \sum\sum\sum \alpha_{ir,\,is} + \nu \sum\sum\sum\sum \alpha_{ik,\,rs},$$

wo λ, μ, ν noch zu bestimmende Zahlenfaktoren sind.

In der vierfachen Summe kommen alle 24 Permutationen von je vier festen Indices i, k, r, s vor. Diese lassen sich in acht Gruppen zu je drei, von folgender Form anordnen:

$$\alpha_{ik,\,rs} + \alpha_{ir,\,sk} + \alpha_{is,\,kr}.$$

Nun sind die $\alpha_{ik,\,rs}$ für das Linienelement (1) gerade die 6fachen Werte des Riemann'schen Vierindizessymbols (ik, rs) im Punkte O. Weil nun für diese identisch

$$(ik, rs) + (ir, sk) + (is, kr) = 0,$$

verschwindet die obige Summe und somit auch die vierfache Summe in I'.

Um nun noch die Faktoren λ und μ in

$$I'' = \lambda \sum \sum \alpha_{ik, ik} + \mu \sum \sum \sum \alpha_{ir, is}$$

zu ermitteln, bestimmen wir mittels der erzeugenden infinitesimalen Transformation der orthogonalen Gruppe:

$$y_1 = y_1' - y_2' \varepsilon, \quad y_2 = y_1' \varepsilon + y_2', \quad y_r = y_r' \, (r \neq 1,2)$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Invariante I. Zunächst ergeben sich die Formeln:

$$p_{12} = p_{12}', \quad p_{1r} = p_{1r}' - \varepsilon p_{2r}', \quad p_{2r} = p_{2r}' + \varepsilon p_{1r}, \quad p_{rs} = p_{rs}' \; (r, s \neq 1,2)$$

und daraus als induzierte Inkremente der $\alpha_{ik, rs}$, soweit wir sie brauchen:

$$\delta \alpha_{12, 12} = 0, \quad \delta \alpha_{12, 1r} = \varepsilon \alpha_{12, 2r}, \quad \delta \alpha_{21, 2r} = -\varepsilon \alpha_{21, 1r}, \qquad (rs \neq 1,2)$$
$$\delta \alpha_{1r, 1s} = \varepsilon \alpha_{1r, 2s} + \varepsilon \alpha_{1s, 2r}, \quad \delta \alpha_{2r, 2s} = -\varepsilon \alpha_{1r, 2s} - \varepsilon \alpha_{1s, 2r},$$
$$\delta \alpha_{r1, r2} = -\varepsilon \alpha_{r1, r1} + \varepsilon \alpha_{r2, r2}.$$

(Die Inkremente der $\alpha_{ik, rs}$ die weder den Index 1 noch 2 enthalten sind sämtlich Null). Dann lautet die Differentialgleichung, der I genügen muß,

$$\delta I = \sum_{i, k, r, s} \frac{\partial I}{\partial \alpha_{ik, rs}} \delta \alpha_{ik, rs} = 0.$$

Indem wir die Glieder, in denen mindestens ein Index 1 oder 2 vorkommt, zunächst in I'' besonders hervorheben, erhalten wir:

$$I'' = \lambda \{\alpha_{12, 12} + S\alpha_{1r, 1r} + S\alpha_{2r, 2r} + \cdots\} + \mu \{S\alpha_{12, 1r} + S\alpha_{21, 2r}$$
$$+ SS\alpha_{1r, 1s} + SS\alpha_{2r, 2s} + SS\alpha_{r1, r2} + SS\alpha_{r1, rs} + SS\alpha_{r2, rs} + \cdots\} \qquad (r \neq s)$$

Hier bedeutet das Summenzeichen S, daß die Indizes r und s von 1 und 2 verschieden sind. Setzen wir diesen Wert von I'' in die Differentialgleichung für I ein und beachten das über die $\delta \alpha_{ik, rs}$ beigebrachte, so erhalten wir:

$$\lambda \{0 + 2S\alpha_{1r, 2r} - 2S\alpha_{1r, 2r} + 0\} + \mu \{S\alpha_{12, 2r} - S\alpha_{21, 1r}$$
$$+ SS(\alpha_{1r, 2s} + \alpha_{1s, 2r}) - SS(\alpha_{1r, 2s} + \alpha_{1s, 2r}) - S\alpha_{r1, r1} + S\alpha_{r2, r2}$$
$$+ SS\alpha_{r2, rs} - SS\alpha_{r1, rs} + 0\} = 0.$$

oder einfach:

$$\mu \{S(-\alpha_{21, 1r} + \alpha_{12, 2r}) + S(-\alpha_{1r, 1r} + \alpha_{2r, 2r}) + SS(-\alpha_{1r, sr} + \alpha_{2r, sr})\} = 0,$$

woraus, da die Klammer nicht identisch verschwindet, $\mu = 0$ folgt, während λ beliebig ist. Also bleibt als einzige nicht verschwindende orthogonale Invariante, die in den $\alpha_{ik,\,rs}$ linear ist, übrig

$$I = \sum\sum \alpha_{ik,\,ik}.$$

Aus der zweiten Summe in (1) ergibt sich der in Normalkoordinaten gebildete Ausdruck für das Riemann'sche Krümmungsmaß im Koordinatenanfangspunkt längs der durch y_i und dy_i festgelegten Flächenrichtung:

$$(2) \qquad \mathfrak{K}_R^{(n)} = \frac{-3\sum \alpha_{ik,\,rs}\, p_{ik}\, p_{rs}}{\sum p_{ik}^2}.\ ^{3)}$$

welches man nach Ihrem Vorschlag als Büschelinvariante bezeichnet.

Aus ihr leitet man bekanntlich nach Lipschitz[4]) eine „Ortsinvariante“ ab:

$$\frac{-\frac{1}{2}\psi}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{-\psi}{n(n-1)}$$

welche, wie Sie mir bemerkt haben, hier den einfachen Wert annimmt:

$$(3) \qquad \mathfrak{K}^{(n)} = \frac{-3\sum \alpha_{ik,\,ik}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{-6\sum \alpha_{ik,\,ik}}{n(n-1)},\ ^{5)}$$

---

3) Für das Linienelement $ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ wird diese Büschelinvariante gleich:

$$\mathfrak{K}_R^{(n)} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\sum (ik,rs)(x_i\,dx_k - x_k\,dx_i)(x_r\,dx_s - x_s\,dx_r)}{(\sum a_{ik}\,x_i\,x_k)(\sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k) - (\sum a_{ik}\,x_i\,dx_k)^2}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\,\frac{\sum (ik,rs)(x_i\,dx_k - x_k\,dx_i)(x_r\,dx_s - x_s\,dx_r)}{\sum a_{ik,\,rs}(x_i\,dx_k - x_k\,dx_i)(x_r\,dx_s - x_s\,dx_r)},$$

wo (ik, rs) das Riemann'sche Vierindizessymbol (l. c. pg. 402) und wo

$$a_{ik,\,rs} = a_{ir}\,a_{ks} - a_{is}\,a_{kr}$$

ist. Dieser Ausdruck ist identisch mit dem Riemann'schen Ausdruck (III) (l. c. pg. 403) und für $n = 4$ mit der Formel (3) von Herglotz (Sächsische Berichte 1916, pg. 199—203). Der Zähler:

$$\sum (ik,rs)(x_i\,dx_k - x_k\,dx_i)(x_r\,dx_s - x_s\,dx_r),$$

ist identisch mit dem Riemann'schen Ausdruck (II) (pg. 402), identisch mit dem Lipschitz'schen Ψ (Crelle's Journal 70, pg. 84 u. 101) und mit dem Christoffel'schen $-2\,G_4$ (Crelles Journal 70, pg. 54 u. 58).

4) Crelles Journal 71, pg. 281 u. 293 und besonders Crelles Journal 72, pg. 33 u. 34 (Fußnote).

wo die Summe im Zähler über die $\frac{n(n-1)}{2}$ $\alpha_{ik,ik}$ mit gleichen Indizespaaren zu erstrecken ist. Sie haben dementsprechend befürwortet, diesen Mittelwert der „$-3\alpha_{ik,ik}$" mit dem Namen mittleres Krümmungsmaß zu bezeichnen. Denn für $n = 2$ ist „$-3\alpha_{12,12}$" mit dem Gaußschen Krümmungsmaß identisch, und also ist „$-3\alpha_{ik,ik}$" das Krümmungsmaß der durch die y_i und y_k Axe festgelegten Flächenrichtung und die Zahlenfaktoren geben genau den Mittelwert[6]).

Sie haben mich ferner aufgefordert, in Anlehnung an diese Formeln unter Einführung von Polarkoordinaten eine Rechnung durchzuführen, welche C. Runge gelegentlich vorgeschlagen hatte, und die einer einfachen geometrischen Definition des Gauß'schen Krümmungsmaßes im Falle von 2 Dimensionen entspricht. — Schlägt man nämlich um einen Flächenpunkt 0 einen geodätischen Kreis mit verschwindendem Radius ϱ und vergleicht seinen Inhalt I (Umfang U) mit dem Inhalt $\pi\varrho^2$ (Umfang $2\pi\varrho$) des entsprechenden Kreises der Euklidischen Ebene, so hat man bekanntlich:

$$\alpha_{12,12} = 4\lim_{\varrho=0}\frac{I-\pi\varrho^2}{\varrho^2(\pi\varrho^2)} = 2\lim_{\varrho=0}\frac{U-2\pi\varrho}{\varrho^2(2\pi\varrho)}.$$

Ein ganz entsprechendes Resultat erhält man für die Invariante $\sum\alpha_{ik,ik}$, wie die folgende Rechnung ergibt.

Es gilt einen Näherungswert für das Volumen einer sehr kleinen n-dimensionalen geodätischen Kugel zu ermitteln, wenn die Maßbestimmung des Raumes durch das Linienelement (1) gegeben ist. Nun ist das Volumenelement eines durch das Linienelement $ds^2 = \sum a_{ik}dx_i dx_k$ bestimmten Raumes bekanntlich

$$\sqrt{A}\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

wo A die Determinante des Linienelementes ds^2 ist.

---

5) Für das Linienelement $ds^2 = \sum a_{ik}dx_i dx_k$ wird die Invariante

$$\mathfrak{K}^{(n)} = -\tfrac{1}{2}\frac{\sum(ik,rs)\frac{A_{ik,rs}}{A}}{\sum a_{ik,rs}\frac{A_{ik,rs}}{A}} = -\frac{\sum(ik,rs)A_{ik,rs}}{n(n-1)A},$$

wo A die Determinante der a_{ik} und $A_{ik,rs}$ die zur Determinante $a_{ik,rs}$ adjungierte Unterdeterminante $\frac{\partial^2 A}{\partial a_{ir}\partial a_{ks}}$ bedeutet. $\sum(ik,rs)\frac{A_{ik,rs}}{A}$ ist also identisch mit dem Lipschitz'schen ψ und für $n = 4$ identisch mit dem $-K$ der Formel (9) von Herglotz (l. c.) und mit dem K von Hilbert (Göttinger Nachrichten 1915, pg. 402).

6) Herglotz (l. c.) und Lorentz (Amsterdamer Verslag 1916, Decl 24, pg. 1397) haben andere Zahlenfaktoren.

Wir führen zunächst Polarkoordinaten $r, \varphi, \vartheta_3, \vartheta_4, \ldots \vartheta_n$ ein durch die Formeln:

$$\begin{aligned}
y_1 &= r\, s_2 s_3 s_4 \ldots s_{n-1} s_n \\
y_2 &= r\, c_2 s_3 s_4 \ldots s_{n-1} s_n \\
y_3 &= r\, c_3 s_4 \ldots s_{n-1} s_n \\
&\vdots \\
y_{n-1} &= r\, c_{n-1} s_n \\
y_n &= r\, c_n ,
\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$s_2 = \sin\varphi, \quad c_2 = \cos\varphi, \quad s_l = \sin\vartheta_l, \quad c_l = \cos\vartheta_l \quad (l = 3, 4 \ldots n)$$

gesetzt ist, und bilden die vollständigen Differentiale $dy_1, dy_2, \ldots dy_n$. Dann erhalten wir bekanntlich zunächst:

$$\sum dy^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 s_3^2 s_4^2 \ldots s_{n-1}^2 s_n^2 + r^2\, d\vartheta_3^2 s_4^2 \ldots s_{n-1}^2 s_n^2 + \cdots + r^2\, d\vartheta_{n-1}^2 s_n^2 + r^2\, d\vartheta_n^2.$$

In keinem der $p_{ik} = y_i dy_k - y_k dy_i$ kommt das Differential dr vor; folglich zerfallen die p_{ik} in einen Faktor r^2 und in einen Faktor, der in $d\varphi$ und den $d\vartheta_l$ $(l = 3, 4 \ldots n)$ linear homogen ist und r nicht mehr enthält. In den hierbei auftretenden Koeffizienten von $d\varphi$ bezw. $d\vartheta_l$ ist jedesmal der Faktor $s_3 s_4 \ldots s_n$ bezw. $s_{l+1} s_{l+2} \ldots s_n$ enthalten; demnach haben die bei der Produktbildung $p_{ik} p_{rs}$ auftretenden Summanden $d\varphi^2$ bezw. $d\vartheta_l^2$ im Koeffizienten den Faktor $s_3^2 s_4^2 \ldots s_n^2$ bezw. $s_{l+1}^2 s_{l+2}^2 \ldots s_n^2$. Hiernach nimmt die Determinante des Linienelementes (1) in Polarkoordinaten folgende Gestalt an:

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
r^2 s_3^2 s_4^2 \ldots s_n^2 \{1 + r^2 L_{22}\} & r^4 L_{23} & \cdots & r^4 L_{2,\, n-1} & r^4 L_{2,\, n} \\
r^4 L_{32} & r^2 s_4^2 \ldots s_n^2 \{1 + r^2 L_{33}\} & \cdots & r^4 L_{3,\, n-1} & r^4 L_{3,\, n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
r^4 L_{n-1,\, 2} & r^4 L_{n-1,\, 3} & \cdots & r^2 s_n^2 \{1 + r^2 L_{n-1,\, n-1}\} & r^4 L_{n-1,\, n} \\
r^4 L_{n,\, 2} & r^4 L_{n,\, 3} & \cdots & r^4 L_{n,\, n-1} & r^2 \{1 + r^2 L_{nn}\}
\end{vmatrix}$$

Hier bedeuten $L_{i,k}$ linear homogene Ausdrücke in den $\alpha_{ik,\, rs}$, deren Koeffizienten nur aus den s_l und c_l $(l = 2, 3 \ldots n)$ gebildet sind. Die Entwicklung dieser Determinante nach Potenzen von r liefert, wenn nur die beiden ersten Glieder berücksichtigt,

$$r^{2(n-1)} s_3^2 s_4^4 s_5^6 \ldots s_n^{2(n-2)} \{1 + r^2 (L_{22} + L_{33} + \cdots + L_{nn})\}.$$

Die Quadratwurzel hieraus gibt mit derselben Annäherung für das Volumenelement:

$$r^{n-1} s_3 s_4^2 s_5^3 \ldots s_n^{n-2} \left\{1 + \frac{r^2}{2} (L_{22} + L_{33} + \cdots + L_{nn})\right\} dr\, d\varphi\, d\vartheta_3 \ldots d\vartheta_n.$$

Über dieses hätte man nach Ermittelung der L_{ii} ein n-faches Integral zu erstrecken, um den Inhalt einer sehr kleinen n-dimensionalen geodätischen Kugel zu ermitteln. Diese ganze Rechnung wird nun nach Ihrer Angabe wesentlich durch die Bemerkung abgekürzt, daß dieses n-fache Integral seiner Bedeutung nach eine Invariante ist, daß also auch die Koeffizienten der Entwicklung des Kugelinhaltes nach Potenzen des Kugelradius ϱ orthogonale Invarianten sein werden, und zwar im Besonderen der Koeffizient des zweiten Gliedes unsere Invariante $\sum \alpha_{ik,ik}$ als Faktor enthalten wird, weil sie die einzige nicht verschwindende Invariante ist, die aus den $\alpha_{ik,rs}$ linear zusammengesetzt ist (s. o.). Es wird also genügen ein einziges Glied dieser Invariante, etwa das mit $\alpha_{12,12}$ [7]) behaftete, wirklich auszurechnen. — Das Glied $\alpha_{12,12}\, p_{12}^2$ in ds^2 lautet in Polarkoordinaten $\alpha_{12,12}\, d\varphi^2 r^4 s_3^4 s_4^4 \ldots s_n^4$; es kommt also in der oben angeschriebenen Determinante allein in L_{22} vor und ist dort noch mit dem Faktor $s_3^2 s_4^2 \ldots s_n^2$ behaftet. Wir haben, wenn wir unsere Betrachtung zusammenfassen, für das Volumen V_n einer sehr kleinen n-dimensionalen geodätischen Kugel

$$V_n = \iiint \cdots \int dr\, d\varphi\, d\vartheta_3\, d\vartheta_4 \ldots d\vartheta_n\, r^{n-1} s_3 s_4^2 \ldots s_n^{n-2}$$
$$+ \left\{\sum \alpha_{ik,ik}\right\} \cdot \iiint \cdots \int dr\, d\varphi\, d\vartheta_3\, d\vartheta_4 \ldots d\vartheta_n \frac{r^{n+1}}{2} s_3^3 s_4^4 \ldots s_n^n,$$

wo die Grenzen beider n-fachen Integrale dieselben sind und zwar für r: $0 \ldots \varrho$, für φ: $0 \ldots 2\pi$ und für ϑ_l: $0 \ldots \pi$ ($l = 3, 4 \ldots n$). Bezeichnet man den Wert des Integrals $\int_0^\pi \sin^m \vartheta\, d\vartheta$ zunächst mit S_m, so erhält man:

$$V_n = \frac{\varrho^n}{n} 2\pi S_1 S_2 \ldots S_{n-2} + \left\{\sum \alpha_{ik,ik}\right\} \frac{\varrho^{n-2}}{2(n+2)} 2\pi S_3 S_4 \ldots S_n.$$

Hier ist, wie man aus jeder Formelsammlung entnehmen kann, für gerade m:

$$S_m = S_{2\nu} = \frac{(2\nu-1)(2\nu-3)\ldots 3.1}{2\nu(2\nu-2)\ldots 4.2}\pi,$$

für ungerade m:

$$S_m = S_{2\nu+1} = \frac{2\nu(2\nu-2)\ldots 4.2}{(2\nu+1)(2\nu-1)\ldots 5.3} \cdot 2.$$

In der Formel für V_n ist der Koeffizient von ϱ^n gleich dem In-

7) Für $\alpha_{12,12}$ wird die Rechnung in der Tat am einfachsten.

halt I_n^* der n-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel, der Koeffizient von ϱ^{n+2} für gerade und ungerade n gleich:

$$I_n^* \cdot \frac{n}{2(n+2)} \cdot \frac{S_{n-1} S_n}{S_1 S_2} = I_n^* \cdot \frac{1}{n+2}.$$

Man hat also:

$$V_n = I_n^* \varrho^n + \left\{ \sum \alpha_{ik,ik} \right\} I_n^* \frac{\varrho^{n+2}}{n+2},$$

und hieraus durch Differentation nach ϱ, wenn man mit O_n die Oberfläche einer kleinen n-dimensionalen geodätischen Kugel und mit F_n^* die Oberfläche der Euklidischen Einheitskugel (wo $F_n^* = n I_n^*$ ist) bezeichnet,

$$O_n = F_n^* \varrho^n + \left\{ \sum \alpha_{ik,ik} \right\} F_n^* \frac{\varrho^{n+1}}{n}.$$

Demnach ist, wenn man noch mit I_n bezw. F_n Volumen bezw. Oberfläche einer n-dimensionalen Euklidischen Kugel vom Radius ϱ bezeichnet

$$(4) \qquad \sum \alpha_{ik,ik} = (n+2) . \lim_{\varrho=0} \frac{V_n - I_n}{\varrho^2 I_n} = n \lim_{\varrho=0} \frac{O_n - F_n}{\varrho^2 F_n}.$$

Danach ist also die einfache geometrische Deutung des mittleren Krümmungsmaßes die folgende:

$$\mathfrak{K}^{(n)} = \frac{-6 \sum \alpha_{ik,ik}}{n(n-1)} = \frac{6(n+2)}{n(n-1)} \lim \frac{I_n - V_n}{\varrho^2 I_n} = \frac{6}{n-1} \lim \frac{F_n - O_n}{\varrho^2 F_n}.$$

Es seien noch die Formeln für I_n^* und F_n^* angegeben. Man hat

für gerade $n = 2\nu$ für ungerade $n = 2\nu + 1$

$$I_n^* = \frac{F_n^*}{n} = \frac{\pi^\nu}{1.2.3\ldots\nu}, \quad I_n^* = \frac{F_n^*}{n} = \frac{\pi^\nu}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2\nu+1}{2}}.$$

Sie haben mich ferner darauf aufmerksam gemacht, daß man mit Hilfe Riemann'scher Normalkoordinaten in einfachster Weise zu der von Herglotz (l. c.) gegebenen geometrischen Deutung der in der Einstein'schen Gravitationstheorie in Betracht kommenden Tensoren gelangen kann. Geht man wieder von der zweiten Summe in (1) aus, die sich mit leicht ersichtlicher Änderung der Bezeichnungsweise folgendermaßen schreiben läßt:

$$\sum \alpha_{ik,rs} (\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i)(\xi_r \eta_s - \xi_s \eta_r)$$
$$= \sum \alpha_{ik\ rs} (\xi_i \xi_r \eta_k \eta_s + \xi_k \xi_s \eta_i \eta_r - \xi_i \xi_s \eta_k \eta_r - \xi_k \xi_r \eta_i \eta_s),$$

so erhält man, indem man $\xi_i \xi_r$ durch die kogrediente Größe $\frac{D_{ir}}{D}$ ersetzt, wo D und D_{ir} Determinante und Unterdeterminante des Linienelementes in O: $ds^2 = \sum \eta_i^2$ sind, eine „Streckeninvariante"

$$\sum k_{ik} \eta_i \eta_k = \eta_1^2 (\alpha_{12,\,12} + \alpha_{13,\,13} + \cdots + \alpha_{1n,\,1n}) + \eta_2^2 (\ldots) + \cdots + \eta_n^2 (\ldots)$$
$$+ 2 \eta_1 \eta_2 (\alpha_{13,\,23} + \alpha_{14,\,24} + \quad + \alpha_{1n,\,1n}) + 2 \eta_1 \eta_3 (\ldots) + \cdots + 2 \eta_{n-1} \eta_n (\ldots),$$

die man als Definition eines symmetrischen Tensors von $\frac{n(n+1)}{2}$ Komponenten ansehen muß. Verfährt man analog mit $\sum p_{ik}^2$, so erhält man durch dieselbe Änderung der Bezeichnungsweise

$$\sum (\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i)^2 = \sum (\xi_i^2 \eta_k^2 - 2 \xi_i \xi_k \eta_i \eta_k + \xi_k^2 \eta_i^2)$$

und daraus nach demselben Verfahren wie oben

$$(n-1) \sum d\eta_i^2, \text{ also offenbar } (n-1) . ds^2.$$

Wir haben demnach, wenn wir noch den Faktor -3 berücksichtigen aus $\mathfrak{K}^{(n)}$ (Formel (2)) die „Richtungsinvariante":

$$k_{ds}^{(n)} = - \frac{3 \sum k_{ik} \eta_i \eta_k}{(n-1) ds^2} \quad (5)$$ [8]

abgeleitet. Nun wird diese Invariante speziell für

$$\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_{n-1} = 0$$

gebildet:

$$\frac{-3(\alpha_{1n,\,1n} + \alpha_{2n,\,2n} + \cdots + \alpha_{n-1,\,n;\,n-1,\,n})}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} - 3 \alpha_{in,\,in}}{n-1}$$

und dies ist der Mittelwert der $(n-1)$ Krümmungsmaße der $(n-1)$ zu einander senkrechten Flächen, die durch die η_n-Axe und je eine der übrigen Axen unseres n-Beines bestimmt werden. Dies ist der erste Satz von Herglotz.

Ferner setzen wir mit Herglotz:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in,\,in} = \sum_1^n \alpha_{ik,\,ik} - \sum_1^{n-1} \alpha_{ik,\,ik}.$$

8) Für ein Linienelement $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$ lautet diese Formel:

$$k_{ds}^{(n)} = - \tfrac{1}{2} \frac{\sum_{ik} \left(dx_i dx_k . \sum_{rs} (ir, ks) \frac{A_{rs}}{A} \right)}{(n-1) \sum a_{ik} dx_i dx_k}.$$

Hier ist die erste Summe rechts bis auf einen Zahlenfaktor das mittlere Krümmungsmaß des n-dimensionalen Raumes und die zweite Summe rechts bis auf einen andern Zahlenfaktor das mittlere Krümmungsmaß des $(n-1)$-dimensionalen zum Vektor $ds = \eta_n$ orthogonalen geodätischen Unterraumes. Man hat mit Formel (3):

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in,\,in} = -\frac{n(n-1)}{6}\,\mathfrak{K}^{(n)} + \frac{(n-1)(n-2)}{6}\,\mathfrak{K}_{ds}^{(n-1)}$$

und allgemein für die Richtungsinvariante (5) die geometrische Deutung:

$$k_{ds}^{(n)} = \frac{n}{2}\,\mathfrak{K}^{(n)} - \frac{n-2}{2}\,\mathfrak{K}_{ds}^{(n-1)},$$

wo $\mathfrak{K}_{ds}^{(n-1)}$ das mittlere Krümmungsmaß des zu ds orthogonalen Unterraumes bedeutet. Dies ist der zweite Satz von Herglotz. Die Rechnung ergibt, wenn man den Wert von (5) einführt:

$$6) \qquad \mathfrak{K}_{ds}^{(n-1)} = \frac{2}{n-2}\,\mathfrak{K}^{(n)} + \frac{6\sum k_{ik}\,\eta_i\,\eta_k}{(n-1)(n-2)\,ds^2} = \frac{\sum G'_{ik}\,\eta_i\,\eta_k}{ds^2},$$

wo $$G'_{ik} = \frac{1}{n-2}\left(n\,\mathfrak{K}^{(n)}\,\delta_{ik} + \frac{6\,k_{ik}}{n-1}\right)$$ [9])

und $$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = k \\ 0 \text{ für } i \neq k. \end{cases}$$

Die Größen G'_{ik} definieren einen besonders wichtigen Tensor. Beschränken wir uns nämlich auf den Fall $n = 4$. Wir bemerken zunächst: $12\,\mathfrak{K}^{(4)}$ ist identisch mit $-K$ in der Hilbert'schen Bezeichnungsweise (l. c.). Ferner ist $3\,k_{ik}$ der in Riemann'schen Normalkoordinaten gebildete Ausdruck für das Hilbert'sche K_{ik} und $-3\,G'_{ik}$ der in Riemann'schen Normalkoordinaten gebildete Ausdruck für den von Hilbert gewählten Gravitationstensor

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\,[\sqrt{g}\,K]_{ik}.$$ [10])

---

9) Für das Linienelement $ds^2 = \sum a_{ik}\,dx_i\,dx_k$ wird:

$$G'_{ik} = \frac{n}{n-2}\,\mathfrak{K}^{(n)}\,a_{ik} + \frac{1}{(n-1)(n-2)}\cdot\sum_{rs}(ir,\,ks)\,\frac{A_{rs}}{A}.$$

10) Man findet diese Beziehungen am einfachsten, indem man auf die Formel (14) der Herglotz'schen Abhandlung (l. c.) zurückgreift und feststellt daß sich:

Seine Komponenten lauten also in Riemann'schen Normalkoordinaten:

$$-6\,\mathfrak{R}^{(4)}\,\delta_{ik} - 3\,k_{ik},$$

wo k_{ik} die Koeffizienten von

$$\begin{aligned}\eta_1^2(\alpha_{12,12} + \alpha_{13,13} + \alpha_{14,14}) + \eta_2^2(\alpha_{12,12} + \alpha_{23,23} + \alpha_{24,24}) \\ + \eta_3^2(\alpha_{13,13} + \alpha_{23,23} + \alpha_{34,34}) + \eta_4^2(\alpha_{14,14} + \alpha_{24,24} + \alpha_{34,34}) \\ + 2\,\eta_1\,\eta_2\,(\alpha_{13,23} + \alpha_{14,24}) + 2\,\eta_1\,\eta_3\,(\alpha_{12,32} + \alpha_{14,34}) \\ + 2\,\eta_1\,\eta_4\,(\alpha_{12,42} + \alpha_{13,43}) + 2\,\eta_2\,\eta_3\,(\alpha_{21,31} + \alpha_{24,34}) \\ + 2\,\eta_3\,\eta_4\,(\alpha_{21,41} + \alpha_{23,43}) + 2\,\eta_3\,\eta_4\,(\alpha_{31,41} + \alpha_{32,42})\end{aligned}$$

sind. Es sei noch bemerkt, daß

$$k_{ds}^{(4)} = 2\,\mathfrak{R}^{(4)} - \mathfrak{R}_{ds}^{(3)} \text{ ist.}$$

$$\frac{-3\sum k_{ik}\,\eta_i\,\eta_k}{\sum \eta_i^2} \text{ und das Herglotz'sche } \frac{\sum K_{ik}\,\xi_i\,\xi_k}{\sum g_{ik}\,\xi_i\,\xi_k}$$

genau entsprechen. Ferner sind die Größen K, K_{ik}, G_{ik} bei Herglotz mit den Größen $-K$, $-K_{ik}$, $-\frac{1}{\sqrt{g}}[\sqrt{g}\,K]_{ik}$ bei Hilbert identisch.

Dresden, am 18. September 1917.

Über die galvanischen Spannungen der Legierungen.

Von

G. Tammann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 21. Dezember 1917.

Die Existenz chemischer Resistenzgrenzen in Mischkristallreihen läßt vermuten, daß Resistenzgrenzen auch für die galvanische Polarisation von Mischkristallreihen bestehen werden. Die Richtigkeit dieser Vermutung konnte schon früher[1]) erwiesen werden. Es war aber erwünscht die Frage nach der Abhängigkeit der Spannungen der Legierungen von ihrer Zusammensetzung weiter zu verfolgen, denn die thermodynamische Theorie dieser Spannungslinien steht in offenbarem Gegensatz zur Existenz galvanischer Resistenzgrenzen. Diese Theorie kann natürlich nur dann angewandt werden, wenn die metallische Phase mit dem Elektrolyten im Gleichgewicht sich befindet, oder wenn auch in der metallischen Phase der Platzwechsel beider Atomarten für die Herstellung einer bestimmten Konzentration hinreichend lebhaft ist. Diese Bedingung ist aber bei Temperaturen, bei denen chemische Resistenzgrenzen auftreten, nicht erfüllt, und es entsteht die Frage nach den Regeln, die in diesem Temperaturgebiete für die Spannungslinien von Mischkristall- und Legierungsreihen gelten.

Mit einer kurzen Darstellung der thermodynamischen Theorie soll begonnen werden, ihr folgen Angaben über das elektrometrische und galvanische Verhalten der Ag Au-Mischkristalle und Vergleiche der Spannungslinien mit dem Feingefüge von Legierungsreihen und schließlich Hinweise auf die atomistische Theorie der Spannungslinien.

---

1) Nachrichten d. Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1916, S. 19

Die Bedingungen des Gleichgewichtes einer binären, homogenen, metallischen Mischung mit einem Elektrolyten, der beide Metalle als Jonen enthält, sind von W. Nernst[1]) in Form von Gleichungen angegeben und von Reinders[2]) sind diese Gleichungen graphisch interpretiert worden.

Die Spannung eines Metalls in einer Lösung, in der seine Lösungstension P und der osmotische Druck seiner Jonen p ist, ergibt sich bekanntlich, wenn n die Wertigkeit der Jonen, R die Gaskonstante, F die Ladung eines gr-Aequivalents der Jonen und T die absolute Temperatur bedeuten, zu:

$$\pi = \frac{RT}{nF} ln \frac{P}{p}.$$

Wenn an einer zwei Metalle enthaltenden Elektrode Gleichgewicht herrscht, so müssen die osmotischen Arbeiten des Transports der einen Jonenart in die Lösung und der anderen in die metallische Mischung pro Mol einander aufheben, es gilt also:

1) $$\pi = \frac{RT}{n_1F} ln \frac{P_1}{p_1} = \frac{RT}{n_2F} ln \frac{P_2}{p_2}.$$

Hier bezeichnen P_1 und P_2 die partiellen Lösungstensionen beider Metalle in der metallischen Mischung, p_1 und p_2 die partiellen osmotischen Drucke beider Jonenarten im Elektrolyten.

Wenn beide Jonenarten einwertig sind, also $n_1 = n_2 = 1$, so ist:

2) $$\pi = \frac{RT}{F} ln \frac{P_2}{P_1} = \frac{RT}{F} ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Die partiellen Lösungstensionen beider Metalle in ihrer Mischung werden sich wie die osmotischen Drucke beider Jonenarten verhalten.

Die Spannung der binären metallischen Mischung hängt also vom Verhältnis der partiellen Lösungstensionen und vom Verhältnis der Jonenkonzentrationen im Elektrolyten ab und wird für eine bestimmte Konzentration der einen der beiden Jonenarten durch zwei Kurven dargestellt. Die eine derselben gibt die Spannung in Abhängigkeit vom Molenbruch der metallischen Mischung $\pi = f(x_m)$, die andere in Abhängigkeit vom Molenbruch des Elektrolyten $\pi = \varphi(x_e)$. Wenn es sich um Gleichgewichte der Le-

1) Zeitschr. f. phys. Chemie, 22, S. 539, 1897.
2) Zeitschr. f. phys. Chemie, 42, S. 225. 1903.

gierung mit zwei Jonenarten handelt, die in einem dritten Stoff gelöst sind, so gilt je ein Paar beider Kurvenarten für die willkürlich variabele Konzentration der einen Jonenart. Wenn es sich um die Mischungen zweier Elektrolyte, z. B. zwei geschmolzene Salze handelt, so fällt diese Veränderlichkeit fort, da die Konzentrationen beider Jonenarten dann bestimmte sind.

Um zu einer angenäherten Form dieser Kurven zu kommen, muß entweder für die Abhängigkeit von P_1 und P_2 von x_m oder für die von p_1 und p von x_e eine Annahme gemacht werden. Nimmt man an, daß für die Abhängigkeit der partiellen Lösungstensionen von x_m die Gesetze der Dampfdruckerniedrigung gelten, und daß die osmotischen Drucke p_1 und p_2 proportional x_e und $1 - x_e$ sind, so kann man schreiben: $P_1 = (P_1)(1 - x_m)$ und $P_2 = (P_2)x_m$, wo (P_1) und (P_2) die Lösungstensionen der beiden Metalle bezeichnen. Dann ergibt sich:

$$3) \qquad \frac{P_2}{P_1} = \frac{(P_2)x_m}{(P_1)(1 - x_m)} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{x_e}{1 - x_e}.$$

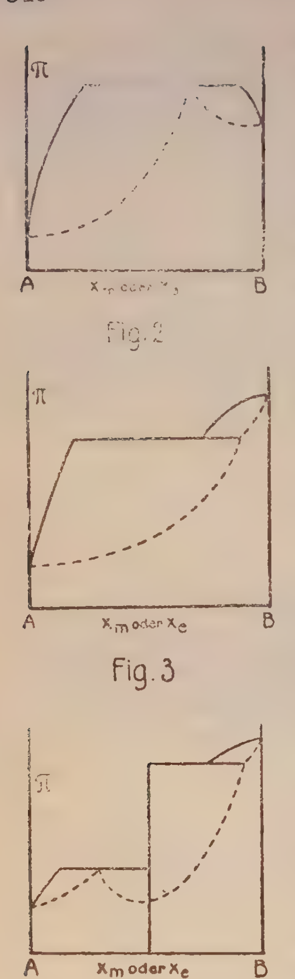
Beziehen sich P_2, x_m, p_2 und x_e auf das unedlere Metall mit der größeren Lösungstension, so wird in der Regel P_2 gegen P_1 sehr groß sein und daher wird zuerst mit x_m die Spannung

$$\pi = RT\,ln\,\frac{(P_2)}{(P_1)} \cdot \frac{x_m}{1 - x_m}$$

sehr schnell und schließlich langsamer wachsen. Für die Kurven $\pi = \varphi(x_e)$ folgt aus 3), daß mit x_e der Quotient $\frac{x_e}{1 - x_e} = \frac{p_2}{p_1}$ und in gleicher Weise die Spannung $\pi = \frac{RT}{F}\,ln\,\frac{p_2}{p_1}$ zuerst langsam dann sehr rasch wächst. Fig. 1 stellt für eine lückenlose Mischkristallreihe die beiden Kurven $\pi = f(x_m)$ und $\pi = \varphi(x_e)$ dar. Die $\varphi(x_e)$ Kurve ist hier wie in den folgenden Diagrammen gestrichelt.

Fig. 1.

Tritt eine Mischungslücke in der Reihe der Mischkristalle auf, so werden die Spannungen der beiden gesättigten Mischkristalle einander gleich sein, und alle aus ihnen bestehenden Konglomerate werden dieselbe Spannung haben. Die Spannung der beiden gesättigten Mischkristalle kann größer aber auch kleiner sein als die des unedleren Me-



talls. Im ersten Falle würde das Diagramm Fig. 2, im zweiten das der Fig. 3 gelten.

Geben die beiden Metalle eine Verbindung, die praktisch keine Mischkristalle mit ihren beiden Bestandteilen bildet, so tritt auf der $f(x_m)$-Linie ein Spannungssprung bei der Zusammensetzung der Verbindung auf, und auf der $\varphi(x_e)$-Linie ein Minimum, wenn $x_m = x_e$ wird. Fig. 4.

Aus den Diagrammen ergibt sich für jede Spannung π die Zusammensetzung der Legierung, x_m und die des Elektrolyten, x_e, die sich im Gleichgewicht befinden. Abscheidung und Auflösung der Legierungen gehen vor sich, je nachdem die Spannung größer oder kleiner als die Gleichgewichtsspannung ist. Legt man durch den betreffenden π-Wert eine Parallele zur x-Achse, so geben die Abscissen ihrer Schnittpunkte mit den $f(x_m)$- und $\varphi(x_e)$-Linien die gesuchten Konzentrationen.

Die Koordinaten der $f(x_m)$-Linien sind leicht zu bestimmen, wenn die Gleichgewichtsspannung sich von selbst herstellt, schwieriger ist die Bestimmung der $\varphi(x_e)$-Linien.

Legierungsreihen, auf die sich die thermodynamische Theorie anwenden läßt, scheinen bisher nur zwei vollständig untersuch- zu sein. Die der Cd-Hg-Legierungen von Bijl[1]), für die Bijl auch das Zustandsdiagramm ausgearbeitet hat, und die der Ag-Hg-Amalgame von Reinders[2]), für die das Zustandsdiagramm leider fehlt.

In Übereinstimmuug mit der Theorie hat sich ergeben:

1. Die Spannungslinien $f(x_m)$ einer Mischkristallreihe sind kontinuierliche Kurven, die, wie die Theorie es fordert bei den edelsten Legierungen schnell und langsam bei den unedelsten ansteigen.

2. Die aus zwei Kristallarten bestehenden Legierungen haben eine von ihrer Gesamtzusammensetzung unabhängige Spannung.

1) Zeitschr. f. phys. Chemie, 41, S. 641, 1902.
2) Zeitschr. f. phys. Chemie, 54, S. 609, 1907.

3. Sprünge in den Spannungen treten bei Zusammensetzungen von Kristallarten auf, deren Zusammensetzung singulären Punkten der Konzentrationsachse entspricht.

Diese Theorie gilt aber nur für reversibele Gleichgewichte, und diese bestehen nur dann, wenn die beiden Atomarten der metallischen Kristalle ihre Plätze wechseln.

Im Temperaturgebiet von $t = 0$ bis 100^0 wird diese Theorie wohl nur auf Amalgame und die Legierungen anderer besonders leicht schmelzenden Metalle anwendbar sein. Für den größten Teil der metallischen Körper ist ihre Anwendbarkeit in Frage gestellt, weil aus dem Auftreten von Resistenzgrenzen in Mischkristallreihen höher schmelzender Metalle folgt, daß in den betreffenden Mischkristallen ein merklicher Platzwechsel der Atome nicht stattfindet.

Untersuchung der Ag-Au-Mischkristalle mit dem Elektrometer.

Im Element: Ag | 0.02 $AgNO_3$ | 0.1 KNO_3 | 0.01 $AuCl_3$ | Au läd sich das Ag sehr schwach negativ auf. Würden beide Metalle in diesem Element mit den Jonen der Salze, in deren Lösungen sie tauchen, im Gleichgewichte sein, so wäre eine Spannung von $+1.5 - 0.80 = 0.70$ Volt zu erwarten, man beobachtet aber mit dem Quadrantenelektrometer nur eine Spannung von 0.0119 Volt bei 14^0. Hieraus folgt, daß die am Elektrometer durch dieses Element bewirkte Aufladung nicht dadurch bedingt wird, daß Ag in Lösung geht und Au gefällt wird. Der die Spannung verursachende Vorgang beruht wahrscheinlich auf einem Reduktionsprozeß der Sauerstoffbeladungen beider Elektroden. Allerdings tritt nach Kurzschluß des Elementes die Auflösung des Ag und die Fällung des Au ein, die nach 24 Stunden sich durch eine Braunfärbung der Au-Elektrode kundgibt, aber die Spannung des offenen Elementes entspricht nicht der Spannung dieser Reaktion. Mißt man seine Spannung, nachdem das Element 48 Stunden kurz geschlossen war, so findet man sie ein wenig erhöht zu 0.0176 Volt.

Die Spannung des offenen Elementes ist eine ganz bestimmte. Ersetzt man die Ag-Elektrode durch verschiedene Ag-Au-Legierungen, so hängen die Spannungen dieser Elemente von der Vorbehandlung der Elektroden ab und sie schwanken zwischen der Spannung des Ag und der Spannung Null, die man beobachtet, wenn man das Silberblech im Element durch ein Au-Blech ersetzt.

Bei den folgenden Messungen war der eine Pol des Elementes mit der Erde verbunden, der andere Pol mit dem einen Quadrantenpaar des Elektrometers, dessen anderes Paar ebenfalls geerdet war. Die Nadel des Elektrometers war auf etwa 100 Volt geladen. Ein Teilstrich des gesamten, bei Kommutieren beobachteten Ausschlages entsprach 0.000926 Volt. Mit diesem Faktor sind die folgenden Ausschläge zu multiplizieren, um die Spannungen der Elemente nach Ersatz des Ag durch Ag-Au-Legierungen zu erhalten.

Die Legierungen waren aus genau abgewogenen Mengen von Ag und Au im Graphitrohr hergestellt, nach ihrer Kristallisation je 1 Stunde lang auf 900° erhitzt, darauf gewalzt und wieder 14 Stunden auf 900° erhitzt. Da diese Plättchen längere Zeit gelegen hatten, wurden sie nochmals 4 Stunden auf 850° erhitzt, um ihnen die natürliche Oberfläche zu geben. Beim Eintauchen dieser Plättchen von 0.83 bis 0.26 Mol Au wurde, ausgenommen die in Form von Draht untersuchte Legierung mit 0.62 Mol Au, zuerst eine der Ag-Spannung (13 Skalenteilen) naheliegende beobachtet, die im Laufe von 5 Minuten auf 3—4 Skalenteile abfiel. Nachdem die Plättchen, jedes gesondert, 18 Stunden in einer 0.02 n. $AgNO_3$-Lösung gelegen waren, zeigten die mit mehr als 0.5 Mol Au unbestimmte Spannungen von 4 bis 8 Skalenteilen, während die Au-ärmeren Plättchen die Ag-Spannung (12.9 bis 10.0 Skalenteile) zeigten. In destilliertem Wasser erhielt sich die Ag-Spannung noch nach 24stündiger Einwirkung. Die Spannungen sind sogar ein wenig größer als beim ersten Eintauchen in die $AgNO_3$-Lösung und auch die Au-reicheren Plättchen zeigten ausgesprochen die Ag-Spannung, nur der Draht mit 0.62 Mol Au blieb auf kleinerer Spannung (3—4 Skalenteile). Auch in normaler Salpetersäure von 13° blieben jedenfalls 20 Minuten lang diese Spannungen erhalten. Kocht man aber die Legierungen mit einer 20 % Salpetersäure auf, so verschwindet ihre Spannung gegen die Au-Elektrode. Durch Abschmirgeln kann die Silberspannung wieder hergestellt werden, und durch kurzes Glühen nimmt sie wieder ab.

Diese Versuche sind in umstehender Tabelle zusammengestellt.

Stellt man sich die das 14 Punkt-Gitter besetzenden Au- und Ag-Atome so weit unbeweglich vor, daß sie ihre Plätze mit einander nicht vertauschen können, so sind die Resultate dieser Versuche zu erwarten. Durch Kochen mit Salpetersäure werden die Ag-Atome der Oberfläche entfernt und die Oberfläche verhält sich dann wie die des Goldes. Bei dieser Behandlung wird die Farbe der Legierungen von 0.83 bis 0.45 Mol. Au nicht merklich verän-

Legierungen mit natürlichen Oberflächen in 0.02 Ag NO$_3$ Lösung getaucht		18 Stunden in 0.02 Ag NO$_3$ Lösung	24 Stunden in destilliertem Wasser	20 Min. in normaler Salpetersäure	mit 20 % Salpetersäure aufgekocht nach 10 Min.	abgeschmirgelt		schwach geglüht	mit 20 % Salpetersäure aufgekocht nach 1 Minute
nach 1 Min.	nach 5 Min.					erstes Mal	zweites Mal		
0.0	0.0	0.0	9 → 5						
7.0	2.9	10.5	14.0	14.9	0.0	7.8	9.5	6.0	0.0
3.0	1.0	4.7	4.0		0.0	2.6	9.8	0.0	0.1
10.0	4.2	9.1	13.2	13.8	0.0	12.5	13.3	3.0	0.1
11.0	3.8	10.1	12.1	9.0	0.0	10.0	12.7	4.0	—0.4
9.0	2.8	10.0	13.1	11.6					1.2
10 2	3.5	12.0	13.1	13.3					2.0
11.8	5.2	12.9	13.2	14.3					0.2
12.9	12.9	12.9	13.0	13.0					

dert, die Legierungen mit 0.35 und 0.26 Mol Au erhalten aber einen bräunlichen Hauch. Bei der ersten Gruppe bleiben die Au-Atome offenbar im Gitterverbande und nur die Ag-Atome werden aus ihm entfernt, bei der zweiten Gruppe bedeckt sich aber die Oberfläche mit dem feinsten Au-Staub, und diese dünne Schicht erteilt dem Plättchen die Au-Spannung.

Durch Abschmirgeln wird ein Teil der atomistisch vergoldeten Oberfläche fortgeschafft und Ag-Atome kommen wieder an die Oberfläche; man muß schon zweimal abschmirgeln, um die Ag-Spannung fast zu erreichen; kurzes Glühen veredelt dann die Oberfläche.

Unerwartet ist nur das Verhalten der Plättchen mit natürlichen Oberflächen nach längerem Tempern, die beim Eintauchen in die Silberlösung zuerst nahezu die Silberspannung zeigen, die dann aber schnell abnimmt, sich der Goldspannung nähert und schließlich nach 18 Stunden wieder auf die Silberspannung gestiegen ist.

Über die Gründe dieser Erscheinung kann Folgendes gesagt werden.

Bei der Bestimmung der Einwirkungsgrenzen schwefelhaltiger Agentien auf die Ag-Au-Mischkristalle wurde beobachtet, daß die Schwärzungsgeschwindigkeit mit zunehmender Temperzeit stark abnimmt. Hieraus folgt, daß sich beim Tempern eine Schutzschicht auf den Ag-Au-Plättchen bildet. Das Tempern der hier untersuchten Plättchen wurde in demselben Ofen, in dem die Plättchen zur Bestimmung der Schwärzungsgrenzen getempert wurden, vorgenommen, nämlich in einem glasierten Porzellanrohr, umwickelt mit einem Platindraht. Ein aus dem Porzellanrohr sich entwickelnder Dampf ist offenbar an der Bildung der Schutzschicht beteiligt. Die schnelle Abnahme der Spannung beim Eintauchen

der Plättchen mit der Schutzschicht in die Silberlösung deutet auf Entfernung dieser Schutzschicht. Nach ihrer Entfernung in der verdünnten $AgNO_3$-Lösung zeigen die Legierungen die Ag-Spannung.

Wie erwähnt wird durch Entfernen der von Ag-Atomen freien Oberfläche der Ag-Au-Legierungen mit der Goldspannung die Silberspannung hervorgerufen. Nach dem Ziehen eines Drahtes mit 0.83 Mol Au wird also die frische Oberfläche die Silberspannung besitzen. Vernichtet man diese durch Glühen oder durch Aufkochen mit 20 % Salpetersäure, so wird durch Ziehen durch ein Loch des Zieheisens mit der nächst kleineren Stufe (0,01 mm) die Silberspannung wieder erzeugt. Eine merkliche Änderung der Farbe des schon hart gewordenen Drahtes tritt hierbei nicht ein. Besser zu beobachten ist die Farbe eines größeren Plättchen. Die Ag-Au-Plättchen mit 0.52 Mol Au = 66.4 % Au sind im harten Zustande grün-gelb und im weichen weiß-grünlich-gelblich; verdampft man auf diesen Tropfen 20 %iger Salpetersäure, so ist eine Änderung ihrer Färbung nicht wahrzunehmen, obwohl an den betreffenden Stellen die Spannung sich von der des Silbers in die des Goldes geändert haben muß. Die Entfernung der die Silberspannung erzeugenden Ag-Atome aus der Oberfläche ändert also die Farben der weichen und harten Plättchen nicht.

Die Resultate der elektrometrischen Untersuchung der Ag-Au-Mischkristalle lassen sich im Diagramm Figur 5 zusammenfassen. Die Kurve *acb* gibt die Spannungen der Mischkristalle im Element:

$$Ag, Au_x \mid 0.02\ AgNO_3 \mid 0.1\ KNO_3 \mid 0.01\ AuCl_3 \mid Au$$

an, wenn auf ihren Oberflächen die Ag-Atome entfernt sind, und die Kurve *adb*, wenn dieselben noch vorhanden sind. Die beiden Kurven *acb* und *adb* haben die Bedeutung von Grenzkurven, zwischen denen alle Werte für einen gegebenen Wert des gesamten Goldgehaltes möglich sind, je nach dem Au-Gehalt der Oberfläche. Hierdurch unterscheiden sich die Mischkristalle ohne inneren Platzwechsel von denen, deren Oberflächen-Konzentrationen durch inneren Platzwechsel ganz bestimmt sind, und deren Spannungen daher von ihrer Gesamtzusammensetzung in ganz bestimmter Weise abhängen, wenn sie mit ihren beiden Jonenarten des Elektrolyten ins Gleichgewicht gekommen sind. Ändert sich im Falle mangelnden inneren Platzwechsels in der Legierung die Zsammenusetzung des Elektrolyten, so gelangt

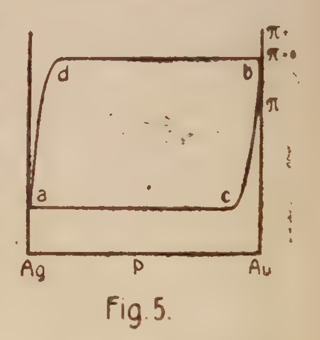


Fig. 5.

man auf zwei neue Grenzkurven, welche den beiden Kurven *acb* und *adb* parallel verlaufen.

Die Polarisationsspannungen der Ag-Au-Mischkristalle.

Bei anodischer Polarisation einer Mischkristallreihe, bestehend aus einer Komponente, die ohne Polarisation in den Elektrolyten treten kann, und einer edlen Komponente, an der vom Strom eine Polarisationsspannung zu überwinden ist, hat man zu erwarten, daß sich die Glieder der Reihe verschieden verhalten werden. Die an der edlen Komponente reicheren Mischkristalle werden sich nach Entfernung der geringen Anzahl unedlerer Atome in ihrer Oberfläche wie das edle Metall verhalten, und die am Edelmetall armen werden sich um so weniger polarisieren, je weniger ihre Oberfläche durch die Polarisation verändert ist.

Polarisiert man anodisch mit wachsender Spannung die Au-Ag-Legierungen, indem man sie gegen ein Ag-Plättchen in einer 0.02 $AgNO_3$ enthaltenden Lösung schaltet, und legt gleich nach Unterbrechung des polarisierenden Stromes an die beiden Elektroden der Zersetzungszelle ein empfindliches Voltmeter an, 1 Skalenteil = 0.0001 Volt, so erkennt man, daß bei einer bestimmten anodischen Polarisation der Polarisationsstrom stark anwächst und sich länger auf merklichen Werten erhält als bei geringerer anodischer Polarisation. Die Polarisationsspannung kann in dieser Weise recht genau bestimmt werden.

Die Art des Aufsuchens der Spannung, bei der eine stärkere anodische Polarisation eintritt, erläutert folgendes Beispiel, das sich auf die Spannung eines gewalzten Goldplättchen gegen ein Silberplättchen in einer Lösung von 0.02 $AgNO_3$ im Liter bei 14° bezieht.

Spannung des polarisierenden Stromes proportional den Stücken des Meßdrahtes	Ausschläge des Voltmeters: 0.0001 Volt		
	gleich nach Anlegen	nach 0.5 Min.	nach 1 Min.
0.475	180	6.0	3.5
0.472	9	0.7	0.2
0.468	3	0.3	0.1
0.470	40	5.0	3.5
0.469	10	2.5	2.0
0.468	1.5	0.5	0.1
0.469	25	5.5	4.0

In der folgenden Tabelle sind für die elektrometrisch unter-

suchten Au-Ag-Legierungen die Spannungen des Auftretens stärkerer Polarisation in einer Lösung von 0.02 $AgNO_3$ und 0.01 Ag_2SO_4 im Liter bei 14° zusammengestellt. Polarisiert wurde jedesmal 15 Sekunden.

Goldgehalt in Mol	Elektrolyt: 0.02 $AgNO_3$		0.01 Ag_2SO_4	
1.00	0.808 ± 0.0008 Volt		0.777 bis	0.820 Volt
0.83	0.808	23	0.794	0.811
0.62	0.808	10	0.794	0.811
0.51	0.806	50	0.794	0.811
0.49	0.706	100	0.759	0.794
0.45	0.582	50	0.733	0.777
0.35	0.045	24	0.086	0.173
0.26	0.091	50	0.086	0.173

Die Spannung, bei der eine merkliche Polarisation der Au-Ag-Legierungen eintritt, ist beim reinen Golde und den Legierungen mit mehr als 0.5 Mol Au innerhalb der Fehlergrenzen der Bestimmungen dieselbe, besonders scharf tritt das bei der Polarisation durch NO_3-Jonen hervor.

Der Gold-Gehalt, bei dem die Polarisationsspannung abnimmt, (0.5 Mol Au) ist von der Wertigkeit des polarisierenden Anions unabhängig, während er bei der Einwirkung chemischer Agentien von der Anzahl der Ag-Atome, die mit einem Molekül des Agens in Wechselwirkung treten, abhängt.

Sinkt der Au-Gehalt unter 0.5 Mol, so sinkt auch die Spannung. Bei diesen Legierungen ist die Spannung in hohem Grade von der Vorbehandlung der Plättchen abhängig. Je schwächer die Polarisation ist und je kürzere Zeit sie dauert, desto kleiner ist die Spannung, bei der merkliche Polarisation eintritt. Durch das anodische Polarisieren bildet sich auf den Oberflächen der Plättchen Goldstaub, der die Spannung erhöht. Daher sind auch die Spannungen in der Ag_2SO_4-Lösung höher als in der $AgNO_3$-Lösung, weil in diesen die Plättchen mit natürlichen Oberflächen untersucht wurden, in jenen wurden sie aber erst untersucht, nachdem sie zuvor stärker polarisiert gewesen waren. Noch höhere Spannungen wurden früher[1]) beobachtet, wnil bei diesen Versuchen je 60 Sekunden lang polarisiert wurde. Wegen der Abhängigkeit der Spannung, bei der die stärkere Polariestion eintritt, von der

1) Nachrichten d. K. G. d. Wiss. zu Göttingen, 1916, S. 220.

Menge unsichtbaren Goldstaubes auf den Plättchen ist auch die Spannung der Legierung mit 0.26 Au größer als die der Legierung mit 0.35. Durch Putzen und Reiben, erst recht durch Abschmirgeln, kann die Spannung der Legierungen mit weniger als 0.5 Mol Au erniedrigt werden.

In der Regel tritt an den noch nicht polarisierten Elektroden merkliche Polarisation bei ein wenig höherer Spannung (0.01 bis 0.003 Volt) ein als an Elektroden, an denen diese Spannung kurz zuvor überschritten wurde. Ganz besonders verhielt sich die Legierung mit 0.45 Mol Au, an der der aktive Polarisationszustand erst eintrat, nachdem die Spannung bis auf 0.8 Volt gesteigert war. Dann zeigte das betreffende Plättchen gegen Ag in 0.02 $AgNO_3$-Lösung an einem Voltmeter von 400 Ohm Widerstand zwei Stunden lang die Spannung von 0.05 Volt, während die anderen Legierungen schon nach einer Minute Spannungen von höchstens 0.0002 Volt hatten. Nachdem das Plättchen mit 0.45 Au zwei Stunden in jenem aktiven Zustand verblieben war, verlor es denselben im Laufe einer Stunde, in der seine Spannung von 0.018 bis auf 0.0001 Volt sank.

Die beobachtete Polarisationsspannung von 0.78 bis 0.81 Volt sollte übereinstimmen mit der Differenz der Spannungen, unter denen Au und Ag als einwertige Jonen in Lösung gehn. Nach früheren[1]) Bestimmungen ergab sich die Spannung des Au gegen Ag bei der Polarisation des Au mit NO_3- und SO_4-Jonen zu 0.73 Volt, während sich nach der Tabelle[2]) der Lösungsspannung der Metalle diese Spannung zu $1.50 - 0.80 = 0.70$ Volt berechnet. Die Spannung des Au gegen Cu bei der Au-Polarisation mit SO_4-Jonen ergab sich zu 1.42 und mit NO_3-Jonen zu 1.41 Volt, während sich diese Spannung zu $1.50 - 0.34 = 1.16$ Volt berechnet. Die Polarisationsspannung des Au hängt also von Faktoren ab, über die wir uns noch nicht Rechenschaft geben können.

Für unsere Zwecke ist diese Unsicherheit nicht von Belang. Denn bei allen Bestimmungen des Au und seiner Legierungen mit Ag und Cu mit mehr als 0.5 Mol Au ergab sich, daß nach Polarisation unter gleichen Bedingungen die Spannungen dieser Legierungen von der des Au sich nur innerhalb der Fehlergrenzen der Bestimmungen unterscheiden. Durch die neuen Bestimmungen wird der Au-Gehalt, bis zu dem in den Ag-Au-Legierungen die Au-Spannung besteht zwischen 0.49 und 0.51 Mol Au festgelegt.

Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1916, S.220.

2) Abhandlungen der Bunsen-Ges., N. 5, 1911, Übersichtstabelle.

Diese galvanische Resistenzgrenze stimmt überein mit der chemischen Resistenzgrenze g_1, bis zu der die Ag-Au- und Cu-Au-Mischkristalle nicht merkliche Mengen von Ag oder Cu an kochende Salpetersäure abgeben.

Ferner fällen diese beiden Mischkristallreihen von 0.5 bis 1.0 Mol Au weder Au aus einer Lösung von Goldchlorid noch reduzieren sie Übermangansäure, während die Au-ärmeren Mischkristalle beide Reaktionen bewirken.

Die galvanische Resistenzgrenze der beiden Mischkristallreihen stimmt also mit einer ihrer chemischen überein und zwar mit der für einfache chemische Agentien. Die galvanische Grenze ist aber von der Wertigkeit der polarisierenden Jonen unabhängig und unterscheidet sich in dieser Hinsicht von den chemischen Grenzen, bei denen die Wertigkeit des Agens eine Rolle spielt. In Analogie mit den chemischen Grenzen wäre zu erwarten gewesen, daß das einwertige NO_3-Jon bis zur Grenze einfacher Agentien (0.5 Mol Au) und das zweiwertige SO_4-Jon bis zur Grenze zweifacher Agentien (0.25 Mol Au) wirken würden, beide Jonen wirken aber bis zur Grenze 0.5 Mol Au. Auf diesen Unterschied in der Einwirkung chemischer und galvanischer Agentien wird noch zurückzukommen sein.

Wenn ein hinreichender Platzwechsel der beiden Atomarten in den Gittern einer Mischkristallreihe nicht stattfindet, so verhält sich die Spannung des resistenten Teils dieser Mischkristallreihe wie die eines Konglomerates bestehend aus zwei Kristallarten, das ebenfalls eine von seiner Gesamtzusammensetzung unabhängige Spannung aufweist. An der galvanischen Resistenzgrenze einer Mischkristallreihe tritt bei abnehmender Konzentration des edleren Bestandteils ein schneller Abfall der Spannung ein, ähnlich wie bei der Zusammensetzung einer singulären Kristallart in einer Reihe von Konglomeraten die Spannung sich diskontinuierlich ändert. Wenn also die Struktur einer Reihe metallischer Konglomerate nicht bekannt ist, so kann die Spannungslinie in Abhängigkeit von der Zusammensetzung der Konglomerate uns keinen Aufschluß darüber geben, ob das Konglomerat in Konzentrationsgebieten, in denen die Spannung von der Konzentration unabhängig ist, aus einer oder aus zwei Kristallarten besteht, und ebenso wenig darf man aus dem Auftreten einer plötzlichen Spannungsänderung bei sich ändernder Konzentration den Schluß auf die Existenz einer neuen Kristallart ziehen. Diese Schlüsse sind nur dann zu ziehen, wenn die metallischen Konglomerate bei einer Temperatur untersucht werden, bei der sich zwischen ihnen und dem Elektrolyten

ein reversibles Gleichgewicht herstellt. Die Bedingung hierfür ist aber hinreichender atomistischer Platzwechsel in den Gittern der die Konglomerate zusammensetzenden Kristallarten. Diese Bedingung ist aber, wie wir sehen werden, bei den meisten Legierungen bei Zimmertemperatur nicht erfüllt. Daher sind die Schlüsse, die man aus den Spannungslinien in Abhängigkeit von der Zusammensetzung der Legierungen bisher gezogen hat nicht ohne Kontrolle auf anderen Wegen anzunehmen.

Bevor wir auf die vorliegenden Spannungslinien von Legierungen in Abhängigkeit von ihrer Zusammensetzung näher eingehen, ist noch an unserem Beispiel, den Ag-Au-Legierungen zu zeigen, daß bei hinreichend hoher Temperatur sich wirkliche Gleichgewichte zwischen diesen Mischkristallen und ihren Elektrolyten von selbst einstellen.

Die Spannungen der Ag-Au-Mischkristalle bei höheren Temperaturen.

Nach früher mitgeteilten Versuchen liegt die Einwirkungsgrenze schwacher Oxydationsmittel auf die Cu-Au-Mischkristalle bei Zimmertemperatur ein wenig unter 0.25 Mol Au, aber schon bei 120° wird diese Grenze von dem auf sie wirkenden Luftsauerstoff weit überschritten. Bei 180° entstehen auch auf einem Plättchen mit 0.97 Au Anlauffarben, die schon nach zwei Tagen sichtbar werden. Das Entstehen von Anlauffarben bei der Einwirkung von Luftsauerstoff ist wohl das am bequemsten zu beobachtende Kennzeichen für den Beginn des Platzwechsels in den Gittern einer Mischkristallreihe. Entsprechend diesen Erfahrungen wäre in der ganz analogen Ag-Au-Mischkristallreihe ebenfalls ein merklicher Platzwechsel bei Temperaturen über 100° zu erwarten. Dementsprechend sollten galvanische Elemente mit einer Au-Elektrode gegen Elektroden aus Au-Ag-Legierungen bei Temperaturen über 100° Spannungen ergeben, die sich mit dem Au-Gehalt der Legierungen kontinuierlich ändern.

Um diese Vermutung zu prüfen wurden folgende Elemente gebaut. In geschmolzenes $AgNO_3$, in das ein Ag-Plättchen tauchte, wurde ein Probierglas mit einer Schmelze gebracht, enthaltend 10 % $AuCl_3$, 45 % $NaNO_3$ und 45 % KNO_3, in der sich cin Au-Plättchen befand. Ungeachtet des großen Widerstandes der Glaswand des Probiergläschens lud sich das Quadranten-Elektrometer sofort auf. Die Spannung der Elemente

$$^{-}AgAu_x \mid AgNO_3 \mid Glas \mid NaNO_3\,KNO_3\,AuCl_3 \mid Au^{+}$$

wächst zwischen 220° und 320° stark mit der Temperatur, mit der Zeit nimmt sie bei unveränderter Temperatur zuerst schnell und dann langsam ab, wobei sich reichliche Mengen Au abscheiden. Nach 12stündigem Erhitzen der Au-haltigen Mischung auf 320° enthält die Mischung noch 4.6 % Au und in diesem Zustande änderte sich die Spannung des Elementes mit dieser Mischung nicht mehr merklich mit der Zeit.

Bei 250° änderten sich die Elektrometer-Ausschläge unregelmäßig mit der Zeit und eine regelmäßige Abhängigkeit derselben vom Au-Gehalt der Legierungen war nicht zu erkennen. Bei 320° waren diese Ausschläge unabhängig von der Zeit und änderten sich mit dem Au-Gehalt regelmäßig. Dieselben sind in folgender Tabelle zusammengestellt; multipliziert man sie mit 0.00227, so erhält man die Spannungen in Volt.

Au-Gehalt in Mol	1.00	0.94	0.83	0.62	0.49	0.45	0.26	0.00
Elektrometer-Ausschläge	245	250	265	271	280	281	290	306

Man ersieht, daß die Spannung bei 320° nicht mehr wie bei Zimmertemperatur unabhängig vom Au-Gehalt der Legierungen ist, sondern mit abnehmendem Au-Gehalt deutlich wächst, auch hängt bei 320° die Spannung von der Vorbehandlung der Ag-Au-Plättchen nicht mehr ab. Nach Behandeln mit heißer Salpetersäure zeigten die Ag-Au-Legierungen mit mehr als 0.5 Mol bei Zimmertemperatur die Spannung des Au, bei 320° zeigten sie nach dieser Vorbehandlung die ihnen eigentümlichen Spannungen. Bei dieser Temperatur ist die Diffusion beider Atomarten, ihr Platzwechsel im Gitter, so lebhaft, daß sich in ganz kurzer Zeit in den Oberflächen die Konzentration des Inneren wieder herstellt.

An sehr kleinen Oberflächen könnte der beginnende Platzwechsel der Ag- und Au-Atome sich durch Spannungsschwankungen bemerkbar machen. Beobachtungen in dieser Richtung würden Aufschluß über die Art und Weise der Diffusion in Kristallgittern erbringen.

Die Spannungslinien einiger Legierungsreihen im Vergleich mit ihren Zustandsdiagrammen.

Vergleicht man diese Linien mit der Feinstruktur der betreffenden Legierungen, die auf Grund der thermischen Analyse und der mikroskopischen Untersuchung festgestellt wurde, so wird man sehen, daß, wenn in der Legierungsreihe hinreichende Diffusion vorhanden ist, die Spannung einer Mischkristallreihe sich mit ihrer Zusammensetzung kontinuierlich ändert, und die Spannungen einer

Legierungsreihe mit zwei Kristallarten unabhängig von der Zusammensetzung ist (Cd-Amalgame). Wenn aber die Diffusion eine nicht hinreichende ist, um bestimmte Konzentrationen an der Oberfläche der Mischkristalle herzustellen, so ist die Spannung entweder unabhängig von der Konzentration, oder sie ändert sich sehr stark, beginnend bei einer Zusammensetzung, die multiplen Proportionen entspricht. Diese Mischkristalle hat Puschin als chemische Verbindungen angesprochen, weil bei Zusammensetzungen, die multiplen Proportionen entsprechen, starke Änderungen der Spannungslinie auftreten. Darauf, daß sie in Mischkristallreihen auftreten, ist von ihm nicht hingewiesen worden, es kam ihm darauf an zu zeigen, daß die Spannungslinien die Existenz von Verbindungen enthüllen, welche die thermische Analyse nicht festzustellen vermag. Die Widersprüche, in die man sich verwickelt, wenn man diesen Standpunkt einnimmt, werden durch die Erkenntnis der Existenz von chemischen und galvanischen Resistenzgrenzen in Mischkristallreihen beseitigt. Durch den Vergleich der Spannungslinien mit dem Feingefüge werden einige weitere galvanische Resistenzgrenzen in Mischkristallen festgestellt werden. Außerdem wird man erkennen, wie wenig geeignet die Spannungslinien zu dem Zwecke sind, zu dem sie von einer Reihe von Beobachtern bestimmt wurden, nämlich um durch sie zu einer von der thermischen und mikroskopischen Methode unabhängigen Untersuchungsmethode der Legierungen zu gelangen. Das gilt so lange bei relativ tiefen Temperaturen die Legierungen nicht im Gleichgewichte mit dem Elektrolyten wegen mangelnden, atomistischen Platzwechsels in ihren Gittern sich befinden, und zwar gilt das sicher für die Legierungen der Metalle mit Schmelzpunkten über etwa 1000°. Bei höheren Temperaturen, bei denen dieser Platzwechsel in hinreichender Weise besteht, sollten dagegen die Spannungslinien mit der Struktur in der Weise übereinstimmen: 1. daß in einer Mischkristallreihe die Spannung nicht unabhängig von der Konzentration ist sondern sich kontinuierlich ändert, und 2. daß die Spannung innerhalb einer Mischungslücke von der Gesamtzusammensetzung unabhängig ist.

In Fig. 6 ist die Spannungslinie der Cd-Amalgame bei 25° nach den Messungen von H. C. Bijl dargestellt. Sie ist typisch für diejenigen Legierungen, die mit ihren Elektrolyten im Gleichgewicht sich befinden, weil in den Legierungen selbst ein hinreichender Platzwechsel stattfindet. Die Gleichgewichtskonzentrationen der beiden Jonen-Arten im Elektrolyten stellen sich hier von selbst ein, dieselben sind aber nicht bestimmt worden. In

Konzentrationsgebieten, in denen nach dem Zustandsdiagramm die Amalgame aus einer Phase bestehen, ändert sich die Spannung auf einer Kurve; im Gebiete, in dem sie aus zwei Phasen bestehen, ist die Spannung von der Gesamtkonzentration unabhängig, weil jede der beiden Phasen eine bestimmte Konzentration hat. Allerdings muß bemerkt werden, daß ein Teil der Grenzen, bei denen ein Phasenwechsel stattfindet, auf thermischem Wege nur angenähert extrapoliert werden kann und daß ihre Bestimmung auf mikroskopischem Wege leider nicht ausgeführt ist.

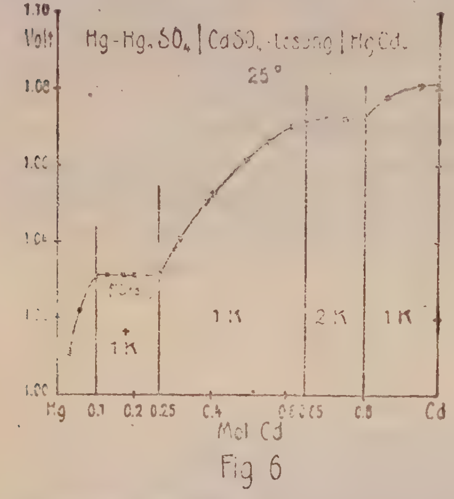


Fig 6

Immerhin ist diese Spannungslinie das am vollständigsten ausgearbeitete Beispiel für den Fall des Gleichgewichtes zwischen der Legierungsreihe und dem Elektrolyten, während die folgenden Spannungslinien einem solchen Gleichgewicht nicht entsprechen.

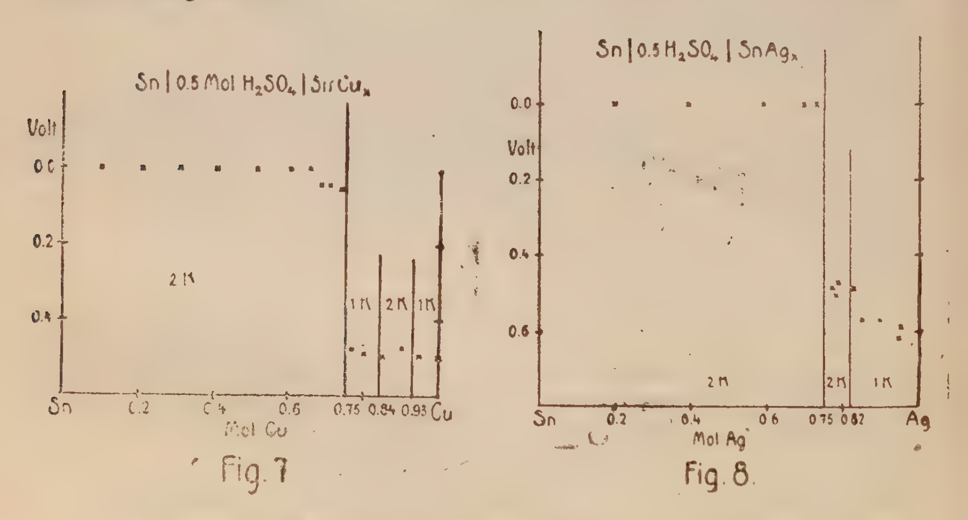


Fig. 7 Fig. 8.

Puschin[1]) maß die Spannung der Legierungen des Sn und Zn mit Cu, Ag und Au gegen die des unedleren Metalls nach der Kompensationsmethode, er polarisierte also die Legierungen anodisch.

1) Zeitschr. f. anorg. Chem. 56, S. 1, 1908.

Prinzipiell ist dieses Verfahren von dem bei der Messung der Polarisationsspannung der Ag-Au-Legierungen nicht verschieden.

In Fig. 7 sind durch die Zeichen $1K$ und $2K$ die Gebiete einer und zweier Kristallarten der Sn-Cu-Legierungen kenntlich gemacht. Dem Gebiete einer Kristallart zwischen 0.84 und 0.75 Mol Cu folgt ein Gebiet zweier Kristallarten nach kleineren Cu-Gehalten hin, dessen Grenze gegen ein zweites Gebiet zweier Kristallarten nicht angegeben ist, weil die thermischen und mikroskopischen Beobachtungen eine Angabe dieser Grenze nicht zulassen. Man ersieht, daß die Spannung im Gebiete von 1.0 bis 0.75 Mol Cu sich praktisch nicht ändert, obwohl Ein- und Zwei-Phasen-Gebiete mit einander wechseln. Erst bei 0.75 Mol Cu tritt mit einer neuen Kristallart eine starke Abnahme der Spannung ein.

Die Ag-Sn-Legierungen, Fig. 8, bestehen von 1.0 bis 0.82 Mol Ag aus Mischkristallen. In diesem Gebiet hätte die Ag-Spannung beobachtet werden sollen; die gefundenen Abweichungen rühren

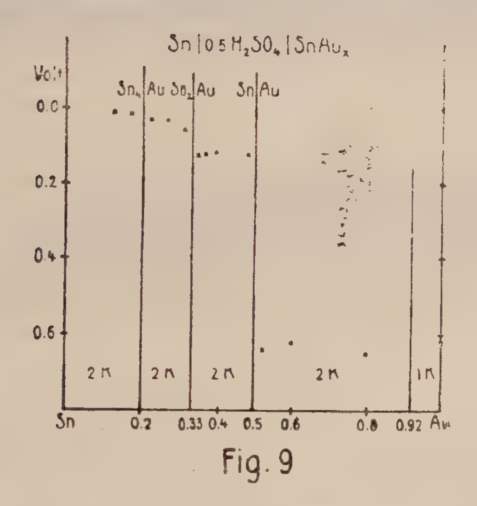


Fig. 9

von zu schneller Abkühlung der untersuchten Stäbchen her. Beim Gießen dieser Stäbchen sind neben Schichtkristallen noch vereinzelte Kristalle Ag_3Sn entstanden, wodurch die Spannung erhöht wird. Wären die Stäbchen vor der Untersuchung hinreichend lange getempert worden, so hätte sich bis 0.82 Mol Ag die Silberspannung ergeben müssen. Auch im Gebiete von 0.82 bis 0.75 Mol Ag können die untersuchten Stäbchen nicht die normale Endstruktur gehabt haben, da sie nicht getempert waren, siehe hierüber Petrenko (Z. f. anorg. Chem. 41 S. 206, 1907). Sinkt der Ag-Gehalt unter 0.75 Mol, so treten Sn-Kristalle in den Legierungen auf und ihre Spannungen gegen Sn verschwinden.

Die Spannungsdifferenz zwischen Au und Sn sollte erheblich größer sein. Praktisch ändert sie sich zwischen 1.0 und 0.5 Au nicht, Fig. 9, obwohl die Legierungen von 1.0 bis 0.92 Mol Au aus Mischkristallen bestehen, während die von 0.92 bis 0.5 Mol Au aus dem gesättigten Mischkristall mit 0.92 Mol Au und der Verbindung Sn Au zusammengesetzt sind. Das Auftreten einer neuen Kristallart singulärer Zusammensetzung ändert also hier die Spannung nicht merklich. Sinkt der Au-Gehalt unter 0.5 Mol Au, so vermindert sich die Spannung stark, weil die Kristalle Sn_2Au auftreten. Dasselbe tritt nochmals beim Austreten der Kristalle Sn_4Au ein. Weiterhin ändert sich die Spannung beim Auftreten der Sn-Kristalle nicht mehr sprungweise, weil bei schnellerer Abkühlung die Legierungen drei Kristallarten Sn_2Au, $AuSn_4$ und Sn enthalten[1]), nur bei hinreichend lange getemperten Legierungen wäre der dritte Spannungssprung bei 0.2 Mol Au zu beobachten.

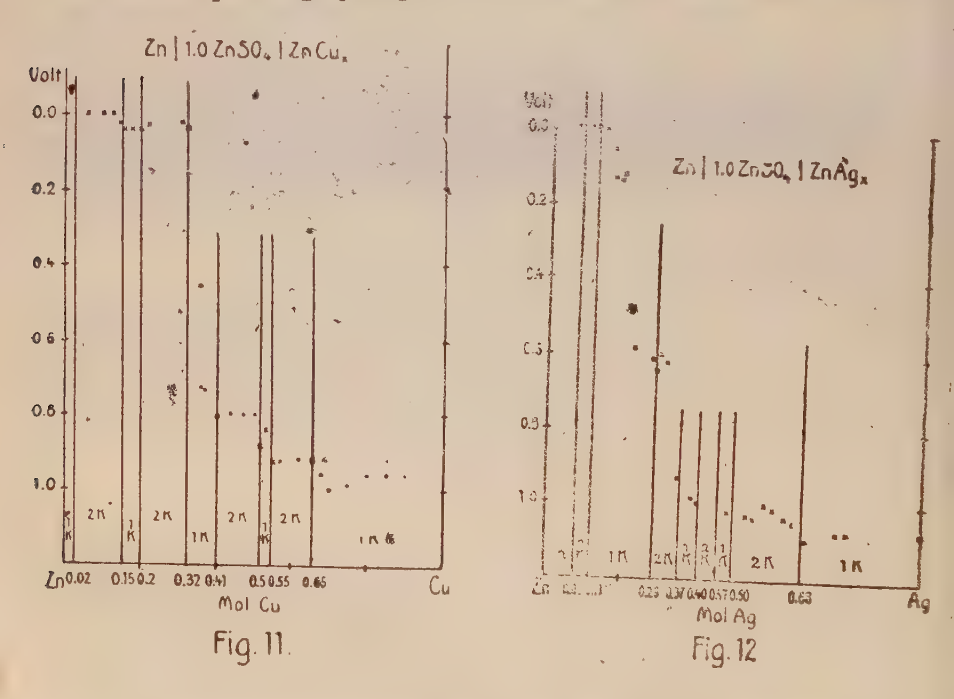


Fig. 11. Fig. 12

In der Mischkristallreihe des Cu und Zn von 1.0 bis 0.65 Mol Cu ändert sich praktisch die Spannung nicht. Beim Auftreten des gesättigten Mischkristalls mit 0.55 Cu nimmt die Spannung plötzlich ab. Über die Verhältnisse in der Mischkristallreihe von

1) R. Vogel Z. f. anorg. Chem. 46, S. 64, 1905.

0.50—0.55 Mol Cu bleibt man im Zweifel. Der gesättigte Mischkristall mit 0.41 Cu macht sich durch eine Spannungsabnahme bemerklich.

In der Mischkristallreihe von 0.32 bis 0.41 Mol Cu tritt eine schnellere Spannungsabnahme bei etwa 0.37 Mol Cu ein. Es liegen hier offenbar ganz analoge Verhältnisse wie bei der galvanischen Resistenzgrenze der Ag-Au-Mischkristalle bei 0.5 Mol Au vor. Die galvanische Grenze der Zn-Cu-Mischkristalle von 0.32—0.41 Cu wird wahrscheinlich bei $\frac{3}{8}$ Mol Cu liegen; zu ihrer genaueren Feststellung müßten die Legierungen hinreichend lange getempert werden.

Ferner unterscheiden sich die beiden gesättigten Mischkristalle mit 0.15 und 0.20 Mol Cu nicht merklich bezüglich ihrer Spannung; erst beim Auftreten des gesättigten Mischkristalls mit 0.02 Mol Cu ist eine geringe Spannungsabnahme zu bemerken.

Vergleicht man die Angabe von Petrenko[1]) über das Feingefüge der Zn-Ag-Legierungen mit ihrer Spannungslinie, Fig. 12, so sieht man, daß die Spannung der Mischkristallreihe von 0.68 bis 1.0 Mol Ag sich von der des Ag nicht unterscheidet. Beim Auftreten des gesättigten Mischkristalls mit 0.5 Mol Ag nimmt die Spannung ein wenig ab, ändert sich aber weder beim Auftreten des gesättigten Mischkristalls mit 0.47, noch bei dem des Mischkristalls mit 0.40 Mol Ag. Erst beim Auftreten des gesättigten Mischkristalls mit 0.29 Mol Ag nimmt die Spannung merklich ab.

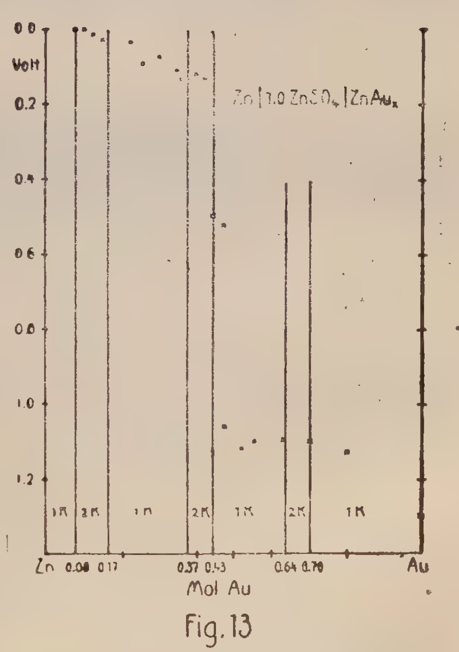


Fig. 13

In der Mischkristallreihe von 0.11 bis 0.29 Mol Ag tritt, vielleicht von $\frac{2}{8}$ Mol Ag an, eine starke Spannungsabnahme ein. Auch hier handelt es sich offenbar um eine galvanische Resistenzgrenze.

---

1) Zeitschr. f. anorg. Chem. 48, S. 351, 1906.

Die Mischkristallreihe von 0 bis 0.07 Mol Ag besitzt praktisch die Spannung des Zn.

Ein Vergleich des von R. Vogel bestimmten Feingefüges der Zn-Au-Legierungen[1]) mit der Spannungslinie ergibt: 1. Die Spannung der Mischkristalle von 0.70 bis 1.0 Mol Au sollte sich von der des Au nicht unterscheiden; wegen nicht hinreichender Homogenität der Legierungen, an denen die Spannungen bestimmt wurden, treten Abweichungen von dieser Forderung auf. 2. Zn und Au bilden nach Vogel zwischen 0.43 und 0.64 Mol Au eine Mischkristallreihe mit einem maximalen Schmelzpunkt, der bei 0.5 Mol Au liegt. Bei diesem Au-Gehalt beginnt die Spannung sehr erheblich abzunehmen. 3. Eine zweite schwächere Abnahme der Spannung findet sich in der Mischkristallreihe von 0.17 bis 0.37 Mol Au, vielleicht bei 0.25 Mol Au. Bei $\frac{2}{8}$ und $\frac{4}{8}$ Mol Au liegen also zwei galvanische Resistenzgrenzen. 4. Die Zn-reichen Mischkristalle von 0.0 bis 0.08 Mol Au zeigen die Spannung des Zn.

Unser Vergleich lehrt: 1. Die Spannung bleibt beim Auftreten einer neuen Kristallart nicht selten unverändert, auch wenn ihre Zusammensetzung eine singuläre ist. 2. Die Spannung ändert sich in einer Reihe von Mischkristallen im Allgemeinen nicht, wenn aber gewisse Konzentrationen, Vielfache von $\frac{1}{8}$, überschritten werden, so nimmt die Spannung stark ab.

Die Deutung des ersten Befundes ist folgende: Die neue Kristallart, die einer Mischkristallreihe ohne Spannungsänderung folgt, ist eine Fortsetzung jener Reihe; die Gitter beider Reihen sind identisch. Die beiden Mischkristallreihen des Cu und Sn von 1.0—0.93 und von 0.84—0.75 Mol Cu könnten also derselben Reihe angehören, die von der Mischungslücke 0.93 bis 0.84 Mol Cu unterbrochen ist, wenn ihre Spannungen genau dieselben sind. Ebenso wäre die Verbindung SnAu zur Mischkristallreihe 0.92 bis 1.0 Mol Cu zu rechnen; die Atome dieser Verbindung würden dann das Gitter der Mischkristallreihe besetzen. Beim Cu-Zn würden die Mischkristallreihen von 0.15—0.20 und von 0.32—0.41 Teile derselben Reihe sein. Beim Ag-Zn würden die beiden Reihen von 0.37—0.40 und von 0.47—0.50 Mol Ag zu derselben Reihe gehören, die durch eine Lücke von 0.40 bis 0.47 Mol Ag unterbrochen wäre.

Voraussetzung dieser Folgerung ist, daß eine noch so kleine sprungweise Spannungsänderung an der Grenze einer Mischkristallreihe nicht eintritt. Es handelt sich hierbei um sehr geringe Spannungsdifferenzen von der Größenordnung der zwischen zwei

1) Zeitschr. f. anorg. Chem. 48, S. 323, 1906.

Kristallarten desselben Metalls zu erwartenden Differenzen. Daher kann für die angeführten Fälle die Gleichheit der Gitter nur dann behauptet werden, wenn sich mit empfindlichen Mitteln eine Differenz für die Glieder je zweier Reihen nicht nachweisen läßt. Man hat also in der Spannungslinie ein Mittel zur Entscheidung ob zwei Mischkristallreihen gleiche Gitter zukommen. Die beiden Gitter sind einander gleich, wenn eine Spannungsdifferenz zwischen den Gliedern beider Reihen nicht besteht. Aber die beiden Gitter könnten auch einander gleich sein, wenn in die Mischungslücke der beiden Reihen eine galvanische Resistenzgrenze fällt.

Die Deutung des zweiten Befundes ist durch die Untersuchung der Ag-Au-Mischkristalle vorbereitet; auf die atomistische Deutung desselben wird später einzugehen sein. Wie bei den Ag-Au und Cu-Au-Mischkristallen ändert sich auch bei denen des Sn und Zn mit Cu, Ag und Au die Spannung im Allgemeinen nicht, nur an den galvanischen Resistenzgrenzen nimmt sie schnell ab. Diese Grenzen sind:

1) in der Reihe Zn-Cu zwischen 0.32 und 0.41 Mol Cu bei $\frac{3}{8}$ Mol Cu,
2) Zn-Ag „ 0.11 und 0.29 Mol Ag „ $\frac{2}{8}$ Mol Ag,
3) Zn-Au „ 0.17 und 0.37 Mol Au „ $\frac{2}{8}$ Mol Au,
4) Zn-Au „ 0.43 und 0.64 Mol Au „ $\frac{4}{8}$ Mol Au.

Die galvanischen Grenzen sind auch Grenzen der Fällung anderer Metalle aus ihren Lösungen. Die nichtresistenten Mischkristalle und die relativ resistenten unterscheiden sich in ihrem Fällungsvermögen dadurch, daß erstere auch diejenigen Metalle fällen, deren Spannungen zwischen die wahre Spannung an der unveränderten Oberfläche der resistenten und die der relativ resistenten Mischkristalle fallen.

Wendet man diese Regel auf das Fällungsvermögen der Zn-Ag-Mischkristalle von 0.11 bis 0.29 Mol Ag an, so sollten, wenn die von Puschin gemessenen Spannungen denen der Normalspannungsreihe entsprechen, die Mischkristalle mit weniger als 0.25 Mol Ag alle Metalle von Zn an fällen, während die Mischkristalle mit mehr als 0.25 Mol Ag nur die Metalle fällen sollten, deren Spannung gegen Zn größer als 0.6 Volt ist, also Pb und die ihm folgenden Metalle.

Zur Prüfung dieser Folgerungen wurden die folgenden Zn-Ag-Mischkristalle hergestellt und 8 Stunden bei 420° in Wasserstoff getempert. In folgender Tabelle ist durch das Zeichen + der Eintritt der betreffenden Fällung und durch das Zeichen — ihr Nichteintreten angegeben. Da die Metallfällungen entweder schon mindestens nach

einer Stunde deutlich sichtbar werden oder überhaupt nicht auftreten, so genügt hier eine Einwirkungsdauer von 24 Stunden.

In den Lösungen des $CdSO_4$ und Tl_2SO_4 behielten die Stücke mit 0.255 und 0.291 Ag ihre hellgraue Farbe mit bläulichem Stich, während die Stücke mit 0.188 und 0.235 Ag dunkelgrau wurden und die mit 0.160 Ag reichliche Mengen von Cd und Tl fällten.

Ag-Gehalt der Mischkristalle:	0.160	0.188	0.235	0.255	0.291 Mol Ag
Lösung von 0.2 $CdSO_4$	+	+	+	—	—
" " Tl_2SO_4 gesättigt	+	+	+	—	—
" " $PbCl_2$ gesättigt	+	+	+	+	+
" " 1 $SnCl_2$ + 1 HCl	+	+	+	+	+
" " 1 $HgNO_3$	+	+	+	+	+
" " 0.5 $CuSO_4$	+	+	+	+	+

Das chemische Verhalten der Zn-Ag-Legierungen entspricht also ihrem galvanischen Verhalten.

Bei verschwindendem Platzwechsel beider Atomarten in ihrem Gitter ist die Spannung von der Konzentration der Mischkristallreihen unabhängig, bis die Konzentration zu einer galvanischen Resistenzgrenze gelangt. Wie aus den Spannungslinien zu ersehen ist, trifft diese Regel sowohl für die am edleren Metall reicheren, als auch für die an ihm armen Mischkristalle zu, wenn diese möglichst schwach anodisch polarisiert werden. Auch die Messungen von Herschkowitsch entsprechen im Allgemeinen diesen Forderungen.

Herschkowitsch [1]) maß die Spannungen der in folgender Tabelle angegebenen Legierungsreihen gegen ihre unedlere Komponente in der Lösung ihres Sulfates. Zur Zeit, als diese Messungen ausgeführt wurden, war das Feingefüge der untersuchten Legierungen wenig bekannt. Es lag damals die Annahme nahe, daß diese Legierungsreihen aus den Kristallen ihrer Komponenten beständen. Das trifft aber nur für die unedleren Metalle Zn und Cd zu, die anderen Komponenten bilden mit Zn und Cd kurze Mischkristallreihen. Die Spannungen dieser Legierungsreihen sollten gegen die des unedleren Metalls verschwindend klein sein und erst beim Verschwinden der Kristalle des unedleren Zn oder Cd in der Legierungsreihe sollte die Spannung des Elementes wachsen. Vergleicht man die Konzentrationen dieses Anwachsens der Spannung mit der des gesättigten Mischkristalls in der Legierungsreihe, so ergibt sich, daß dieses Anwachsen in der Tat bei der Konzentration des gesättigten Mischkristalls stattfindet. Darauf sollte die Spannung in der ganzen Mischkristallreihe gleich der des edleren

1) Zeitschr. f. phys. Chem. 27, S. 123, 1898.

Metalls sein. Herschkowitsch hat sich mit dem Nachweise des Abfalls begnügt.

	Abfall der Spannung zwischen	Konzentration des gesättigten Mischkristalls
Cd-Sn	0.027 und 0.011 Mol Cd	0.02 Mol Cd
Cd-Pb	0.092 und 0.036 „	0.09 „
Cd-Bi	< 0.011 „	< 0.01 „
Zn-Sn	0.07 und 0.035 Mol Zn	0.047 Mol Zn
Zn-Bi	0.113 und 0.060 „	0.067 „

Wie wir sehen, können aus der Spannungslinie einer Legierungsreihe nur dann Schlüsse auf ihr Feingefüge gezogen werden wenn hinreichender atomistischer Platzwechsel in ihren Kristallarten stattfindet. Die Spannungslinien, für die diese Bedingung nicht erfüllt ist, haben eine ganz andere Bedeutung, als man ihnen bisher zuschrieb; für sie sind bestimmend galvanische Resistenzgrenzen und die Gitterarten der verschiedenen Mischkristallreihen. Ein Beispiel für den ersten Fall sind die Cd-Amalgame, Beispiele für den zweiten Fall sind unter anderen die von Puschin untersuchten Legierungsreihen. Um den Unterschied in den Spannungslinien für beide Fälle an derselben Legierungsreihe deutlich hervortreten zu lassen, sind in Fig. 14 die Spannungslinien für eine fingierte Legierungsreihe entsprechend dem Gleichgewichte (Linie a) und entsprechend dem Fehlen desselben (Linie b) angegeben. Aus der Linie b ist auf zwei galvanische Resistenzgrenzen bei $\frac{2}{8}$ und $\frac{4}{8}$ Mol B zu schließen, auch sind die Gitter der drei Mischkristallreihen K', K'' und K''' identisch, da beim Auftreten einer ihrer Kristallarten keine diskontinuierliche Änderung der Spannung eintritt. Aus dem Verlauf der Linie a können Schlüsse auf das Feingefüge der Legierungsreihe gezogen werden.

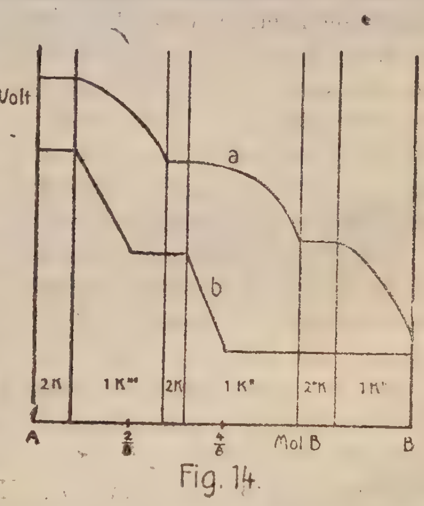


Fig. 14.

Nur in dem Temperaturgebiete, in dem wirkliches Gleichgewicht besteht, dürfen thermodynamische Formeln angewandt werden, z. B. aus den Temperaturkoeffizienten der Spannungen die Mischungswärmen der Mischkristalle berechnet werden.

Der atomistische Platzwechsel in den Kristallarten einer Le-

gierungsreihe ist von entscheidendem Einfluß auf ihr chemisches und galvanisches Verhalten. Aus diesem Grunde wären Kriterien erwünscht, auf Grund deren man denselben qualitativ und auch quantitativ beurteilen könnte.

Die empfindlichste Methode zur Bestimmung des Platzwechsels würde sich wohl auf die Bestimmung der Zeiten gründen, während der Resistenzgrenzen unter Bildung von Reaktionsprodukten in bestimmter Menge überschritten werden. Viel weniger empfindlich ist der Nachweis der Diffusion nach dem bei der Diffusion in Flüssigkeiten angewandten Verfahren. Nach dieser Methode hat Roberts Austen [1]) den Diffusionskoeffizienten von Au in Pb zwischen 370° und 100° zu bestimmen gesucht. Er scheint der Meinung gewesen zu sein, daß Au sich in Pb-Kristallen in merklicher Menge löst. Nach Vogels Diagramm [2]) kann aber diese Löslichkeit nur eine sehr geringe sein. Beim Versuch Austens bei 251° enthielt der Au-haltige Bleizylinder neben Pb-Kristalliten die eutektische Schmelze mit 15% Au und bei Temperaturen unterhalb der eutektischen bei 215° kann derselbe praktisch nur Pb- und Au-Körner enthalten haben, falls die Angabe Vogels genau zutrifft. Aus diesen Gründen geben die von Austen bestimmten „Diffusionskoeffizienten" leider kein Bild von der Temperaturabhängigkeit des wahren Diffusionskoeffizienten, sondern beziehen sich auf Vorgänge, die nicht in eine Reihe zu stellen sind.

Eine Erscheinung, die ebenfalls auf atomistischen Platzwechsel der Atome im Gitter hinweist, ist das Verhalten zweier kräftig zusammengepreßter Bleistücke. Da dieser Versuch bei Zimmertemperatur nur mit Pb, vielleicht auch noch mit Tl gelingt, so scheinen diese beiden Metalle durch besonders große Diffusionsfähigkeit bei Zimmertemperatur ausgezeichnet zu sein.

Hiermit stimmt auch das Resultat eines Versuches von G. Masing [3]) überein, der bei Zimmertemperatur eine beständige Widerstandsabnahme an einem aus Pb- und Tl-Spähnen gepreßten Draht nachgewiesen hat.

Bei 400° verkleben bei leichter Berührung nach W. Spring [4]) leicht die Stücke gleicher Metalle von Cu, Au, Al und Zn, schwieriger von Pt und Sb. Diese Erscheinung tritt schon bei 200° bis 400° ein beim Bi, Sn und Pb. Merkliche Diffusion unter Verkleben zweier einander berührender Stücke verschiedener Metalle

1) Proceedings Royal Soc. of London 59, S. 285, 1896.
2) Zeitschr. f. anorg. Chem. 45, S. 17, 1905.
3) Zeitschr. f. anorg. Chem. 62, S. 265, 1909.
4) Zeitschr. f. phys. Chem. 15, S. 65, 1894.

findet bei 200° bis 400° statt beim Cu mit den Metallen: Zn, Cd, Sn, Bi, Pb, Sb und Al.

Pb, Tl und Hg scheinen bei relativ tiefen Temperaturen durch eine besonders große Beweglichkeit ihrer Atome im Gitter ausgezeichnet zu sein.

Bekanntlich gelingt die Abscheidung von Mischkristallen aus Lösungen mit metallischen Ionenarten im allgemeinen nicht. Man macht hierfür die Verschiedenheit der Abscheidungsspannungen der einzelnen Kationen geltend.

Andererseits gibt es aber auch Angaben über die gelungene Abscheidung von „Legierungen" aus gemischten Elektrolyten[1]).

Es ist wohl recht unwahrscheinlich, daß diese „Legierungen" mit den durch Zusammenschmelzen beider Metalle entstandenen, soweit es sich um Mischkristalle handelt, in ihrem atomistischen Aufbau identisch sind; in einzelnen Fällen ist vielleicht sogar nicht einmal die mikroskopische Struktur im Wesentlichen dieselbe. Da es sich hier um Metall-Paare handelt, deren Atome ihre Plätze im Gitter bei den Abscheidungstemperaturen (bis 100°) nicht vertauschen können so ist nicht abzusehen, wie die beiden Atomarten bei ihrer Abscheidung sich so gruppieren sollten, daß ihre Durchmischung die bestmögliche, mit der Gittersymmetrie verträgliche wäre; denn diese, die normale Verteilung beider Atomarten im Gitter, müßte sich herstellen, wenn die elektrolytisch hergestellten Legierungen mit den durch Zusammenschmelzen erhaltenen identisch sein sollten. In welcher Weise die elektolytischen von den normalen Legierungen sich unterscheiden, kann natürlich nur durch eine Spezialuntersuchung des einzelnen Falles entschieden werden. Bei höheren Temperaturen, bei denen merkliche Diffusion in normalen Legierungen vorhanden ist, sollte die elektrolytische Herstellung normaler Legierungen keine Schwierigkeiten machen.

Die Deutung der galvanischen Resistenzgrenzen.

Betrachtet man ein einwertiges Kation als Atom, das ein Elektron verloren hat, so besteht die chemische Reaktion an der anodisch polarisierten Elektrode in der Trennung von Elektronen von Metallatomen, wobei diese als Kationen in den Elektrolyten gehen. Da ferner an der Kathode die Kationen unter Metallabscheidung Elektronen aufnehmen, so ist der galvanische Strom ein Elektronen-Strom, der den Elektrolyten und die metallische Leitung durchsetzt.

1) Die Literatur hierüber ist bei F. Förster, Elektrochemie, 2. Auflage, 1915, S. 321 ff. zu finden.

Das Gitter der Cu-Au- und Ag-Au-Mischkristalle ist bekanntlich das 14-Punkt-Gitter, das der Zn-Au-Mischkristalle von 0.43 bis 0.64 Mol Au scheint mit dem der Zn-Au-Mischkristalle von 0.70 bis 1.0 Mol Au, das ebenfalls ein 14-Punkt-Gitter ist, nahe übereinzustimmen, da die Spannung der gesättigten Mischkristalle mit 0.64 und 0.70 Mol Au dieselbe ist. Von der Zn-Au-Mischkristallreihe mit der Grenze $\frac{2}{8}$ Mol Au und der Reihe Zn-Ag mit der analogen Grenze, sowie von der Zn-Cu-Reihe mit der Grenze $\frac{3}{8}$ Mol Cu sind die Gitter nicht bekannt, daher muß man sich auf die nähere Betrachtung der einen Grenze bei $\frac{4}{8}$ Mol Au beschränken.

Sinkt der Au-Gehalt unter 0.5 Mol Au, so treten im Gitter in den Richtungen der Körperdiagonalen des Würfels Gerade auf, die nur mit aktiven Atomen, Cu-, Ag- oder Zn-Atomen, besetzt sind. Aus diesem Grunde kann ein einwertiges Agens in die Tiefe von Mischkristallen nur wirken, wenn ihr Au-Gehalt unter 0.5 Mol Au sinkt. Ebenso können die aktiven Metall-Atome nur dann ein oder zwei Elektronen verlieren, wenn solche Gerade besetzt nur mit aktiven Atomen auftreten. Wird ihre Reihe durch Au-Atome auch in ganz geringer Zahl unterbrochen, so findet die Elektronenabgabe unter Kationen-Bildung nicht statt.

Der Umstand, daß die galvanische Grenze: $\frac{4}{8}$ Mol Au von der Wertigkeit der polarisierenden Anionen unabhängig ist, stimmt mit diesem Bilde überein. Würden die Anionen sich aktiv verhalten, gewissermaßen nach den aktiven Metallatomen greifen, so müßte in Analogie mit den chemischen Einwirkungsgrenzen auf Mischkristallreihen, die galvanische Grenze einwertiger Anionen bei $\frac{4}{8}$ Mol Au und die zweiwertiger Anionen bei $\frac{2}{8}$ Mol Au bei den Mischkristallen mit einwertigen aktiven Metallatomen liegen. Für die Mischkristallreihe des zweiwertigen Zn sollte dieser Unterschied nicht bestehen.

Da aber beide Arten von Anionen auf die Mischkristalle des Au mit Cu und Ag bis 0.5 Mol Au wirken, so ist dieses Bild von der Einwirkungsart der Anionen nicht zutreffend, sondern das, nach dem die Atome des unedleren Metalls sich durch Elektronenabgabe und Kationenbildung betätigen.

Aus dem Betrag der Spannung, bei der das unedlere Metall aus den Mischkristallen in Lösung geht, kann auf seinen Zustand in der Mischkristallreihe geschlossen werden. Geht es mit der ihm als Lösungselektrode eigentümlichen Spannung in Lösung, so befindet es sich im Mischkristall in unverbundenem Zustande, und eine zweite galvanische Resistenzgrenze kann dann nicht auftreten. Beispiele für diesen Fall sind die Cu-Au- und Ag-Au-

Mischkristallreihen. Geht das unedlere Metall aber bei einer kleineren Spannung als der ihm als Lösungselektrode zukommenden in Lösung, so ist es im Mischkristall als Verbindung mit dem edleren Metall vorhanden, und dann kann noch eine zweite Resistenzgrenze auftreten. Eine solche Grenze tritt z. B. in den Zn-Au-Mischkristallen von 0.17 bis 0.37 Mol Au auf, woraus folgt, daß die Mischkristalle der Reihe von 0.43 bis 0.64 Mol Au die Moleküle der Verbindung ZnAu enthalten. Die Kristalle: ZnAu, sind auch durch einen maximalen Schmelzpunkt ausgezeichnet.

Die experimentelle Bestimmung der Spannung, bei der das unedlere Metall in Lösung geht, stößt auf Schwierigkeiten. Denn durch Reste des edleren Metalls auf der Oberfläche der Mischkristalle wird die beobachtete Lösungsspannung erhöht. Daher tritt, wenn der Gehalt des edleren Metalls unter den der Resistenzgrenzen sinkt, kein diskontinuierlicher Abfall auf die Spannung des unedleren Metalls ein, sondern nur eine mehr oder weniger schnelle Abnahme der Spannung, die mit der Menge des auf der Elektrode vorhandenen Staubes abnimmt. Um zu entscheiden, bei welcher Spannung das unedle Metall in Lösung geht, genügt nicht die Bestimmung der Spannung für einen einzigen Mischkristall, sondern die Spannungslinie muß bis zum Endgliede der Reihe verfolgt werden. Tritt auf dieser Linie kein Gebiet konstanter Spannungen auf, so geht das unedlere Metall mit seiner Lösungsspannung in Lösung, im anderen Falle mit jener konstanten Spannung.

Wenn das Gitter der Mischkristalle ein 14-Punkt-Gitter ist, so wären in Analogie mit den chemischen Grenzen zweite galvanische Grenzen bei $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{8}$ und $\frac{1}{8}$ Mol des edleren Metalls zu erwarten. Man hätte dann eine volle Analogie der galvanischen Grenzen bei abnehmenden Spannungen mit den Einwirkungsgrenzen starker, mittlerer und schwacher Oxydationsmittel, deren Grenzen für die Cu-Au-Mischkristalle bei $\frac{4}{8}$, $\frac{3}{8}$ und $\frac{2}{8}$ Mol Au gefunden wurden, und was über die atomistische Begründung dieser Grenzen gesagt wurde[1]), würde sich auch auf die Elektronenabgabe bei sinkender Spannung beziehen.

Die Kristallart: AuSn spielt im Zustandsdiagramm die Rolle einer chemischen Verbindung, die durch ein Maximum der Schmelzkurve ausgezeichnet ist, und doch ist ihre Spannung von der des gesättigten Mischkristalls mit 0.92 Mol Au nicht verschieden. Daher sollte die Verbindung AuSn der Mischkristallreihe 0.92 bis 1.00 Mol Au angehören, also ihr wie dieser dasselbe 14-Punkt-Gitter zukommen.

---

1) Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1916, S. 260 ff.

Es entsteht die Frage, in welcher atomistischen Hinsicht sich ein Mischkristall von einer Verbindung derselben Zusammensetzung bei gleichen Gittern unterscheidet, oder ob ein Auge, dem die einzelnen Atome gerade sichtbar sind, entscheiden könnte, ob ein Mischkristall, der vor anderen Gliedern seiner Reihe durch einen maximalen Schmelzpunkt ausgezeichnet ist, eine chemische Verbindung oder ein Mischkristall ist; bei der Kristallart Zn Au wäre beispielsweise diese Frage zu entscheiden. Da sowohl im Mischkristall als auch in der Verbindung Au Zn dasselbe Gitter in derselben Verteilung der Au- und Zn-Atome besetzt ist; denn in beiden Fällen muß diese Verteilung der bestmöglichen, mit der Gittersymmetrie verträglichen Verteilung entsprechen, und da es nur eine diesen beiden Forderungen entsprechende Verteilung im 14-Punkt-Gitter gibt, so könnte jenes Auge eine chemische Verbindung von einem Mischkristall nicht unterscheiden. Der Unterschied zwischen Mischkristall und chemischer Verbindung würde aber einem Auge stärkerer Sehkraft, das auch die Elektronen der Atome zu erkennen vermag, wahrnehmbar sein. Denn beim Verbindungsakt treten nach neueren Auffassungen Umgruppierungen der die positiven Atomkerne umkreisenden Elektronen auf. Wenn also in der ganzen Mischkristallreihe solche Umgruppierungen nicht auftreten, so fehlt ihr eine Verbindung und diejenige Konzentration, bei der diese Umgruppierungen bei allen Atomen vorhanden sind, würde der Zusammensetzung der Verbindung entsprechen.

Zusammenfassend kann über die Spannungslinien der Legierungen Folgendes gesagt werden. Zur Feststellung des Feingefüges einer Legierungsreihe sind diese Linien nur dann geeignet, wenn in ihren Kristallarten ein hinreichender Platzwechsel beider Atomarten besteht, und sie daher mit ihrem Elektrolyten ins Gleichgewicht kommen können. Trifft diese Bedingung nicht zu, so kann aus der Spannungslinie nicht auf das Feingefüge der Legierungsreihe geschlossen werden. Aus dem bekannten Feingefüge der Legierungsreihe und der Spannungslinie können aber in diesem Falle Schlüsse auf den atomistischen Aufbau der betreffenden Kristallarten gezogen werden.

Aus der Spannungsänderung bei der Resistenzgrenze folgt, ob die beiden Atomarten als freie oder teilweise gebundene das Kristallgitter besetzen, und wenn zwei von einer Lücke unterbrochene Mischkristallreihen genau dieselbe Spannung haben, so kommt beiden dasselbe Kristallgitter zu.

Über das Verhalten der Mischkristalle von Cu, Ag und Au gegen chemische Agentien und die Farben dieser Mischkristalle.

Von

G. Tammann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 7. Dezember 1917.

Die Frage nach den Resistenzgrenzen ternärer Mischkristallreihen hat abgesehen von ihrem theoretischen Interesse noch ein praktisches, denn sie läuft auf die Frage hinaus: kann durch Zusatz eines zweiten unedlen Metalls zur binären Legierung eines edlen und eines unedlen Metalls eine resistente, edle Legierung erhalten werden, zu deren Herstellung an Edelmetall weniger verbraucht wird als zur Herstellung derselben Gewichtsmenge der binären, ebenfalls noch resistenten Legierung, und wie groß kann diese Ersparnis sein?

Ein Beispiel, an dem sich diese Frage untersuchen läßt, sind die ternären Mischkristalle des Au, Ag und Cu; denn für die binären Mischkristallreihen Au-Cu und Au-Ag sind eine Reihe von Resistenzgrenzen bekannt und die Mischbarkeit von Au, Ag und Cu im Kristallzustande ist hinreichend groß, sodaß durch ihre Beschränkung die beabsichtigte Untersuchung nicht wesentlich behindert werden dürfte. Die Grenzkurve zwischen den beiden Gebieten, in dem die Legierungen aus einer Art homogener, ternärer Mischkristalle und in dem sie aus zwei Arten ternärer Mischkristalle bestehen, ist von E. Jänecke[1]) angenähert bestimmt worden. Diese Grenzkurve ist in Fig. 1 durch die Kurve *ABC* wiedergegeben. Zwischen ihr und der Dreiecksseite Ag Cu liegt das Feld, in dem die Au-Ag-Cu-Legierungen aus zwei Kristallarten

1) Metallurgie B. 8 S. 606, 1911.

bestehen. Die Punkte der übrigen Ebene des gleichseitigen Dreiecks entsprechen Legierungen, die nach hinreichend langem Tempern aus unter sich und in sich homogenen Mischkristallen bestehen.

Um einen Überblick über die Einwirkungsgrenzen der ternären Mischkristalle von Reagentien zu erhalten, deren Einwirkungsgrenzen auf die beiden binären Mischkristallreihen bekannt sind, wurden drei Reihen von ternären Mischkristallen mit konstantem Verhältnis der Atomzahlen von $\frac{Ag}{Cu} = \frac{1}{2}$, 1 und 2 für Änderungen der Atomzahl des Au um je 0.05 Mol Au zwischen

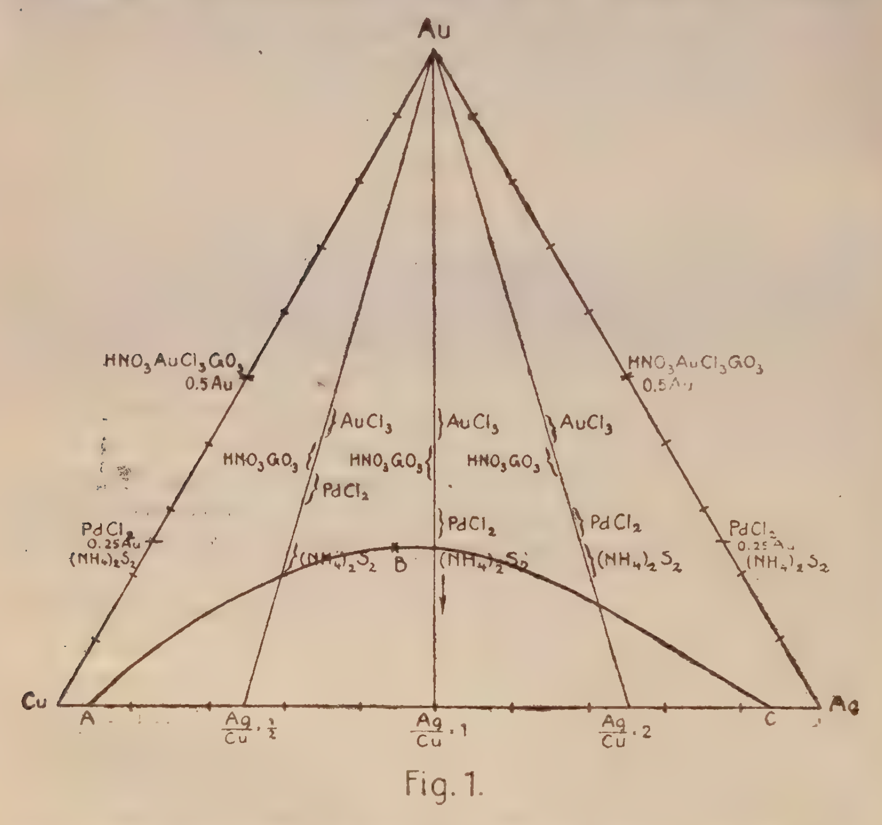


Fig. 1.

0.20 bis 0.55 Mol Au hergestellt. Die drei Metalle wurden entsprechend diesen Konzentrationen genau abgewogen, im Graphitrohr zusammengeschmolzen, gemischt und gleich nach ihrer Kristallisation wurden die linsenförmigen Reguli von je 1 gr, bei 700 bis 830°, also dicht unterhalb der Temperatur des Endes ihrer Kristallisation je 1 Stunde unter Holzkohlenpuver getempert. Diese Stücke wurden zu Streifen von etwa 0.1 mm Dicke ausgewalzt. Die gereinigten Streifen wurden wieder getempert; die

mit dem Verhältnis $\frac{Ag}{Cu} = \frac{1}{2}$ und 2 wurden 20 Stunden bei 720° und die mit dem Verhältnis $\frac{Ag}{Cu} = 1$ sechs Stunden bei 690° in einem langsamen Strom reinen Wasserstoffs erhitzt. Die Plättchen der Reihe $\frac{Ag}{Cu} = 1$ wurden sowohl im harten als auch im weichen Zustande untersucht. Da sich hierbei innerhalb der allerdings ziemlich großen Änderungsstufe des Au-Gehaltes von je 0.05 Mol Au nicht merkbare Unterschiede der Einwirkungsgrenzen ergaben, ausgenommen die des Schwefelammoniums, so wurden die Plättchen der beiden anderen Reihen in der Regel nur in weichem Zustande untersucht.

In der Tabelle 1 sind zusammengestellt die genauen Molenbrüche, Atomzahlen der untersuchten Legierungen und ihre Zusammensetzungen in Gewichtsprozenten, aus denen die Atomzahlen mittelst des Atomgewichts: Au = 197.2, Ag = 107.88 und Cu = 63.57 berechnet wurden.

Während die Atomzahlen des Au-Gehaltes der Einwirkungsgrenzen binärer Mischkristalle des Au und Ag sowie des Au und Cu ganzzahligen Vielfachen von $\frac{1}{8}$ entsprechen, trifft diese Regel bei den ternären Mischkristallen auch nicht angenähert zu. Dieses Resultat ist, wie wir sehen werden, zu erwarten. Dasselbe gilt von folgendem Unterschiede im Verhalten der binären und ternären Mischkristalle.

Die Einwirkungsgrenzen der binären Mischkristalle sind in der Regel so scharf, daß ihr Au-Gehalt sich unschwer bis auf ± 0.005 Mol Au bestimmen läßt. Bei den ternären ist diese Grenze in der Regel mehr oder weniger verwischt. Man hat daher bei den ternären Mischkristallen zwischen einer Grenze tiefer gehender Einwirkung und einer Grenze oberflächlicher Einwirkung zu unterscheiden. Letztere liegt häufig bei sehr viel höheren Au-Gehalten als erstere. Besonders deutlich ist dieser Unterschied der beiden Einwirkungsgrenzen bei der Einwirkung einer schwefelsauren Lösung der Chromsäure und bei der Einwirkung konzentrierter Salpetersäure. Die tiefergehende Wirkung der ersten Lösung erstreckt sich bis etwa 0.42 Mol Au, während eine deutliche Gelbfärbung der Plättchen auch bei 0.5 Au noch wahrzunehmen ist, und die tiefergehende Einwirkung der Salpetersäure reicht bis etwa 0.38 Mol Au, während auch die Plättchen mit 0.5 und 0.55 Mol Au noch gelb gefärbt werden. Auf die binären Au-Ag und Au-Cu-Legierungen wirken beide Agentien bis etwa 0.5 Mol Au und die Au-

Tabelle 1. Zusammensetzung der Au-Ag-Cu-Legierungen.

Molenbruch des Au abgerundet		Verhältnis der Molenbrüche $\frac{Ag}{Cu} = \frac{1}{2}$		Verhältnis der Molenbrüche $\frac{Ag}{Cu} = 1$		Verhältnis der Molenbrüche $\frac{Ag}{Cu} = 2$	
		Molenbrüche	Gewichtsproz.	Molenbrüche	Gewichtsproz.	Molenbrüche	Gewichtsproz.
0.20	Au	0.1836	36.47	0.1999	36.51	0.2066	34.69
	Ag	0.2472	27.07	0.3999	39.94	0.5336	50.49
	Cu	0.5692	36.46	0.4002	23.55	0.2658	14.82
0.24	Au			0.2386	42.13		
	Ag			0.3803	36.39		
	Cu			0.3810	21.48		
0.25	Au	0.2486	45.47			0.2502	41.40
	Ag	0.2476	24.80			0.5009	45.33
	Cu	0.5038	29.73			0.2489	13.27
0.26	Au			0.2600	44.70		
	Ag			0.3701	34.80		
	Cu			0.3699	20.50		
0.30	Au	0.3001	51.91	0.3004	49.68	0.3016	47.58
	Ag	0.2332	22.07	0.3504	31.70	0.4640	40.50
	Cu	0.4667	26.02	0.3492	18.62	0.2344	11.92
0.35	Au	0.3502	57.57	0.3500	55.34	0.3502	53.30
	Ag	0.2167	19.49	0.3249	28.10	0.4330	36.06
	Cu	0.4331	22.94	0.3251	16.56	0.2168	10.64
0.40	Au	0.4000	62.66	0.4003	60.55	0.3996	58.51
	Ag	0.2000	17.14	0.3006	24.87	0.4001	32.05
	Cu	0.4000	20.20	0.2990	14.58	0.2003	9.44
0.45	Au	0.4500	67.32	0.4532	65.52	0.4513	63.52
	Ag	0.1833	15.00	0.2769	21.91	0.3671	28.26
	Cu	0.3667	17.68	0.2698	12.57	0.1817	8.22
0.50	Au	0.5000	71.57	0.5265	71.89	0.5008	67.98
	Ag	0.1667	13.05	0.2369	17.70	0.3341	24.80
	Cu	0.3333	15.38	0.2365	10.41	0.1651	7.22
0.55	Au			0.5507	73.82		
	Ag			0.2248	16.48		
	Cu			0.2445	9.70		

Tabelle 2. Grenzen tieferer Einwirkung auf die ternären Au-Ag-Cu-Legierungen in Mol Au.

Legierungsreihe →	$\frac{Ag}{Cu} = \frac{1}{2}$		$\frac{Ag}{Cu} = 1$		$\frac{Ag}{Cu} = 2$		Einwirkungsgrenzen auf die binären Legierungen	
Lösungen von	hart	weich	hart	weich	hart	weich	Cu-Au	Ag-Au
$(NH_4)_2 S_2$	0.25—0.30	0.20—0.35	0.20—0.24	0.20—0.24	< 0.20	0.20—0.25	0.245	0.32
$PdCl_2$ (1 gr in 100 ccm)		0.30—0.35	0.26—0.30	0.26—0.30		0.25—0.30	0.250	0.250
$Pd(NO_3)_2$ (1 gr in 100 ccm)		< 0.18		0.20—0.24		0.20—0.25	0.25	0.24
Pikrinsäure (1 gr in 100 ccm)		< 0.18		< 0.20		< 0.20	0.22	
0.5 $K_2Cr_2O_7$ + 1H_2SO_4 im Liter nach 1 Tage		0.35—0.40	0.35—0.40	0.35—0.40		0.35—0.40	0.47	
nach 100 Tagen		0.40—0.45	0.35—0.40	0.40—0.45		0.40—0.45		
HNO_3 (spezif. Gew. 1.44)		0.35—0.40		0.35—0.40		0.35—0.40	0.5	0.5
$AuCl_3$ (1 gr in 100 ccm)		0.40—0.45	0.40—0.45	0.40—0.45		0.40—0.45	0.5	0.500
n $HMnO_4$ + 1H_2SO_4		0.40—0.45		0.40—0.45		0.40—0.45	0.5	0.49

Tabelle 3. Grenzen oberflächlicher Einwirkung in Mol Au.

Legierungsreihe →	$\frac{Ag}{Cu} = \frac{1}{2}$	$\frac{Ag}{Cu} = 1$	$\frac{Ag}{Cu} = 2$
Lösungen von	weich	weich	weich
$(NH_4)_2 S_2$	0.30 →	0.26 →	0.25—0.30
$PdCl_2$	0.35 →	0.26—0.30	0.25—0.30
$Pd(NO_3)_2$	0.30 →	0.24—0.26	0.20—0.25
Pikrinsäure	0.25—0.30	< 0.20	< 0.20
0.5 $K_2Cr_2O_7$ + 1 H_2SO_4	0.45—0.50	0.50 →	0.45—0.50
HNO_3 (1.44)	0.45—0.50	0.55 →	0.45—0.50
$AuCl_3$	0.50 →	0.55 →	0.5 →

reicheren Legierungen mit natürlicher Oberfläche werden durch diese Lösungen nicht gefärbt, wohl aber ihre polierten Oberflächen. In dieser Hinsicht gleichen sich also die ternären Legierungen mit natürlichen Oberflächen und die binären mit polierten, auf denen die Verteilung der Atome in Unordnung gebracht ist.

In der Tab. 2 sind die Au-Gehalte angegeben, bis zu denen die tiefergehende Einwirkung in den drei Legierungsreihen vorschreitet. In der Tab. 3 sind die Au-Gehalte zusammengestellt, bis zu denen die oberflächliche Veränderung beobachtet wurde, ein Pfeil hinter der betreffenden Zahl weist darauf hin, daß die Untersuchung sich nur bis zu dem angegebenen Au-Gehalt erstreckt, daß also die Verfärbungsgrenze der Plättchen bei einem höheren Au-Gehalt liegt.

Vergleicht man die Au-Gehalte der Grenzen tiefer gehender Einwirkung der ternären Legierungen mit denen der binären Au-Cu- und Au-Ag-Legierungen, so ergibt sich, daß sie diese nicht erreichen.

Für die Einwirkung der Lösungen von $PdCl_2$ auf die Cu-Au-Legierungen liegt die Pd-Fällungsgrenze bei 0.25 Mol Au. In der Nähe dieser Grenze liegt auch die Fällungsgrenze durch die Ag-Au-Legierungen, aber diese fällen nicht nur Pd, sondern es bildet sich bei der Einwirkung auch AgCl, dessen Bildung bis etwa 0.5 Au zu verfolgen ist. Bei den ternären Legierungen wird durch die AgCl-Bildung die Pd-Fällung begünstigt und zu höheren Au-Gehalten als bei den binären Reihen verschoben. Wenn die Pd-Fällung durch AgCl-Bildung nicht unterstützt wird, wie bei der Einwirkung der Lösung von $Pd(NO_3)_2$, so liegt die Grenze stärkerer Einwirkung auf die ternären Mischkristalle unterhalb des Au-Gehalts der Einwirkungsgrenze der beiden binären Reihen, die hier für die Cu-Au-Reihe 0.25 und die Ag-Au-Reihe 0.24 Mol Au beträgt.

Eine $(NH_4)_2 S_2$-haltige Lösung wirkt unter Schwärzung auf die Cu-Au-Legierungen bis zu 0.245 Mol Au und auf die Ag-Au-Legierungen bis zu 0.32 Mol Au. Die ternären getemperten Legierungen werden nur bis zum Au-Gehalt von etwa 0.22 Mol Au geschwärzt, wie aus der Tab. 2 ersichtlich ist. Die Schwärzung nimmt auch hier wie bei den Ag-Au-Legierungen, wenn sie überhaupt eintritt, mit der Zeit langsam zu, bis das ganze, oder fast das ganze Plättchen schwarz geworden ist. Die Plättchen, deren Au-Gehalt zwischen den Grenzen oberflächlicher und tiefer gehender Einwirkung liegen, werden gelb bis gelbbraun gefärbt, wie die Ag-Au-Legierungen mit mehr als 0.32 Mol Au. Die Einwir-

kungsgrenze, die nach 2 Tagen deutlich zu erkennen ist, ändert sich im Verlauf von 100 Tagen nicht.

Die Pd-Fällung aus einer Lösung von $PdCl_2$ durch die ternären Legierungen vollzieht sich wie bei den binären Legierungen schnell; die nach einem Tage erreichte Grenze ändert sich im Lauf eines Monates nicht, nur die Menge des gefällten Pd nimmt in dieser Zeit zu. Am stärksten zu höheren Au-Gehalten ist diese Einwirkungsgrenze bei den Cu-reicheren Legierungen im Vergleich zu den binären Cu-Au-Legierungen verschoben.

Aus der Lösung des $Pd(NO_3)_2$ fällt nur das Plättchen mit 0.20 Au, $\frac{Ag}{Cu} = 1$, deutlich Pd; die Plättchen der beiden Cu-reicheren Reihen werden hell kupferrot und diese Färbung nimmt mit wachsendem Au-Gehalt ab. Die Plättchen der Ag-reichsten Reihe bleiben dagegen unverändert. Ob das Plättchen mit 0.20 Au Pd fällt, ist auch nach 100tägiger Einwirkung fraglich.

Die Einwirkung einer 1prozentigen Pikrinsäurelösung erstreckt sich bei den Cu-Au-Legierungen bis 0.22 Mol Au. Eine tiefergehende Einwirkung übt diese Lösung auf die drei Reihen der ternären Mischkristalle nicht aus, nur die Plättchen der Cu-reichsten Reihe mit 0.20 und 0.25 Au werden nach 4 Tagen in der Lösung dunkler, röter; im Laufe von weiteren 60 Tagen ändert sich aber diese Färbung nicht merklich.

Deutlich ist der Unterschied der Einwirkungsgrenzen ternärer und binärer Legierungen bei der Wirkung einer schwefelsauren Lösung der Chromsäure. Diese Lösung wirkt auf die Ag-Au-Legierungen bis 0.47 Au und auf die Cu-Au-Legierungen bis etwa zu derselben Grenze; auf die drei Reihen ternärer Legierungen wirkt sie nur bis etwa 0.37 Mol Au nach 10 Tagen. Diese Grenze wird schon nach einem Tage erreicht und ändert sich dann im Verlauf eines Monats nicht. Nach 3 Monaten hatten sich aber in den meisten Lösungen der Plättchen mit 0.40 Au einzelne Kristalle von Ag_2CrO_4 gebildet, wodurch die tiefergehende Einwirkung deutlich wird. Bei der Einwirkung werden die orangen Lösungen blau-grün oder grün und auf den Plättchen entstehen schön ausgebildete, tiefrote und auch undurchsichtige Kristalle von Ag_2CrO_4, wie an einem Ag-Plättchen in diesen Lösungen. Die Lösungen über den Plättchen mit 0.45 und 0.50 Mol Au werden auch in drei Monaten nicht merklich dunkler, aber die Plättchen selbst werden, wie erwähnt, gelb gefärbt.

Konzentrierte Salpetersäure von spezif. Gewicht 1.44 färbt die Plättchen der drei Reihen in einigen Stunden braun, die Au-

reichsten nur gelb. Nach zwei Monaten ist nur die Säure über den Plättchen bis 0.35 stark blau gefärbt, die Säure über den Au-reicheren Plättchen ist nur sehr schwach grünlich geworden. Es scheint also eine stärkere Einwirkung nur bis 0.35—0.40 Mol Au stattgefunden zu haben, während die oberflächliche Einwirkung über 0.50 und sogar auch über 0.55 Au zu bemerken ist.

Die Ag-Au-Legierungen fällen Au als braunes Pulver bis zum Au-Gehalt von 0.500 ± 0.005 Mol Au und für die Cu-Au-Legierungen ist dieselbe Fällungsgrenze wahrscheinlich. Dagegen ist diese Art der Au-Fällung, die schnell eintritt, bei den ternären Legierungen nur bei den Plättchen mit 0.40 und weniger Au zu beobachten. Die Plättchen mit 0.45 und 0.50 Au sind bei den ternären Legierungen schon nach zwei Tagen gelb, während bei den binären Legierungen eine Vergoldung der Plättchen mit mehr als 0.5 Au erst nach erheblich längerer Zeit eintritt.

Die Reduktion von Übermangansäure in saurer Lösung durch die ternären Legierungen wird von den mit 0.40 Au deutlich schneller (in einem Tage) bewirkt als von den mit 0.45 und mehr Au. Eine schärfere Grenze läßt sich hier nicht feststellen, weil die schwächere, oberflächliche Einwirkung sich an die tiefer gehende anschließt. Die oberflächliche Einwirkung erstreckt sich jedenfalls über den Au-Gehalt von 0.5 Mol hinaus, während sie bei den Ag-Au-Legierungen nur bis 0.5 Au reicht.

Fig. 1 gibt eine Übersicht der Grenzen tieferer Einwirkung auf die drei untersuchten ternären Mischkristallreihen in ihren Beziehungen zu einander und zu den der binären. Die Kurve *ABC* ist die früher erwähnte Grenzkurve zwischen den Feldern, in denen die Legierungen aus einer Art von ternären und aus zwei Arten ternärer Mischkristalle bestehen. Der Au-Gehalt der untersuchten drei Mischkristallarten ändert sich auf den drei Geraden $\frac{Ag}{Cu} = \frac{1}{2}$, 1 und 2. Die Mischkristalle gleicher Au-Atomzahlen liegen auf einer Geraden parallel der Seite Cu-Ag des gleichseitigen Dreiecks. Wenn die Einwirkungsgrenzen der ternären Mischkristalle von denen der binären nicht verschieden wären, so sollten sie auf den Parallelen zur Dreiecksseite Cu-Ag liegen, welche durch die Au-Atomzahlen $\frac{2}{8}$ und $\frac{4}{8}$ gehen; das ist aber nicht der Fall. Die Einwirkungsgrenzen des $PdCl_2$ liegen bei den ternären Legierungen bei höherem Au-Gehalt als die der binären, und für die Grenzen der tiefer gehenden Einwirkung der anderen Agentien gilt die umgekehrte Beziehung.

Bezüglich der tiefer gehenden Einwirkung sind die ternären

Legierungen also im allgemeinen edler als die binären Legierungen.

Die anfangs gestellte Frage, ob bei gleichem Au-Gehalt die ternäre Legierung edler oder unedler ist als die beiden binären wird durch diese Untersuchung dahin beantwortet, daß die Differenzen der Einwirkungsgrenzen der ternären und binären Legierungen von der Natur des Agens abhängen, also keine absoluten sind, und daß es ferner noch auf die Art der Einwirkung bei den ternären ankommt, ob dieselbe eine tiefer gehende oder nur eine oberflächliche ist. Auf spezielle unter Berücksichtigung dieser Verhältnisse gestellte Fragen geben das Diagramm Fig. 1 und die Tab. 2 und 3 Aufschluß.

Über die Farben der Au-Ag-Cu-Legierungen wurden bei Gelegenheit der Bestimmung ihrer Einwirkungsgrenzen einige Beobachtrngen gemacht, die in folgendem Übersichtsdiagramm Fig. 2

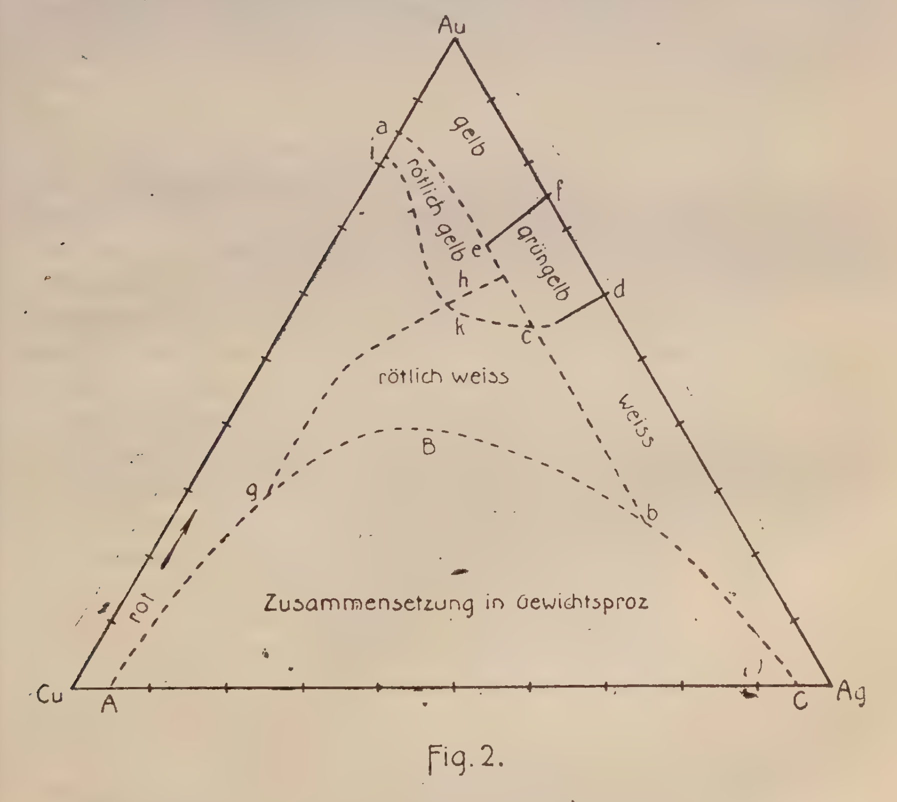


Fig. 2.

zusammengestellt sind. — Berücksichtigt sind nur die Farben der Legierungen, die aus einer Art von Mischkristallen bestehen. Die zwei Arten von Mischkristallen enthaltenden Legierungen weisen

Mischfarben auf, die sich aus denen ihrer beiden Mischkristalle zusammensetzen. Die Kurve *ab* gibt die Zusammensetzungen an, bei denen der letzte rötliche Stich bei abnehmendem Cu-Gehalt verschwindet, die Kurve *cd* bezieht sich auf das erste Auftreten der gelbgrünen Färbung, wenn in den Ag-reichen weißen Legierungen der Au-Gehalt wächst und die Kurve *ef* gibt das Verschwinden des grünlichen Tons bei wachsendem Au-Gehalt an. Die Lage der Kurve *gh*, die sich auf das Verschwinden des weißen Tons bei abnehmendem Ag-Gehalt bezieht, ist sehr unsicher, teils weil zu wenig Legierungen des betreffenden Gebietes zur Verfügung standen, teils weil es bei den in mehreren Farben schillernden Legierungen nicht möglich ist, das Verschwinden des weißen Tons zu erkennen. — Die Kurve *gh* soll auch daran erinnern, daß nur ein kleiner Teil der Legierungen zwischen der Cu-Au-Seite des Dreiecks und der Kurve *aecb* rot gefärbt ist. Schließlich gibt die Kurve *ik* das Verschwinden des gelben Tons bei abnehmendem Au-Gehalt an.

Diese Beschreibung der Farben der Legierungen bezieht sich auf die getemperten, weichen Legierungen. Die Farbe der kalt gewalzten harten Streifen ist zum Teil eine wesentlich andere.

Beim Auswalzen der linsenförmigen Reguli auf eine die ursprüngliche um das 10- bis 20-fache übertreffende Länge ändert sich die Farbe der Cu-Au-Legierungen nicht wesentlich; aber die Farbe der Ag-Au-Legierungen zwischen 60 und 75 % Au, die bei den weichen eine weiß-grünliche ist, wird mit zunehmender Streckung gelber, um schließlich in ein tiefes Gelb-Grün überzugehen. Dieses Auftreten einer mehr oder weniger intensiven Gelbfärbung in Folge der Bildung und Verschiebung von Kristalliten-Lamellen auf ihren Gleitflächen tritt auch bei den ternären Legierungen sehr deutlich auf. Denkt man sich die Kurve *ikcd* der verschwindenden Gelbfärbung der weichen Legierungen als Gummiband an ihren Punkten *i* und *d* festgehalten und sonst bis zur Grenzkurve *ABC* gedehnt, so hat man ein Bild der Farbenänderung der ternären Legierungen durch Kaltbearbeitung.

Die größten Unterschiede in der Färbung der harten und weichen Legierungen liegen bei folgenden Konzentrationen.

$\frac{Ag}{Cu}$	Mol Au	Gewichtsprozente Au	Ag	Cu	weich	hart
$\frac{1}{2}$	0.3	52	22	26	weißrot	gelbweiß
1	0.35	55	28	17	weiß	gelbgrün
2	0.40	58	32	10	weißgrünlich	grüngelb.

Die Farbe dieser Legierungen hängt in hohem Maße vom Grade der Kaltbearbeitung ab. Eine Streckung auf die doppelte Länge eines weichen Plättchens bewirkt schon das deutliche Auftreten eines gelben Farbentones. Die Bestimmung des Einflusses verschiedener, bestimmter dauernder Deformationen auf die Farbe der Legierungen wäre erwünscht.

Dem Künstler, der Zeichnungen zur Herstellung von Schmuckgegenständen zu entwerfen hat, wäre der Gebrauch eines Farbendreiecks der Au-Ag-Cu-Legierungen zu empfehlen. Dieses gleichseitige Dreieck von 100 mm Seitenlänge würde an jedem Punkt die Farbe der Legierung tragen, deren Zusammensetzung diesem Punkt entspricht. Der Künstler würde durch eine solche Tafel einen Überblick über alle ihm zu Gebote stehenden Farben bekommen, sich die brauchbaren wählen können und wäre dann im Stande auch die Zusammensetzung der Legierung, welche die gewählte Farbe besitzt, anzugeben. Er brauchte nur die Abstände des gewählten Farbenpunktes von den Dreiecksseiten zu messen; die in mm gemessenen Längen sind gleich den Gewichtsprozenten der drei Legierungsbestandteile. Würde der Künstler über zwei Farbendreiecke für weiche und harte Legierungen verfügen, so könnte er seinen Wünschen entsprechend alle genaueren Angaben über die Zusammensetzung und die Bearbeitungsart und das ihr folgende Tempern der Arbeitsstücke machen.

Das erste Farbendreieck wäre wohl mit den Legierungsplättchen selbst, deren Gehalt bekannt sein müßte, zu bedecken, dann könnte die Bemalung eines Dreiecks nach dieser Vorlage ausgeführt werden und die Kopie könnte durch Druck vervielfältigt werden.

Allerdings könnten solche Drucke die Farben und den Schiller bei verschiedener Inzidenz des beleuchtenden Lichtes nicht wiedergeben, daher hätten vor gemalten oder gedruckten Farbendreiecken die durch Aneinanderlegen von Legierungsstücken hergestellten Dreiecke einen großen Vorzug.

Zur Deutung der Resultate. In den normalen, binären Mischkristallen sind die beiden Atomarten in der Weise verteilt, daß die Verteilung der Gittersymmetrie bei bestmöglicher Durchmischung entspricht. Aus diesen Verteilungen lassen sich, wie früher gezeigt wurde, die Einwirkungsgrenzen verschiedener Gruppen von Agentien ableiten. Es treten nämlich bei diesen bestimmten Verteilungen in den Gittern der Ag-Au- und Cu-Au-Mischkristalle Gittergerade parallel den Körperdiagonalen auf, die nur mit aktiven, Cu- oder Ag-Atomen besetzt sind, wenn der Au-Gehalt

unter $\frac{4}{8}$ Mol sinkt. Sinkt er unter $\frac{2}{8}$ Mol, so treten Paare von benachbarten, nur mit aktiven Atomen besetzten Gittergeraden jener Richtungen auf, und sinkt der Au-Gehalt unter $\frac{1}{8}$ Mol, so treten Gruppen von je vier benachbarten nur mit aktiven Atomen besetzten Gittergeraden eben derselben Richtungen auf. Dringt die Wirkung verschiedener Agentien nur auf diesen Gruppen mit verschiedenen Zahlen von Geraden ins Innere der Mischkristalle ein, so folgt, daß die Einwirkungsgrenzen verschiedener Agentien Au-Gehalten entsprechen werden, die ganzzahlige Vielfache von $\frac{1}{8}$ sind.

Die Verteilung von drei Atomarten im 14-Punkt-Gitter, dessen Gitterelement ein Würfel ist, dessen Ecken und Seitenmitten mit Atomen besetzt sind, läßt sich nicht entsprechend der Gitter-Symmetrie bei bestmöglicher Durchmischung ausführen. Daher läßt sich auch die Verteilung selbst nicht genauer angeben. Es ist wahrscheinlich, daß die drei Atomarten in kleineren Gitter-Bezirken mehr oder wenig gleichförmig verteilt sein werden. Diese Gitterbezirke würden sich ihrer Resistenz nach unterscheiden. Die resistenteren Gitterbezirke würden die weniger resistenten vor der Einwirkung des Agens schützen, in Folge dessen kann die Grenze tiefer gehender Einwirkung einer ternären Mischkristall-reihe bei kleinerem Au-Gehalt liegen als die der binären Reihe. Bei diesem Aufbau ternärer Mischkristalle ist eine scharfe Einwirkungsgrenze nicht zu erwarten, da ein Teil der Gitterbezirke noch widerstandsfähig, ein anderer Teil es aber nicht mehr ist. Die mitgeteilten Erfahrungen über die Einwirkungsgrenzen ternärer Mischkristalle entsprechen also den allgemeinen Sätzen über die Verteilung von zwei und drei Atomarten im 14-Punkt-Gitter, die für die ternären Reihen die Möglichkeit verneinen, daß ihre Einwirkungsgrenzen wie die der binären bei Vielfachen von $\frac{1}{8}$ Mol Au liegen, und andererseits die Vermutung zulassen, daß bei den ternären Mischkristallreihen die Einwirkungsgrenzen sehr viel weniger scharf sein werden als bei den binären Reihen.

Die Goldgehalte, bis zu denen die Kupfer-Gold- und Silber-Gold-Mischkristalle bei Einwirkung chemischer Agentien sich verändern.

Von

G. Tammann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 26. Oktober 1917.

Es wurde früher[1]) gefunden, daß der Goldgehalt, bis zu dem die Cu-Au- und die Ag-Au-Legierungen verändert werden, für verschiedene Gruppen chemischer Agentien ein sehr verschiedener ist. Gibt man den Goldgehalt durch die Quotienten: die Anzahl der Gold-Atome dividiert durch die Anzahl aller in der Legierung vorhandenen Atome an, so ergibt sich, daß diese Molenbrüche ganzzahlige Vielfache des Bruches $\frac{1}{8}$ sind.

Da es in jener Arbeit vor allem darauf ankam, einen Überblick über die Abhängigkeit der Einwirkungsgrenzen von der Natur der chemischen Agentien zu erhalten, so konnte auf die Genauigkeit der Bestimmungen jener Grenzen kein besonderes Gewicht gelegt werden. Die Einwirkungsgrenzen wurden damals zwischen je zwei Konzentrationen eingeschlossen, deren Differenzen für die häufig auftretende Einwirkungsgrenze von $\frac{2}{8}$ Mol Au etwa 0.02 Mol Au und für die Einwirkungsgrenze von $\frac{4}{8}$ Mol Au 0.05 bis 0.1 Mol Au betrugen.

Nachdem ein Überblick über die Einwirkungsgrenzen verschiedener Agentien gewonnen war, wurde eine genauere Bestimmung derselben notwendig. Vor allem kam es auf die Feststellung an, ob es Einwirkungsgrenzen gibt, die genaue Multipla von $\frac{1}{8}$ Mol Au sind, und um welche Beträge die sicher zu bestimmenden Einwirkungsgrenzen sich von $\frac{n}{8}$ Mol Au unterscheiden.

1 Nachrichten der Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1916 S. 199.

Die Einwirkungsgrenzen chemischer Agentien auf eine Mischkristallreihe lassen sich durch Beobachtung der Veränderungen ihrer Oberfläche um so genauer feststellen, je glatter und gleichmäßiger die ursprünglichen Oberflächen sind. Dieser Anforderung entsprechen die Legierungen des Au mit Cu und Ag; dieselben lassen sich leicht herstellen und zu dünnen Streifen walzen. Dazu kommt, daß im Intervall des Au-Gehaltes, in dem die Veränderungsgrenze der Plättchen liegt, die Farbe der Plättchen sich nicht merklich ändert.

Von besonderer Bedeutung für die Bestimmung der Einwirkungsgrenzen ist die Homogenität der untersuchten Legierungen.

Homogenisierung von Konglomeraten aus Mischkristallen.

Bei der Kristallisation von Mischkristallen stellt sich im allgemeinen eine Differenz der Konzentrationen der Schmelze und des aus ihr sich ausscheidenden Mischkristalles her. Die zuerst ausgeschiedenen Mischkristalle sind reicher an dem Bestandteil, durch dessen Zusatz zur Schmelze die Temperatur des Beginns der Kristallisation erhöht wird, als die folgenden auf ihnen sich abscheidenden Schichten. Auch wenn diese Konzentrationsdifferenz eine geringe ist, wird bei zu schneller Kristallisation die Konzentration jenes Bestandteiles von den Kristallisationszentren, den angenäherten geometrischen Zentren der Kristallite, nach den peripheren Teilen hin abnehmen. Je langsamer die Kristallisation sich vollzieht, desto größer werden die einzelnen Kristallite, desto mehr gleichen sich aber auch die Konzentrationsunterschiede einzelner Schichten aus. Je schneller die Kristallisation vor sich geht, desto kleiner sind die Kristallite, desto größer aber auch die Konzentrationsunterschiede. Bei einem großen Kristallit ist der Diffusionsweg, den bei der Homogenisierung die Atome der Bestandteile zurückzulegen haben, größer als bei einem kleinen Kristalliten. Dafür ist aber auch bei dem großen Kristalliten das Konzentrationtgefälle kleiner als bei den kleinen Kristalliten. Welche Art der Darstellung eines Konglomerates, langsame Kristallisation oder schnelle Kristallisation mit ihr folgendem Tempern, schneller zu einem Konglomerat bestimmter Homogenität führt, ist im einzelnen Fall zu ermitteln. Man würde sich eine diesbezügliche Untersuchung wesentlich erleichtern, wenn man die Konzentration des Konglomerates ein wenig unterhalb der Resistenzgrenze g_1 wählt, weil hier die Konzentrationsunterschiede durch

geeignete Agentien besonders deutlich und während längerer Zeiten sichtbar gemacht werden können.

Denkt man sich durch das Konglomerat eine Ebene gelegt und auf einer Geraden x dieser Ebene ihre Schnittpunkte mit den Grenzen der Kristallite durch die Punkte a markiert, so kann man die Konzentrationsschwankungen im Konglomerat längs jener Geraden durch die Wellenlinie der Fig. 1 veranschaulichen. Beispielsweise werden bei den Ag-Au-Legierungen die Kristallitenzentren Au-reicher sein als die peripheren Teile. Der Gesamt-Goldgehalt des Konglomerates entspricht der Lage der x-Achse. Die Abweichungen von diesem an einzelnen Orten sind senkrecht zur x-Achse aufgetragen. In den mittleren Teilen der Kristallite, also auch auf den der Strecken aa, wird der Au-Gehalt größer als der Gesamtgehalt, an den peripheren Teilen kleiner sein. Die Summe der Flächenstücke zwischen der Wellenlinie und der x-Linie wird für eine hinreichende Anzahl von Kristalliten null sein. Die Abweichungen im Au-Gehalt vom mittleren Au-Gehalt für eine Ebene durch das Konglomerat stellt eine Wellenfläche dar. Die Summe der Räume zwischen ihr und der Ebene wird natürlich ebenfalls null sein müssen.

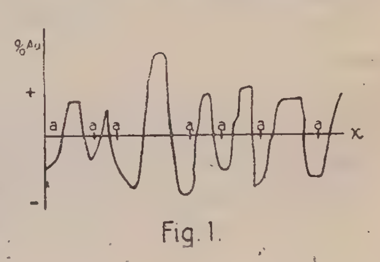


Fig. 1.

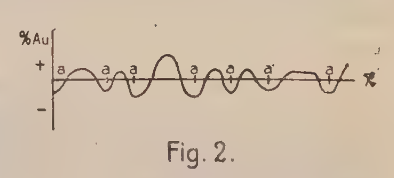


Fig. 2.

Beim Tempern werden in Folge der Diffusion die Konzentrationsunterschiede verschiedener Stellen sich ausgleichen und die Wellenlinie wird sich abflachen (Fig. 2) und zwar um so schneller, je höher die Temperatur ist, bei der getempert wird, bis die Wellenlinie schließlich in die Gerade x übergeht.

Wenn sich bei der Kristallisation insbesondere als Folge von Saigerung Nester von Kristalliten abweichender Zusammensetzung bilden, so wird hierdurch die Homogenisierung des Konglomerates wesentlich erschwert werden. In solchen Fällen empfiehlt sich die schnelle Abkühlung, ja sogar das Abschrecken der Schmelzen, um durch darauf folgendes Tempern die Homogenisierung zu erreichen.

Walzt man ein Konglomerat, dessen Konzentrationsdifferenzen denen der Fig. 1 entsprechen mögen, so werden Schichten der einzelnen Kristallite gegeneinander verschoben, aus jedem Kristalliten ent-

steht ein Plättchen ähnlich der ganzen durch Walzen erzeugten Platte, wenn das Walzstück und die Kristallite einander ähnlich sind. Der Diffusionsweg wird senkrecht zur Walzrichtung sehr erheblich verkleinert und das Konzentrationsgefälle im Allgemeinen vergrößert. Beide durch das Walzen bewirkten Aenderungen wirken auf die Homogenisierung beschleunigend, kürzen also die Temperzeit ab.

Außerdem werden durch das Walzen die bei der Kristallisation in Folge der Volumenverkleinerung entstehenden Spalten zwischen einzelnen Gruppen von Kristalliten geschlossen und dadurch wird für diese teilweise abgetrennten Gruppen der Stoffaustausch mit den ihnen benachbarten begünstigt oder ermöglicht. Man erreicht, daß durch Walzen, Ziehen oder Schmieden die Homogenisierung eines Kristallitenkonglomerates bei nachfolgendem Tempern erheblich begünstigt wird.

Die Prüfung dieser Schilderung der Homogenisierungsbedingungen eines Kristallisationskonglomerates war nicht der Zweck der folgenden Versuche, auf dem Wege zu ihrem Ziel wurden aber mehrfach Beobachtungen gemacht, welche jene Schilderung des Vorganges selbst bestätigen. Die Möglichkeit der Prüfung jener Schilderung ergibt sich eigentlich erst, was nochmals betont werden darf, durch die Wahl der Zusammensetzung der Legierungen, deren Goldgehalt in der Nähe der Resistenzgrenze g_1 liegen muß. Denn die Legierungen mit größerem Au-Gehalt als g_1 werden durch die betreffenden Agentien nicht angegriffen und auf Legierungen mit einem Au-Gehalt, der erheblich kleiner als der von g_1 ist, wirken die Agentien so schnell, daß der Zeitraum für die Beobachtung der Veränderung sehr klein wird. Außerdem ist zu Beginn der Einwirkung die Gegenwart fremder Stoffe auf der Oberfläche, wie die von dünnen Luft- und Fettschichten von größtem Einfluß auf die Geschwindigkeit der anfänglichen Wirkung, derselbe tritt aber mit der Verlängerung der Beobachtungszeit zurück und verschwindet bei sehr langer Einwirkungsdauer.

Bei der Einwirkung eines Agens, das nur die Cu- oder Ag-Atome, nicht aber die Au-Atome löst, wie bei der Einwirkung von Salpetersäure, findet man, daß die Legierungen mit mehr als $\frac{4}{8}$ Mol Au nicht merkliche Mengen von Cu oder Ag an die Salpetersäure abgeben, und daß die Legierungen von 0 bis $\frac{3}{8}$ Mol Au alles Cu oder Ag verlieren, während die Legierungen von $\frac{3}{8}$ bis $\frac{4}{8}$ Mol Au nur einen Teil ihres Cu oder Ag an die Salpetersäure abgeben. Die zweite Einwirkungsgrenze $g_2 = \frac{3}{8}$ Mol Au kann durch Bestim-

mung der Oberflächenveränderung mit bloßem Auge oder mit dem Mikroskop bei homogenen Mischkristallkonglomeraten naturgemäß nicht festgestellt werden. Wenn aber die Legierungen nicht hinreichend lange getempert sind, also nicht homogen sind, dann kann man sehr deutlich teilweise Veränderungen der Oberflächen beobachten, die bei der Einwirkungsgrenze $g_1 = \frac{4}{8}$ bis in die Nähe der Grenze $g_2 = \frac{3}{8}$ und bei der Einwirkungsgrenze $g_1 = \frac{2}{8}$ bis in die Nähe von $g_2 \doteq \frac{3}{16}$ Mol Au sich erstrecken. Der Grund hierfür ist der, daß sich in den nicht homogenen Legierungen zwischen $\frac{4}{8}$ und $\frac{3}{8}$, sowie zwischen $\frac{2}{8}$ und $\frac{3}{16}$ Mol Au Kristallite finden, deren Au-Gehalt den der Grenzen g_1 ein wenig übertrifft. Auf den Oberflächen der gewalzten Reguli treten die Stellen, an denen sich ein zu Au-reicher Kristallit befand, nach Einwirkung des Agens als blanke Streifen auf dem veränderten Grund auf. Die angenäherten Au-Gehalte, bis zu denen solche unveränderte Streifen beobachtet wurden, sind für die früher[1]) untersuchten Legierungen seinerzeit angegeben worden. Eine andere Bedeutung als ein Maß der Inhomogenität dieser Legierungen kommt ihnen, wie vermutet wurde nicht zu. Bei längerem Tempern verschwinden diese unveränderten Streifen.

Die Einwirkung einer Lösung von Goldchlorid auf die Ag-Au-Legierungen mit 0.49 bis 0.51 Mol Au.

Bei diesen Legierungen wurde der Einfluß der Zeitdauer des Temperns auf ihre Homogenisierung untersucht.

Nach dem Zusammenschmelzen von je 5 gr der Legierungen im Kohlerohr und gewöhnlichen Abkühlung wurden die linsenförmigen Reguli zu Plättchen von 0.1 mm Dicke gewalzt, in Streifen von etwa 12 mm Länge und 2 mm Breite geschnitten und in Probiergläsern mit je 1 ccm einer Lösung von 2 gr Au in 100 ccm eingeschmolzen.

Nach zwei Stunden hatten sich durch Fällung von fein verteiltem Golde auf den Plättchen dunkle Streifen, die in der Richtung der Walzrichtung verliefen, gebildet. Die Größe der braun gefärbten, mit fein verteilten Au bedeckten Oberfläche nahm mit wachsendem Au-Gehalt schnell ab. Im Verlauf von 7 Tagen nahm die Breite der braunen Streifen langsam zu und änderte sich im Verlauf von weiteren sechs Monaten nicht mehr merklich.

Auf dem Plättchen mit 0.490 Au sind zahlreiche helle Streifen

1) Nachrichten l. c.

auf braunem Grunde dem unbewaffneten Auge sichtbar. Die hellen Streifen entsprechen den lang gestreckten und verbreiterten Au-reichen Kristallitenkernen, die offenbar mehr als 0.50 Au enthalten, da sie Au nicht fällen. Der durch fein verteiltes Au braun gefärbte Grund entspricht den peripheren Teilen der deformierten Kristallite mit einem Au-Gehalt unter 0.50 Mol Au.

Auf dem Plättcheu mit 0.495 Au ist die Breite der hellen und braunen Streifen ungefähr dieselbe, auf dem Plättchen mit 0.505 Au finden sich feine braune Streifen auf hellem Grunde, und auf dem Plättchen mit 0.51 Au sind die braunen Streifen feiner und weniger zahlreich.

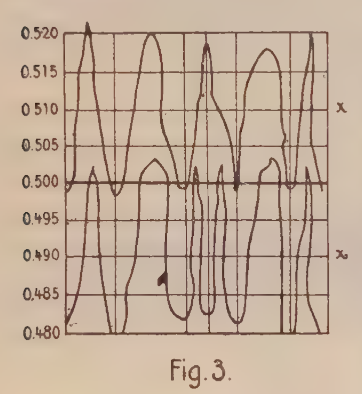


Fig. 3.

In Fig. 3 sind die Schwankungen des Au-Gehaltes auf einer Geraden der Oberfläche der gewalzten Plättchen, senkrecht zur Walzrichtung, dargestellt, für das Plättchen mit 0.490 Au durch die untere, für das mit 0.510 Au durch die obere Kurve. Die Breiten der hellen und braunen Streifen auf einer Geraden senkrecht zur Walzrichtung sind auf der Horizontalen 0.500 Mol Au Fig. 3 abzutragen. Durch diese Punkte muß die Kurve des Au-Gehaltes auf jener Geraden gehen. Da ferner die Wellenlinie des Au-Gehaltes so verlaufen muß, daß die Summe der Flächenstücke zwischen dieser Linie und der Horizontalen 0.490 resp. 0.510 Au gleich null ist, so läßt sich die Wellenlinie, wenn auch nicht ganz richtig, so doch angenähert richtig ziehen. Während beim Plättchen mit 0.490 Au die Stücke der Geraden bei 0.500 Au, die unter den Höhen der Wellenlinie liegen, hell sind, sind bei dem Plättchen mit 0.510 Au die Stücke der Geraden bei 0.500 Au, die über den Tälern der Wellenlinie liegen, braun gefärbt. Die Breite der Kristalliten ist in Fig. 3 verdreifacht und für beide Plättchen ist die Welleneinie von Kristalliten gleicher Breite dargestellt.

Man kann also auf Grund ganz einfacher Versuche ein recht langenähertes Bild von der Verteilung des Au in einer Ag Au-Legierung erhalten, wenn ihr mittlerer Au-Gehalt der betreffenden Resistenzgrenze g_1 angenähert entspricht.

Nach den Versuchen mit den vier Plättchen zu urteilen, würden bei 0.515 Au die braunen Streifen und bei 0.485 Au die hellen Streifen verschwinden. Daraus folgt, daß nach gewöhnlicher Kühlung, bei der in 15 Min. das Temperaturintervall von 1000—300°

durchlaufen wird, ein AgAu-Regulus nicht Stellen aufweist, die um mehr als ± 0.015 Mol Au oder 0.75 % Au vom mittleren Au-Gehalt abweichen.

Aus dem von Jänecke oder von Raydt für die Ag-Au bestimmten Kristallisationsintervalle ergibt sich, daß der Mischkristall mit 0.50 Au 6 % Au mehr enthält als die Schmelze, aus der er sich bildet. Die Bestimmung der Konzentrationsdifferenz zwischen Mischkristall und Schmelze auf Grund von Abkühlungskurven ergibt also eine viel größere Differenz im Au-Gehalt, als sie im erkalteten Konglomerate zwischen den zuerst gebildeten Kristalliten-Kernen und ihren äußeren Schichten bestehen. Die während der Kristallisation sich ausbildenden großen Differenzen im Au-Gehalt gleichen sich also während der Kristallisation und bald nach ihrer Beendigung in diesem Falle in auffallend kurzer Zeit in sehr erheblicher Weise aus.

In der beschriebenen Weise könnte der Einfluß der Abkühlungsgeschwindigkeit auf die Homogenität des erhaltenen Konglomerates bequem verfolgt werden.

Nachdem die Plättchen 4 Stunden bei 700° getempert waren, wurden sie mit je 1 ccm der früher angewandten Au-Lösung in Probiergläsern eingeschmolzen. Nach 2 Tagen hatten sich auf den Plättchen mit 0.49 und 0.495 Au deutliche, hellbraune Flecken gebildet, während auf den Plättchen mit 0.505 und 0.51 Au bräunliche Stellen nur auf den oberen Seiten der Plättchen zu bemerken waren. Nach 3 Monaten war die Fällung auf dem Plättchen mit 0.49 Au sehr deutlich, auf dem folgenden nur hauchartig in Flecken und stärker auf der Oberseite; zwischen diesem und dem folgenden Plättchen war der Unterschied nur gering, während auf dem Plättchen mit 0.51 Au der braune Anflug nur auf der Oberseite vorhanden war. Da in den Gläsern geringe Staubmengen vorhanden waren, fand in den Lösungen eine geringe Au-Reduktion statt, und dieses Au hat sich wohl auf den Oberseiten der Plättchen abgeschieden.

Der Unterschied bei der Einwirkung der Au-Lösung auf die ungetemperten und die getemperten Legierungen ist sehr deutlich. Aber das 4-stündige Tempern bei 700° reicht noch nicht hin, um die Konzentrationsdifferenzen ganz zum Verschwinden zu bringen, Differenzen von 0.005 Mol Au sind noch verblieben und die Resistenzgrenze 0.50 ist auch um diesen Betrag überschritten worden.

Nach weiterem 15-stündigen Tempern bei 900° waren die maximalen Konzentrationsdifferenzen unter 0.005 Mol Au gesunken, denn die Plättchen mit 0.49 und 0.495 Au waren nach 3 Tagen ziemlich gleichmäßig mit einem braunen Hauch bedeckt, während den Plätt-

chen mit 0.505 und 0.51 Au dieser Hauch fehlte, allerdings waren sie ein wenig gelber geworden, aber es ist wohl möglich, daß es sich hierbei nur um eine Ablagerung von in der Lösung reduziertem Au handelt.

Eine andere Reihe von Plättchen, die 40 Stunden bei 900° getempert waren, ergab folgende Veränderungen in derselben Au-Lösung. Die Plättchen mit natürlicher Oberfläche und einem Au-Gehalt von 0.480, 0.490 und 0.495 Au waren nach 24 Stunden mit einem braunen Hauch bedeckt, dessen Stärke mit wachsendem Au-Gehalt abnahm. Nach dieser Einwirkungszeit waren die Plättchen mit 0.505, 0.510 und 0.520 Au unverändert. Nach 8 Tagen war die Bräunung deutlicher geworden, die Plättchen mit mehr als 0.5 Au aber unverändert. Nach 2 Monaten war die Bräunung kaum weiter vorgeschritten, die Plättchen mit mehr als 0.5 Au waren aber gelber geworden.

Mit feinstem Schmirgelpapier polierte Plättchen waren bis 0.5 Au blind und bräunlich nach 24 Stunden geworden, während sich die Au-reicheren nicht verändert hatten. Nach 2 Monaten waren auch die Au-reicheren bräunlich und blind geworden, allerdings war ihre Veränderung bedeutend schwächer als bei den Au-ärmeren. Außerdem war ihre Farbe erheblich gelber geworden. Die beim Polieren vorgenommene Durchmischung der Ag- und Au-Teilchen reicht also hin, um die Resistengrenze besonders bezüglich einer längeren Einwirkung zu verwischen und ihre Oberflächenschichten reaktionsfähiger als die der Plättchen mit natürlicher Oberfläche zu machen.

Die Geschwindigkeit der Au-Fällung hängt außerdem noch von der HCl-Konzentration der Lösung ab. Die Lösungen, deren Einwirkungen beschrieben wurden, waren hergestellt aus dem metallisches Au enthaltenden Rückstande einer zur Trockne eingedampften Lösung. Eine Lösung, die auf 10 gr Au etwa 0.1 Mol HCl im Liter enthält, wirkte viel langsamer. Nach 14 Tagen war eine deutliche Au-Fällung auf dem Plättchen mit 0.480 Au entstanden, eine weniger deutliche auf dem mit 0.490 Au, während das Plättchen mit 0.495 Au und die folgenden sich nicht verändert hatten. Nach 2 Monaten waren auf den oberen Flächen der Plättchen Au-Spiegel entstanden; die unteren Flächen der Plättchen mit weniger als 0.5 Mol Au waren verändert, nicht aber die der Plättchen mit mehr als 0.5 Mol Au.

Die Resistenzgrenze g_1 der nicht getemperten Ag-Au-Legierungen gegen die Einwirkung einer $AuCl_3$-Lösung liegt bei 0.52

Mol Au. Nach 4stündigem Tempern bei 700° sinkt sie auf 0.507 und nach 15stündigem Tempern bei 900° auf 0,500 ± 0.005 Mol Au.

Die Einwirkung einer Lösung von $PdCl_2$ (4 % $PdCl_2$) auf Cu-Au-Legierungen mit 0.23 bis 0.27 Mol Au.

Die beiden genau abgewogenen Metallmengen wurden im Kohlerohr zusammengeschmolzen, mit Holzkohlepulver bedeckt und bei 870° 1 Stunde getempert. Die linsenförmigen Reguli wurden gewalzt und 12 Stunden im H_2-Strom auf 720° erhitzt.

Vor diesem Tempern zeigten die Plättchen im harten Zustande noch erhebliche Konzentrationsdifferenzen. Die Pd-Fällung war auf ihren Oberflächen nicht gleichmäßig verteilt, auch nahm die Menge des gefällten Pd nicht bei allen Plättchen mit wachsendem Au-Gehalt ab. Der Hauptteil der Oberflächen war mit einem grauen Spiegel bedeckt, aber an vielen Stellen hatten sich auch blinde Flecken reichlicherer Pd-Fällung gebildet, vor allem auf den Plättchen mit 0.240, 0,245, dann aber auch auf einer Seite des Plättchens mit 0.260 Au, während die blinden Flecke auf Plättchen mit 0.255 Au fehlten. Die Pd-Fällung war nach 3 Stunden schon sehr deutlich, und die nach 3 Tagen eingetretene Veränderung der Plättchen änderte sich im Laufe von 3 Monaten nicht mehr merklich.

Nach dem Tempern war eine Pd-Fällung nur auf den Plättchen mit 0.230, 0.240 und 0.245 Au wahrzunehmen, nicht aber auf den mit 0.255, 0.260 und 0.270 Au. Schon nach einstündiger Einwirkung der Lösung war diese Grenze zu beobachten und nach zweimonatlicher Einwirkung waren die Plättchen mit mehr als 0.25 Au noch ohne jede sichtbare Pd-Fällung. Auf den Plättchen mit weniger als 0.25 Au hatten sich außer einem grauen Spiegel noch matte graue Stellen reichlicherer Pd-Fällung gebildet; die Gesamt-Fläche dieser Stellen nahm mit wachsendem Au-Gehalt deutlich ab und auch die Dicke des grauen Spiegels. Nach 4 Monaten hatte sich auf dem Plättchen mit 0.255 Mol Au ein sehr dünner Spiegel gebildet und ein solcher war auch auf der einen Seite des Plättchens mit 0.27 Au entstanden, während das Plättchen mit 0.260 Mol Au noch unverändert war. Wurden diese Plättchen poliert, so war im Laufe des ersten Monats der Einwirkung der Pd-Lösung nur auf den Plättchen mit weniger als 0.25 Au Pd-Fällung eingetreten; nach zwei Monaten hatte sich aber auch auf den Plättchen mit 0.255 und 0.260 Au ein grauer spiegelnder Hauch gebildet, und das Plättchen mit 0.270 Au war deutlich dunkler geworden. Die Pd-Fällung ist auf den polierten

Flächen im allgemeinen gleichmäßiger als auf den nicht polierten. Durch das Polieren werden also Unterschiede in der Zusammensetzung benachbarter Kristallite verwischt.

Die Plättchen mit natürlichen, durch Polieren oder Schaben nicht veränderten, Oberflächen fällen also nur bis zum Au-Gehalt 0.250 Mol Au Palladium aus der $PdCl_2$-Lösung und diese Grenze ist bei einer Differenz im Au-Gehalt von weniger als 0.005 Mol Au dem unbewaffneten Auge noch deutlich wahrnehmbar.

Betreffs der Veränderungsart der natürlichen Oberflächen ist zu betonen, daß dieselbe keine gleichmäßige war. Während der Hauptteil der Plättchen mit einem nicht ganz gleichmäßigen Pd-Spiegel bedeckt war, dessen Dicke mit zunehmendem Au-Gehalt deutlich abnimmt, treten auch Stellen stärkerer Pd-Fällung, matte Flecken auf, welche offenbar Kristallitennestern mit einem abnorm kleinen Au-Gehalt entsprechen. Die Art der Pd-Fällung, spiegelnd oder matt, zeigt also mit großer Empfindlichkeit Schichten verschiedenen Au-Gehaltes an.

Die Grenze der Pd-Fällung, Bildung eines Pd-Spiegels, könnte bei einem noch geringeren Unterschiede als 0.005 Au von der Fällungsgrenze deulich beobachtet werden. Nach längerer Zeit (4 Monaten) machte sich allerdings eine sehr schwache Spiegelbildung an einzelnen der Plättchen mit mehr als 0.25 Au bemerkbar. Ueber die Ursachen dieser so langsam eintretenden Pd-Fällung könnten nur lang dauernde Versuche Aufschluß geben, entweder wird sie durch geringe Inhomogenitäten oder durch sehr langsamen Platzwechsel von Au- und Cu-Atomen bedingt.

Die Einwirkung von $Pd(NO_3)_2$ auf die Ag-Au-Legierungen.

Die Lösung von etwa 1 gr $Pd(NO_3)_2$ in 100 ccm Wasser enthielt keine überschüssige HNO_3, sondern vielleicht $Pd(OH)_2$. Nach einem Tage war an den Plättchen mit 0.23 und 0.24 Au deutliche Pd-Fällung sichtbar, nach 14 Tagen hatten sich auch auf dem Plättchen mit 0.245 Au graue Streifen gebildet, aber auch nach 60 Tagen waren die Plättchen mit 0.255 und 0.260 Au noch unverändert. Die Einwirkungsgrenze liegt also zwischen 0.245 und 0.255 Au. Eine Lösung von $PdCl_2$ verändert auch die Plättchen mit mehr als 0.25 Au, es entsteht hierbei AgCl wie bei der Wirkung vieler Chloride, die Cl leichter verlieren, doch scheint die Pd-Fällung nur bis 0.25 Au sich zu erstrecken.

Die Einwirkung von $PtCl_2$ auf die Cu-Au- und Ag-Au-Legierungen.

Eine gesättigte Lösung des schwerlöslichen $PtCl_2$ wirkt auf die Cu-Au-Legierungen fast ebenso ein wie auf die Ag-Au-Legierungen. Nach einem Tage waren auf den Plättchen mit 0.23 und 0.24 Au deutliche graue Flecke zu erkennen, während die Au-reicheren noch unverändert waren. Nach 3 Tagen waren diese Veränderungen auch auf den Plättchen mit 0.245 Au zu erkennen, während auch nach 60 Tagen die Au-reicheren Plättchen noch kaum verändert waren.

Auf den veränderten Stellen der Ag-Au-Plättchen haften die Partikel des ungelösten $PtCl_2$ nach etwa 8 Tagen ziemlich fest. Nach 14 Tagen war das Ag-Au-Plättchen mit 0.23 Au mit diesen Partikeln ganz bedeckt; diese Bedeckung nahm auf den Plättchen mit 0.24 und 0.245 Au stark ab, aber nach 14 Tagen hafteten an einzelnen wenigen Stellen des Plättchens mit 0.255 und 0.26 Au ebenfalls wenn auch wenige Teilchen, was auf eine wenn auch schwache Veränderung dieser Stellen deutet. Dieser Unterschied zwischen den Plättchen mit weniger und mehr als 0.25 Au blieb auch nach 10 Tagen bestehen. Auch hier scheint mit der Zeit die Einwirkung des Cl auf die Ag Au-Legierungen mit mehr als 0.25 Au sich geltend zu machen. Die Grenze der Pt-Fällung liegt bei beiden Legierungsreihen zwischen 0.245—0.255 Au.

Über die Einwirkung einer Lösung von 2HCl, $PtCl_4$ auf die Ag-Au-Mischkristalle ist zu sagen, daß sie auf die Legierungen mit 0.48 und mehr Au auch in 4 Monaten nicht merklich einwirkt, sogar ein Blindwerden der Plättchen in Folge von Ag Cl-Bildung war nicht zu bemerken. Da früher auf die Plättchen mit 0.401 und 0.452 Au bei der Einwirkung dieser Lösung blinde Flecke beobachtet wurden, so liegt die Grenze der Cl-Wirkung in der 2HCl, $PtCl_4$-Lösung zwischen 0.452—0.480 Mol Au.

Die Wirkung von schwefelhaltigen Agentien auf die Cu-Au-Mischkristalle.

Nach früheren [1]) Versuchen wirken schwefelhaltige Agentien: Lösungen von $(NH_4)_2S_2$, Na_2S und Schwefel in CS_2 auf die Cu Au-Mischkristalle in der Art ein, daß Plättchen mit 0.176, 0,208 und 0.243 Mol Au vollständig oder zum Teil geschwärzt werden, während Plättchen mit 0.282, 0.326, 0.372 und mehr Au bei dauernder

1) Nachrichten der Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1916 S. 199.

Berührung mit diesen Lösungen blank und unverändert bleiben. Zwischen 0.243 und 0.282 Mol Au liegt also die Schwärzungsgrenze bei der Einwirkung schwefelhaltiger Agentien. Während die Einwirkungszeit bei jenen Versuchen nur einige Tage betrug, kann jetzt ergänzt werden, daß in einer gelben Schwefelammonium-Lösung die Plättchen mit 0.282 und mehr Au während eines Jahres blank und unverändert blieben, während die mit 0.243 und weniger Au schon nach Stunden oder Tagen ganz schwarz oder fast ganz schwarz geworden waren. Nach einem Jahre war das Plättchen mit 0.243 Au noch nicht ganz schwarz geworden.

Zur genaueren Feststellung der Schwärzungsgrenzen durch schwefelhaltige Agentien wurden andere Teile der Streifen, für welche die Grenze der Pd-Fällung bestimmt wurde, verwandt, sie wurden mit folgenden Lösungen in Probiergläsern eingeschmolzen.

Am schnellsten wirkte die Lösung von $(NH_4)_2S + (NH_4)_2S_2$, langsamer eine mit Schwefel gesättigte Lösung von 0.5 Mol Na_2S, sehr viel langsamer wirken eine Lösung mit 0.5 Mol Na_2S und die des Schwefels in CS_2.

Die Reihenfolge der Schwärzungen der Plättchen im „harten“ Zustande, vor dem 12stündigen Tempern, entsprach im allgemeinen nicht der Reihenfolge ihres Cu-Gehaltes. Nach 45 Tagen waren in der $(NH_4)_2S_2$-Lösung etwa 0.3 des Plättchens mit 0.255 Au geschwärzt, während die Plättchen mit 0.240, 0.245 und 0.260 Au ganz schwarz geworden waren. In den Lösungen von Na_2S_2 und Na_2S waren die Plättchen mit 0.260 Au nicht merklich verändert, während die anderen geschwärzt waren, aber die Schwärzung von 0.245 und 0.255 Au war in der Na_2S_2-Lösung stärker als die von 0.240 Au, und in der Na_2S-Lösung war das Plättchen mit 0.255 Au stärker geschwärzt als die Plättchen mit 0.240 und 0.245 Au. In der Lösung von Schwefel in CS_2 hatten sich auf den Plättchen mit 0.240 und 0.245 rotbraune Schleier gebildet, während die beiden Au-reicheren nicht merklich verändert waren.

Nach 12stündigem Tempern bei 720° nahm die Reihenfolge der Schwärzungen mit zunehmendem Au-Gehalt regelmäßig ab, wie aus folgender Tabelle zu ersehen ist. Die Schwärzungszahlen geben den Teil der geschwärzten Oberfläche der Plättchen in Bruchteilen der ganzen Oberfläche an. Diese Zahlen sind nur angenähert, da sie nur auf einer Schätzung des geschwärzten Teils bei Betrachtung der Plättchen beruhen. Bei teilweiser Schwärzung war dieselbe fast immer streifig. Ungeachtet der die Struktur so sehr verändernden Rekristallisation beim Tempern der Plättchen hatten sich Verschiedenheiten im Au-Gehalt, die durch das Walzen streifig

verteilt waren, noch erhalten, wenn auch durch Diffusion stark abgeschwächt. Ein Beweis dafür, daß sich bei der Rekristallisation die Raum-Koordinaten der Atome nicht erheblich ändern.

Bei fast vollständiger Schwärzung blieben kleine, runde Flecke unverändert. In einigen Fällen wurde besonders bei vollständiger Schwärzung eine wellige Verziehung des Kupfersulfid-Niederschlages beobachtet. Die schwarze Schicht kann sich also bei hinreichender Dicke auch seitlich verschieben.

Schwärzung der 12 Stunden bei 720° getemperten Plättchen.

Nach	0.230	0.240	0.245	0.255	0.260	0.270 Mol Au
			Unpolierte Plättchen.			
1 Stunde	0.3	0.05	0	0	0	0
1 Tage	0.8	0.1	0	0	0	0
5 Tagen	0.99	0.2	0	0	0	0
30 „	0.99	0.5	0	0	0	0
80 „	0.99	0.7	0	0	0	0
			Polierte Plättchen.			
1 Stunde	0.99	0.7	0.5	0	0	0
1 Tage	1.0	0.95	0.9	0	0	0
5 Tagen	1.0	0.98	0.95	violett	0	0
30 „	1.0	0.99	0.95	0.2	0.1	0
80 „	1.0	1.0	0.95	0.3	0.2	0

Die Grenze der Schwärzung der unpolierten Plättchen liegt zwischen 0.240 und 0.245 Mol Au, bei den polierten ändert sie sich mit der Zeit von 0.245 bis 0.255 auf 0.260 bis 0.270 Mol Au nach 80 tägiger Einwirkung.

Es ist sehr auffallend, daß die Schwärzungsgrenze der Plättchen mit natürlicher Oberfläche nicht zwischen 0.245 und 0.255 Mol Au, sondern bei einem ein wenig kleineren Au-Gehalt liegt. Es lag die Vermutung nahe, daß dieser Umstand durch einen zufälligen zu hohen Au-Gehalt des Plättchens bedingt war. Aber von vier anderen von demselben Streifen mit 0.245 Au geschnittenen Plättchen fällten zwei Pd aus der $PdCl_2$-Lösung und zwei wurden durch die $(NH_4)_2S_2$-Lösung nicht geschwärzt. Es scheint also die Lösung von $(NH_4)_2S_2$ nur bei einem Au-Gehalt von 0.242 Mol zu wirken, die Plättchen mit mehr Au werden allerdings ein wenig violetter, aber diese Verfärbung ändert sich beim Überschreiten des Au-Gehaltes von 0.25 nicht merklich.

Tritt bei sinkendem Au-Gehalt die Schwärzung der Plättchen mit natürlicher Oberfläche ein, so ist sie nicht durch eine sehr dünne Kupfersulfid-Schicht hervorgerufen, hauchartig, sondern sehr intensiv in Folge der Bildung einer dickeren Schicht. In dieser

Hinsicht besteht ein merklicher Unterschied im Vergleich zur Grenze der Pd-Fällung.

Die Cu-Au-Mischkristalle mit weniger als 0.22 Au werden von den Lösungen: 0.5 Mol Na_2S in H_2O und 1 Mol S_2 in CS_2 um so schneller geschwärzt, je Au-ärmer sie sind. Dagegen werden die 12 Stunden bei 720° getemperten Plättchen mit natürlichen Oberflächen und einem Au-Gehalt von mehr als 0.230 Au auch im Laufe von 70 Tagen nicht geschwärzt, auch ihre Färbung ist verglichen mit der der ursprünglichen Plättchen nicht merklich dunkler geworden.

Bei den polierten Plättchen ist eine deutliche Einwirkung dieser Agentien bemerkbar. In der Na_2S-Lösung hatten sich auf dem Plättchen mit 0.230 Au fünf dunkelbraune Streifen gebildet, auf dem mit 0.240 Au war ein matter, bräunlicher Schleier, der schwächer auf den Plättchen mit 0.245, 0.255 und 0.260 Au wurde und auf dem mit 0.270 Au fehlte.

In der Lösung des Schwefels in CS_2 war das polierte Plättchen mit 0.230 Au braunrot, deutlich dunkler als die Au-reicheren geworden, und auch vom Plättchen mit 0.240 Au kann noch dasselbe gesagt werden.

Eine Lösung von Na_2S wirkt also auf die Mischkristalle mit natürlichen Oberflächen nur bis zum Au-Gehalt von etwa 0.220 Mol sichtlich unter Schwärzung ein und dasselbe gilt für die Lösung von Schwefel in CS_2. Die Schwärzung durch das viel schneller wirkende $(NH_4)_2S_2$ erreichte den Au-Gehalt von etwa 0.242 Mol Au.

Zur Einwirkung von Na_2S auf die Cu-Au-Legierungen ist jedenfalls die Gegenwart von Sauerstoff notwendig, während die von Na_2S_2 oder $(NH_4)_2S_2$ auch ohne Sauerstoff sich vollziehen kann. Hierdurch sind auch die Unterschiede in den Einwirkungsgrenzen und der Einwirkungsgeschwindigkeit bedingt, die auch bei den Ag-Au-Legierungen zu bemerken sind.

Die Wirkung einer Na_2Se_2-haltigen Lösung auf die Cu-Au-Mischkristalle.

Früher[1]) hatte sich ergeben, daß geschabte Cu-Au-Plättchen von einer Lösung von Selen in CS_2 in folgender Weise verändert werden. Das Plättchen mit 0.243 wurde schwarz und violett, das mit 0.281 Au bekam zwei kleine schwarze Flecke auf violettem Grunde und auf den mit 0.326, 0,372 und 0.429 Au wurden die geschabten Stellen violett, während die mit 0.548 und 0.741 Au un-

1) l. c.

verändert blieben. Eine tiefer gehende Wirkung des Selens findet also nur bis etwa 0.25 Mol Au statt, während eine ungewöhnlich starke Oberflächen-Wirkung des Selens auf die durch Schaben veränderten Stellen der Oberfläche sich bis 0.5 Mol Au erstreckt.

Die Lösung von Se in CS_2 ist ein recht langsam wirkendes Agens, dagegen sollte eine Na_2Se_2-haltige Lösung sehr viel schneller wirken, so daß mittelst dieses Agens die Grenze der Einwirkung auf die natürlichen Oberflächen der Cu-Au-Mischkristalle viel schneller und wohl auch sicherer zu ermitteln wäre.

Die Na_2Se_2-haltige Lösung wurde durch Zusammenschmelzen von 2.5 gr Se mit 8 gr NaOH, Temperatursteigerung bis zur dunklen Rotglut, Lösen der Schmelze in Wasser und Verdünnen auf 250 ccm hergestellt. Die Lösung war tiefrot, bei 1 cm Schichtdicke aber durchsichtig, aus ihr scheiden sich in Berührung mit Luft Selenkriställchen aus, wodurch die Lösungen auch in den zugeschmolzenen Röhrchen sich im Laufe von 3 Tagen entfärbten.

In folgender Tabelle sind die nach gewissen Zeiten geschwärzten Bruchteile der Oberflächen der Plättchen verschiedenen Au-Gehaltes angegeben.

Unpolierte Plättchen.

Nach	0.230	0.240	0.245	0.255			0.260		0.270 Mol Au.
0.5 Stunden	0.98	0	0	0	0	0	0	0	0
14 „	1	0.7	0.8	0.2			0.01		0
40 „	1	1	0.9	0.2	0.7	0.5	0.05	0.4	0
120 „	1	1	0.99	0.3			0.05		0
20 Tagen	1	1	0.99	0	0.1	0	0	0	0

Polierte Plättchen.

Nach	0.230	0.240	0.245	0.255	0.260	0.270 Mol Au.
0.5 Stunden	0.99	0.99	0.95	0.1	0.3	0
14 „	1	1	1	0.3	0.9	0.4
40 „	1	1	1	1	0.98	0.5
120 „	1	1	1	1	1	0.8
20 Tagen	1	1	1	0.99	0.09	0.02

Während der Entfärbung der roten Lösung setzt sich ein Teil der ausgeschiedenen Selenkristalle an den Plättchen ab und bleibt an ihnen kleben, so daß sie sich auch beim Schütteln der Gläschen von den Plättchen nicht ablösen.

Nach 20 Tagen haben sich aus den kleinen Kriställchen größere gebildet, die sich von den Plättchen gelöst haben. Daher erscheint die Schwärzung der Plättchen mit mehr als 0.25 Au nach 20 Tagen viel geringer als nach 120 Stunden. Die drei Plättchen mit 0.255 Au verhielten sich recht verschieden, offenbar in Folge verschieden starker Selenabscheidung auf ihnen. Nach 20 Tagen waren zwei

Plättchen kupferrot mit dunkleren und helleren Flecken, die vielleicht verschieden orientierten Kristalliten entsprechen, das dritte Plättchen war leicht geschwärzt, doch bestanden die schwarzen Teile wahrscheinlich nur aus Se.

Die Grenze der tiefergehenden Einwirkung der Na_2Se_2-haltigen Lösung liegt zwischen 0.245 und 0.255 Mol Au.

Bei den polierten Plättchen wird diese Grenze erheblich überschritten, sie liegt ein wenig über 0.270 Mol Au. Mittels der Na_2Se_2-haltigen Lösung ist nicht nur die die normale Atomverteilung störende Wirkung des Polierens nachzuweisen, sondern auch die anderer dauernder Deformationen. Schabestreifen auf den Oberflächen der Plättchen von 0.25 bis 0.5 Au werden violett, bei einem Au-Gehalt von wenig über 0.25 auch teilweise schwarz. Schlägt man eine Nummer in ein Plättchen mit 0.27 Au und läßt es 12 Stunden in der Na_2Se_2-haltigen Lösung liegen, so erblickt man die schwarze Nummer auf blankem, kupferroten Grunde.

Die Wirkung schwefelhaltiger Agentien auf die Ag-Au-Mischkristalle.

Die zu den folgenden Versuchen benutzten Legierungen waren durch Zusammenschmelzen genau abgewogener Metallmengen im Graphitrohr und einstündiges Tempern des linsenförmigen Regulus von 5 gr bei 900° hergestellt.

Die Schwärzung unter dem Einfluß einer $(NH_4)_2S_2$-haltigen Lösung erfolgt bei den Ag-Au-Plättchen viel gleichmäßiger als bei den Cu-Au-Plättchen. Schwarze Streifen in der Walzrichtung bilden sich auf den Ag-Au-Plättchen in der Regel nicht, sondern es werden größere Teile der Plättchen gleichmäßig geschwärzt außerdem hält bei den Ag-Au-Plättchen die Einwirkung viel längere Zeit an als bei den Cu-Au-Plättchen.

Über den Verlauf der Schwärzung, den Einfluß des Au-Gehaltes und über den Einfluß der Zeitdauer des Temperns auf die Schwärzung der Plättchen durch eine $(NH_4)_2S_2$-haltige Lösung geben folgende Tabellen Aufschluß.

	Nicht getempert.				4 Stunden bei 700° getempert.			
Nach	0.240	0.245	0.255	0.260	0.240	0.245	0.255	0.260 Mol Au
1 Tage	1	1	0.98	0.98	0.99	0.98	0.90	0.5
9 Tagen	1	1	1	1	1	0.99	0.95	0.16
25 „	1	1	1	1	1	0.99	0.98	0.97
45 „	1	1	1	1	1	1	1	1

	13 Stunden bei 915° getempert				39 Stunden bei 910° getempert			
Nach	0.240	0.245	0.255	0.260	0.240	0.245	0.255	0.260 Mol Au
1 Tag	0.95	0.66	0.5	0.1	0.33	0.25	0.25	0.07
9 Tagen	1	0.99	0.98	0.16	0.98	0.9	0.6	0.5
25 „	1	0.99	0.98	0.98	1	0.9	0.95	0.97
45 „	1	1	1	1	1	1	1	1

39 Stunden bei 910° getempert.
Polierte Oberflächen.

Nach	0.240	0.245	0.255	0.260 Mol Au
1 Tage	0.95	0.9	0.85	0.7
9 Tagen	1	1	0.9	0.9
25 „	1	1	0.95	0.93
45 „	1	1	1	1

Bei gleicher Einwirkungsdauer nimmt die Schwärzung mit wachsendem Au-Gehalt regelmäßig ab, ein Zeichen, daß auch in den ungetemperten Legierungen nicht erheblichere Konzentrationsdifferenzen vorkommen.

Bei hinreichender Einwirkungsdauer wurden anch die Plättchen mit 0.26 Au ganz schwarz.

Mit der Zeitdauer des Temperns verringert sich die Geschwindigkeit der Einwirkung, und diese Abnahme ist nach einer Temperzeit von 13 Stunden noch sehr deutlich. Durch Polieren mit feinstem Schmirgel wird die Geschwindigkeit der Einwirkung erheblich gesteigert.

Den Gründen des Einflusses der Temperzeit auf die Schwärzungsgeschwindigkeit nachzugehen, ist nicht ohne Interesse. Es wäre möglich, daß, nachdem die Zusammensetzungsdifferenzen in den Ag-Au-Mischkristallen nach 4-stündigem Tempern bei 700° sich fast ausgeglichen haben, die normale Verteilung beider Atomarten sich erst langsam bei weiterem Tempern herstellt und daß in Folge hiervon die Schwärzungsgeschwindigkeit mit der Temperzeit abnimmt. Es wäre aber auch möglich, daß sich beim Tempern eine schützende Haut von langsam zunehmender Dicke bildet, wodurch die Schwärzungsgeschwindigkeit mit der Temperzeit ebenfalls abnehmen würde. Wenn die zweite Möglichkeit zuträfe, müßte nach Entfernung der Schutzschicht durch Polieren der Einfluß der Temperzeit auf die Schwärzungsgeschwindigkeit verschwinden. Aus der folgenden Tabelle ist zu ersehen, daß bei den polierten Plättchen die Schwärzungsgeschwindigkeit mit der Temperzeit nicht wie bei den unpolierten regelmäßig abnimmt. Der Grund der Abnahme der Schwärzungsgeschwindigkeit mit zunehmender Temperzeit ist also in der Bildung einer Schutzschicht zu suchen und nicht in der langsamen Herstellung der normalen Atomverteilung.

Dieses Resultat ist damit in Einklang, daß bei der Einwirkung der $AuCl_3$-Lösung auf die Ag-Au-Legierungen mit 0.48—0.52 Au ein Einfluß der Temperzeit auf die Fällungsgrenze des Au nicht hervorgetreten war.

Die 36 St. bei 910° getemperten und polierten Plättchen der folgenden Tabelle waren zwei Monate vor Beginn der Einwirkung der $(NH_4)_2S_2$-haltigen Lösung poliert worden; auf die Plättchen der vorhergehenden Tabelle ließ man dieses Agens sofort nach dem Polieren wirken. Die Schwärzungsgeschwindigkeit der frisch polierten Plättchen ist erheblich größer als die der Plättchen, die nach dem Polieren längere Zeit aufbewahrt waren, auf diesen hatte sich also mit der Zeit ebenfalls eine unsichtbare Schutzschicht gebildet.

Getempert	4 Stunden bei 700°				13 Stunden bei 910°			36 Stunden bei 910°			
nach	0.24	0.245	0.255	0.26 Au	0.24	0.245	0.255 Au	0.24	0.245	0.255	0.26 Au
6 Stunden	0.1	0.1	0.1	0.05	0.5	0.5	0.5	0.1	0.5	0.5	0.1
50 „	0.3	0.3	0.7	0.2	0.6	0.9	0.7	0.3	0.8	0.8	0.3
100 „	0.8	0.8	0.8	0.3	0.7	0.98	0.8	0.6	1.0	0.9	0.7
200 „	0.98	0.98	0.97	0.5	0.98	1.0	0.95	1.0	1.0	1.0	1.0

Zur Entscheidung der Frage, um welchen Betrag die Einwirkung des $(NH_4)_2S_2$ die normale Resistenzgrenze zweifacher Agentien: 0.25 Mol Au, überschreiten kann, wurden noch folgende Plättchen untersucht. Ein Plättchen mit 0.270 Au, dessen Regulus nach dem Zusammenschmelzen eine Stunde bei 960° gehalten, dann gewalzt und noch 16 St. bei 910° getempert wurde; ferner Legierungen mit 0.288, 0.310 und 0.354 Au, welche nach dem Zusammenschmelzen gewalzt und nicht getempert waren.

Schwärzung nach	0.270	0.218	0.310	0.354 Mol Au
18 Tagen	0.99	0.05	0.01	0
60 „	1	0.3	0.1	0

Die beiden Plättchen mit 0.270 und 0.268 Au verhalten sich sehr verschieden, das mit 0.268 Au ist viel edler als das mit 0.270 Au. Der Regulus mit 0.270 Au war im Kohlerohr, die Reguli mit 0.268, 0.310 und 0.354 Au waren im Porzellantiegel über dem Gasgebläse hergestellt.

Die Ueberschreitung der normalen Resistenzgrenze für zweifache Agentien von 0.25 Mol Au ist bei den Ag-Au-Legierungen sehr deutlich und geht über 0.32 Mol Au hinaus.

Erheblich langsamer als die $(NH_4)_2S_2$-haltige Lösung schwärzt eine Na_2S_2-haltige Lösung die Ag-Au-Plättchen. Der Einfluß des Temperns auf die Geschwindigkeit der Schwärzung durch diese

Lösung ist deutlich aber geringer als bei der Einwirkung von $(NH_4)_2 S_2$.

Nach 25 Tagen ist die Veränderung der Plättchen mit natürlicher Oberfläche folgende: Die Legierung mit 0.240 Au ist dunkelgrau, die mit 0.245 und die mit 0.260 Au sind in fast gleicher Weise hellgrau und hellbraun gefärbt, ihre großen Kristallite sind zum Teil grauschwarz, zum Teil braun, und zwischen diesen finden sich ganz helle.

Der Einfluß des Polierens auf die Wirkung von $Na_2 S_2$ ist sehr deutlich, nach einem Tage hat sich eine sehr dünne gelbbraune Haut auf den Plättchen gebildet. Mit der Zeit verdickt sich diese Schicht und durchläuft die Farbenskala, orange, violett, blau, blaugrau und grauschwarz. Nach 30 Tagen sind die Plättchen in diesen Farben gefärbt; mit zunehmendem Au-Gehalt nimmt im Allgemeinen die Dicke der färbenden Schicht ab. Nach 100 Tagen sind die polierten Plättchen bis 0.26 vollständig geschwärzt, das mit 0.27 schwarz und violett gefärbt, von den unpolierten Plättchen ist nur das mit 0.23 ganz schwarz, während die mit mehr Au nur zum Teil geschwärzt sind, auf ihren Oberflächen sind auch ganz helle Kristallite zu sehen. Die Grenze, bis zu der sich die Einwirkung wahrscheinlich erstrecken wird, liegt zwischen 0.27 und 0.32 Au.

Ganz ähnlich verläuft die Einwirkung einer Lösung mit 0.5 Mol $Na_2 S$ im Liter. Auch hier ist der Einfluß des Temperns auf die Schwärzungsgeschwindigkeit deutlich, und auch hier wurden die Plättchen mit natürlichen Oberflächen in oben beschriebener Weise verändert, während die Oberflächen der polierten Plättchen die Farbenskala dünner Schichten durchliefen bis sie grauschwarz geworden waren. Nach 60 Tagen war hier die Schwärzung nicht wie beim $(NH_4)_2 S_2$ bis zum Plättchen mit 0.31 Au einschließlich, sondern nur bis zum Plättchen mit 0.27 Au einschließlich vorgeschritten.

Am langsamsten wirkt die Lösung von 1 Mol S_2 in CS_2; nach 70 Tagen waren die polierten Plättchen braun gefärbt und die unpolierten grau. Diese Farben ändern sich mit wachsendem Au-Gehalt nur wenig.

Durch schwefelhaltige Agentien werden die Ag-Au-Legierungen, soweit sie nicht geschwärzt werden, gelb gefärbt und diese Färbung überschreitet den Gehalt von 0.5 Mol Au.

Die Einwirkung einer Na_2Se_2-haltigen Lösung auf die Ag-Au-Mischkristalle.

Die Wirkung dieser Lösung ist der des $(NH_4)_2S_2$ ähnlich, nur wirkt sie schneller und schwärzt und färbt intensiver als die $(NH_4)_2S_2$-Lösung.

Die Plättchen mit natürlicher Oberfläche wurden in folgender Weise verändert: die mit 0.23, 0.24 und 0.245 sind nach einem Tage schwarzgrau, das mit 0.255 gelb, violett und blau, und die mit 0.26 und 0.27 Au grau und blau. Das Plättchen mit 0.268 Au wurde in dieser Zeit nur gelb, während das mit 0.270 Au blan und sogar grauschwarz wurde. Auch die Plättchen mit 0.31 und 0.354 Au wurden nur gelb nnd die mit 0.48 bis 0.52 Au veränderten sich nicht merklich. Nach 40 Tagen waren die Plättchen von 0.23—0.26 Au grauschwarz, das mit 0,27 graublau, das mit 0.268 prachtvoll blau, die eine Seite des Plättchens mit 0.31 war blau, die andere tiefgelb, auf dem Plättchen mit 0.354 Au waren gekratzte Stellen blau oder violett geworden.

Die Schwärzung der unverletzten Plättchen reichte bis 0.27 Au einschließlich; von diesem Au-Gehalt bis über 0.52 Au hinaus wurden die unverletzten Plättchen gelb gefärbt.

Die geringste Verletzung der natürlichen Oberfläche der Plättchen von 0.27 bis über 0.52 Au wird durch die Na_2Se_2-haltige Lösung durch eine orange, violette, blaue oder schwarze Färbung angezeigt. Die polierten Plättchen mit 0.48 bis 0.52 Au wurden prachtvoll orange, violett und blau gefärbt, eine in das Plättchen mit 0.35 Au geschlagene Nummer hob sich schwarz und bunt vom gelben Grunde ab.

Die Lösung von Selen in CS_2 wirkt sehr viel langsamer. Sogar die polierten Plättchen mit 0.48 bis 0.52 Au wurden durch sie in 40 Tagen nur gelb gefärbt, die aus der Lösung herausragenden Teile wurden erheblich dunkler.

Die Einwirkungsgrenze schwacher Oxydationsmittel auf die Cu-Au-Mischkristalle.

Schwache Oxydationsmittel wie H_2O_2, Luftsauerstoff in einer alkalischen Lösung von weinsaurem Natron und Pikrinsäure wirken nach früheren Untersuchungen bis zum Au-Gehalt von 0.243 Mol. Diese Angabe kann nach den jetzt vorliegenden vollständigeren Untersuchungen nicht ganz bestätigt werden; diese Grenze liegt bei einem etwas kleineren Au-Gehalt. Früher wurde bei der Einwirkung schwacher Oxydationsmittel eine sehr deutliche Verände-

rung der geschabten Oberflächen bei den Plättchen mit 0.10, 0.125, 0.15, 0.176 und 0.208 Au gefunden, die Plättchen mit 0.243 Au zeigten sehr schwache Veränderungen. Die Plättchen mit 0.243 Au waren aber aus Legierungen hergestellt, die zu kurze Zeit getempert waren. Nach Herstellung der neuen Reihe von Plättchen, deren Reguli nach dem Zusammenschmelzen 1 Stunde bei 870° und nach dem Walzen 12 Stunden bei 720° getempert waren, ergab sich, daß die beiden schwachen Oxydationsmittel: eine Lösung von 0.5 Mol Natriumtartrat und 0.5 Na OH im Liter Wasser und eine Lösung von 0.05 Mol Pikrinsäure, sowohl die polierten als auch die unpolierten Plättchen mit 0.230 bis 0.270 Mol Au im Laufe von 70 Tagen nicht angreifen, die Oberflächen dieser Plättchen waren während jener langen Wirkungsdauer nicht verändert worden. Die Grenze, bis zu der diese schwachen Oxydationsmittel wirken, liegt also zwischen 0.208 und 0.230 Mol Au, bei etwa **0.22** Mol Au.

Die Einwirkungsgrenze starker Oxydationsmittel auf die Ag-Au-Mischkristalle.

Früher war gefunden worden, daß starke Oxydationsmittel, wie eine Lösung von Chromsäure oder eine saure übermangansäurehaltige Lösung den Cu-Au-Legierungen bis zum Gehalt von 0.428 Au Cu entziehen, während die Legierungen mit 0.548 und mehr Au diesen Lösungen kein Cu abgeben. Die analogen Reaktionen müssen auch bei der Einwirkung solcher Lösungen auf die Ag-Au-Legierungen vor sich gehen.

Eine $HMnO_4$ haltige Lösung von 1 Mol H_2SO_4 im Liter, die in einer Schichtdicke von 1 cm himbeerrot gefärbt war, wirkte auf die 13 Stunden bei 915° getemperten Plättchen in folgender Weise. Nach einem Tage war die Lösung über dem Plättchen mit 0.480 Au deutlich heller gefärbt und es hatten sich am Plättchen wie am Glase Manganoxyde niedergeschlagen. Die Lösungen über den Au-reicheren Plättchen hatten ihre Farbe nicht geändert, aber die Plättchen mit 0.490 und 0.495 Au waren durch Abscheidung von Manganoxyden orange gefärbt, während die Plättchen mit 0.505 und 0.510 Au unverändert, silberweiß, waren. Nach zwei Tagen hatte sich aus der Vergleichslösung eine dünne Haut von Oxyden an ihrer Oberfläche gebildet, und auch das Plättchen mit 0.505 Au war orange geworden, während das Plättchen mit 0.51 Au nur gelb geworden war.

Die spontane Sauerstoffentwicklung in der Lösung unter Abscheidung von Manganoxyden stört also ein wenig die genauere Bestimmung der Einwirkungsgrenze. Man kann mit Bestimmtheit

sagen, daß das Plättchen mit 0.480 Au erheblich größere Mengen von Ag an die Lösung abgibt und dementsprechend auch größere Mengen von $HMnO_4$ reduziert als die Au-reicheren Plättchen. Aber die Plättchen mit 0.490 und 0.495 Au sind auch im weiteren Verlauf der Einwirkung, während eines Monates, hinsichtlich ihrer Verfärbung den mit 0.505 und 0.510 Au beständig voran, während jene braun sind, sind diese noch orange. Da auch reines Au in dieser Lösung sich orange färbt, so ist diese Verfärbung durch die spontane Zersetzung der Lösung bedingt. Dementsprechend liegt die Einwirkungsgrenze zwischen 0.495 und 0.505 Mol Au.

Sehr viel langsamer und weniger deutlich wirkt die Chromsäure auf die Plättchen mit einem Au-Gehalt in der Nähe der Einwirkungsgrenze. Nach drei Monaten sind unter Einwirkung einer Lösung von 1 Mol $K_2Cr_2O_7 + 1$ Mol H_2SO_4 im Liter nur an den Plättchen mit 0.480 und 0.495 Au schwach dunkler gefärbte Stellen zu erkennen, während auf den Au-reicheren Plättchen jede Veränderung fehlt. Es gilt das für Plättchen, die verschieden lange Zeit getempert waren. Entsprechend den geringen Veränderungen der Au-ärmeren Plättchen sind auch die Lösungen über ihnen nicht merklich verfärbt. Die polierten Plättchen sind schon nach einem Monat goldgelb geworden, ursprünglich waren sie silberweiß mit einem Stich ins gelb-grüne. In der Verfärbung der Plättchen mit 0.48 und 0.52 Au ist ein Unterschied nicht zu erkennen.

Starke Salpetersäure vom spezifischen Gewicht 1.44, die sehr geringe Mengen von HCl enthält, wirkt in 5 Minuten auf das Plättchen mit 0.48 Au merklich ein, es bilden sich schwarze Flecke und seine Farbe wird deutlich gelber, auch auf dem Plättchen mit 0.49, 0.495 und 0.505 Au bildet sich ein deutlicher matter Schleier, unverändert sind die Plättchen mit 0.51 und 0.52 Au. Nach 1 Tage unterscheiden sich die Plättchen von 0.49 bis 0.52 Au nicht mehr, sie sind grünlich gefärbt und mit einem grauen Hauch bedeckt; auch nach 30 Tagen ist diese Färbung auf ihrer unteren Seite, die Lichtseite ist gelber geworden und das Plättchen mit 0.48 fast blau und gelb. Die sichtbare Wirkung der HCl-haltigen HNO_3 geht, wie zu erwarten war, über 0.52 Au hinaus, aber die Grenze ihrer tiefer gehenden Einwirkung liegt zwischen 0.48 und 0.49 Mol Au.

Die Einwirkung der Übermangansäure erstreckt sich bis 0.500 ± 0.005 Mol Au, die der Chromsäure bis 0.492 Mol Au und die der Salpetersäure bis 0.485 Au.

Das $FeCl_3$ wird von Ag-reicheren Legierungen schon im Laufe

eines Tages merklich reduziert, wobei sich die Legierungen mit $AgCl$ bedecken. Nach früheren Bestimmungen wird diese Einwirkung bei der Legierung mit 0.452 Mol Au im Laufe eines Tages merklich und deutlich nach 8 Tagen. Die 13 Stunden bei 915° getemperten Plättchen mit natürlichen Oberflächen und 0.48—0.52 Au wurden im Laufe von 3 Monaten in einer Lösung von 1 Mol $FeCl_3$ im Liter nicht merklich verändert, dagegen waren die polierten Plättchen mit 0.48—0.52 Au im Laufe eines Monats schwach blind und nach 3 Monaten deutlich blind geworden. Die Einwirkungsgrenze auf die natürliche Oberfläche liegt also zwischen 0.45 und 0.48 Mol Au.

Die Einwirkung von Quecksilbersalzen auf die Cu-Au-Mischkristalle.

Die Merkurosalze wirken auf die ganze Reihe der Cu-Au-Mischkristalle, nicht aber auf reines Au ein. Es gilt das sowohl für Lösungen von $HgNO_3$ als auch für die von $HgCl$. Die Geschwindigkeit der Einwirkung wächst mit der Konzentration der Lösungen und mit diesen ändert sich auch die Art der Veränderung der Plättchen.

In einer Lösung von 0.5 Mol $HgNO_3$ im Liter werden die Plättchen bis etwa 0.6 Mol Au in wenigen Minuten silberweiß, bei höherem Au-Gehalt bildet sich auf ihnen ein grauer Hauch mit silberweißen Flecken und von etwa 0.8 bei 0.97 Au nur ein grauer Hauch, der um so später erscheint, je Au-reicher das Plättchen ist. Es gilt das sowohl für „harte“, wie „weiche“ Plättchen. Im allgemeinen wirken die Lösungen von $HgNO_3$ schneller auf frisch getemperte als auf harte Plättchen, die längere Zeit gelegen haben. Dieser Unterschied rührt aber nur von der Bildung von Schutzschichten, Fetthäuten etc. her.

Die gesättigte Lösung des schwerlöslichen $HgCl$ wirkt langsamer, aber auch hier ist die Graufärbung der Plättchen mit 0.23—0.27 Au nach 3 Stunden schon deutlich, nach 10 Tagen sind die Plättchen von 0.23—0.27 Au mit natürlichen Oberflächen hell-grau-gelblich gefärbt und auf ihnen finden sich unregelmäßig verteilt, graue Ausscheidungen von feinverteiltem Hg. Die polierten Oberflächen der Au-reicheren Plättchen bleiben blank, verändern aber schon im Laufe eines Tages ihre Farbe, die in ein Grau-gelb bis Gelb-grau übergeht, nur die ganz Au-reichen Plättchen brauchen zu ihrer Verfärbung längere Zeit, das mit 99 % Au zirka 5 Tage.

Während die Verfärbung der Plättchen sehr ins Auge fällt, treten nur geringe Cu-Mengen in Lösung, die nicht hinreichen, um

diese merklich bläulich zu färben. Da aber auch bei der Einwirkung auf ein Plättchen mit einer Oberfläche von 5 qcm die Bildung von Merkuriionen nicht nachweisbar ist, es gilt das für Plättchen mit 0.23 und 0.27 Au, so muß es sich hier um einen Austausch von Cu und Hg zwischen Plättchen und Lösung handeln. Der auffallende Unterschied zwischen der starken Verfärbung der Plättchen und der nicht merklichen der Lösung rührt daher, daß sehr geringe Mengen von Hg, die sich auf den Plättchen niederschlagen, an ihrer Verfärbung erkannt werden, während die äquivalente in Lösung gegangene Cu-Menge eine merkliche Blaufärbung der Lösung noch nicht bewirkt.

Die Einwirkung der Merkurisalze ist folgende. Aus einer Lösung von 0.25 $HgCl_2$ im Liter fällen die Plättchen mit 0 bis einschließlich 0.24 Au Quecksilber, es bilden sich auf ihnen graue Streifen und Flecke, aber auch die Plättchen mit 0.255, 0.260 und 0.270 Au werden blind. Gleichgiltig ob sie poliert oder unpoliert waren, nach einem Tage konnten auf ihnen blinde Flecke deutlich erkannt werden. Nach 3 Monaten waren in den betreffenden Lösungen geringe Mengen von HgCl ausgeschieden und die Plättchen ganz blind geworden.

Bei der Einwirkung von $HgCl_2$ auf die Cu-Au-Legierungen tritt also bis zu einem Gehalt von 0.24 Mol Au deutliche Hg-Fällung ein, aber die Plättchen mit 0.245, 0.255, 0.26 und 0.27 Au werden ebenfalls blind. Die Reduktion von $HgCl_2$ zu HgCl geht an ihnen und auch noch an solchen mit höherem Au-Gehalt vor sich; da sie langsam verläuft, würde die Feststellung ihrer Au-Grenze zeitraubend sein. Reaktionen, die in Stufen verlaufen können, werden sich häufig zur genauen Bestimmung der Einwirkungsgrenze nicht eignen, wenn bei der Einwirkungsgrenze der einen Stufe die Einwirkung der anderen Stufe noch vor sich geht, denn hierdurch wird die betreffende Einwirkungsgrenze an Deutlichkeit verlieren.

Bei der Auflösung von $Hg(NO_3)_2$ in Wasser scheidet sich bekanntlich viel basisches Salz ab. Die mit diesem Bodenkörper im Gleichgewicht befindliche Lösung wirkt auf die Cu-Au-Legierungen bis zum höchsten Au-Gehalt ein.

Aus einer $Hg(NO_3)_2$-Lösung (1 Mol $Hg(NO_3)_2$ im Liter) scheiden die Plättchen mit 0.1 bis 0.15 Au sofort graues Hg und ein gelbes Salz (basisches Merkuro-Merkuri-nitrat) ab; an den Plättchen mit 0.23—0.27 Au scheidet sich Hg nicht ab, aber nach drei Tagen finden sich in ihren Lösungen reichliche Abscheidungen jenes gelben Salzes und nach 8 Tagen ist auch in der Lösung über dem

Plättchen mit 99 % Au die Bildung des gelben Salzes merklich. Die Plättchen selbst sind, obwohl sie offenbar Cu abgegeben haben, nicht merklich verändert. Fügt man zu jener Lösung Salpetersäure, so tritt die Abscheidung des gelben Salzes auch nach einem Monat nicht ein. Die ganze Reihe der Cu-Au-Mischkristalle gibt an die Lösungen von $Hg(NO_3)_2$ Cu ab, welches das Merkuriion zum Merkuroion reduziert, worauf sich das gelbe schwerlösliche Salz ausscheidet. Nur die Cu-reichsten Mischkristalle mit weniger als 0.2 Au fällen auch metallisches Hg.

Während auf Cu-Au-Plättchen die geringsten Hg-Mengen durch Änderung der Farbe deutlich sichtbar werden, können geringe Hg-Mengen, besonders wenn sie als kohärente, silberweiße Haut sich niederschlagen, auf der Oberfläche der Ag-Au-Plättchen schwer erkannt werden, daher können die diesbezüglichen Einwirkungsgrenzen durch Beobachtung der Oberflächenveränderung nicht sicher bestimmt werden.

Die Einwirkung von Silbersalzen auf die Cu-Au-Legierungen.

Die Fällung von Silber aus Silbersalzen durch die Cu-Au-Legierungen zeigt mehrfache Abweichungen von der Einwirkung anderer Agentien.

1) Die Fällung findet nicht gleichmäßig statt, sondern nur an vereinzelten Punkten der Plättchen, von denen aus bei den nicht komplexen Silbersalzen Nadeln oder Blättchen mit sichtbarer Geschwindigkeit in die Lösung wachsen. Die Bildung des ersten Kristallisationszentrums ist also besonders erschwert, hat sich ein solches gebildet, so ist damit auch ein kurz geschlossenes Galvanisches Element gebildet, und das Silber setzt sich hauptsächlich an dem gebildeten Ag-Kristall ab. Diese Kristalle erreichen nicht selten eine erhebliche Länge, in einzelnen Fällen, z. B. in der Lösung von 5 Mol $AgNO_3$ erreichte ein solcher Faden die Länge von 2 cm. Eine gleichmäßige Versilberung der Plättchen findet nur in den Lösungen von $AgCN + 2KCN$ statt, in denen die Fällung über den Au-Gehalt von 0.23 Mol hinaus sich erstreckt. Diese Lösung löst aber in Gegenwart von Sauerstoff auch das Au der Plättchen und in Abwesenheit von Sauerstoff wird durch Au aus ihr Ag gefällt, daher sind für ihre Einwirkung die Bedingungen der Resistenz nicht erfüllt.

2) Die Einwirkungsgrenzen der Silbersalze hängen von der Natur der negativen Ionen und der Konzentration der Ag-Ionen ab, und schwanken erheblich um den Au-Gehalt von $\frac{1}{8}$ Mol.

Es wurden drei Versuchsreihen mit ungetemperten, also harten, mit 17 Stunden bei 850° und mit 40 Stunden bei 850° getemperten Plättchen ausgeführt. Die Fällung verläuft nach ihrem Eintritt schnell in den Lösungen von Ag_2SO_4 und $AgNO_3$, wobei sich weiße Nadeln oder Plättchen bilden. In den anderen Lösungen vollzieht sie sich langsamer unter Bildung von schwarzen Wucherungen. Aus der Lösung von 0.01 $AgNO_3$ + 0.5 $NaNO_2$ scheiden sich sowohl schwarze Wucherungen als auch silberweiße Plättchen ab. Die nach 3 Tagen beobachteten Grenzen hatten sich nach 8 Tagen nicht geändert.

Fällungsgrenzen nach 3 Tagen.

Lösungen	der 17 Stunden bei 850° getemperten Plättchen.	der 40 Stunden bei 850° getemperten Plättchen.
0.02 Ag_2SO_4	0.138—0.152 Mol Au	0.138—0.152 Mol Au
5 $AgNO_3$	0.152—0.165 „ „	0.129—0.138 „ „
0.02 $AgNO_3$	0.138—0.152 „ „	0.138—0.152 „ „
0.002 $AgNO_3$	0.152—0.165 „ „	0.138—0.152 „ „
0.1 AgF	0.129—0.138 „ „	0.121—0.129 „ „
0.01 $AgNO_3$ + 0.5 $NaNO_2$	> 0.110 „ „	0.072—0.101 „ „
0.004 $AgNO_3$ + 0.5 KCNS	> 0.072 „ „	0.072—0.101 „ „
0.002 $AgNO_3$ + 1 KI	> 0.072 „ „	0.101—0.111 „ „

An den Plättchen mit dem Grenzgehalt an Au, bei dem noch Fällung eintritt, bilden sich die Silberkriställchen besonders an den Schnittflächen der Plättchen, die aus einem getemperten längeren Streifen geschnitten wurden. Würde man die Plättchen, nachdem sie geschnitten sind, nochmals tempern, so würden dadurch die Fällungsgrenzen sich dem Au-Gehalt von $\frac{1}{8}$ Mol nähern.

Die Fällungsgrenzen der harten, ungetemperten Plättchen liegen bei ein wenig höherem Au-Gehalt als die der 17 Stunden lang getemperten. Durch das Tempern verschiebt sich die Fällungsgrenze der normalen Silbersalze zu kleineren Au-Gehalten und die der komplexen Silbersalze, wie es scheint, zu höheren, so daß möglicher Weise nach sehr langem Tempern die Fällungsgrenzen dem Au-Gehalt von $0.125 = \frac{1}{8}$ Mol Au entsprechen werden.

Übersicht der Resultate.

1) Die Genauigkeit der Bestimmung der Einwirkungsgrenzen hängt vor allem von der Deutlichkeit der vom Agens bewirkten Veränderung der Oberfläche ab. Die Abscheidung undurchsichtiger, möglichst schwerlöslicher Reaktionsprodukte auf den Oberflächen der Mischkristalle ist der Wahrnehmung der Veränderungen

günstig. In solchen Fällen kann die Einwirkungsgrenze mit einer Genauigkeit von 0.005 Mol Au bestimmt werden, und in ganz besonders günstigen Fällen dürfte es möglich werden, die Genauigkeit der Bestimmung bis auf 0.001 Mol Au zu treiben. Zu diesem Zweck wäre die Herstellung der Mischkristallkonglomerate so auszuführen, daß die in ihnen auftretenden Konzentrationsdifferenzen jenen Betrag nicht erreichen. Hierzu wäre es wohl notwendig mit größeren Legierungsmengen zu arbeiten — die Mengen der zu obigen Versuchen hergestellten Legierungen betrugen 1 bis 5 gr — und die Kristallisation der Schmelzen möglichst langsam unter möglichst lange fortgesetztem Rühren derselben vor sich gehen zu lassen, dann nach Pressen der Reguli mit dem Tempern zu beginnen und schließlich dasselbe nach dem Walzen fortzusetzen, oder man schreckt die Schmelzen durch Gießen in Metallformen ab, preßt die Gußstücke, tempert, walzt und wiederholt das Tempern.

2) Bei der Einwirkung eines Agens mit deutlicher Einwirkungsgrenze tritt dieselbe schon nach wenigen Tagen (1—3 Tagen) deutlich hervor und ändert sich dann im Verlauf mehrerer Monate nicht. Die Frage, wie lange die Einwirkungsgrenze bestehen bleibt, kann zur Zeit nicht beantwortet werden.

Das Auftreten von Einwirkungsgrenzen ist an die Bedingung gebunden, daß ein Platzwechsel der beiden Atomarten der Mischkristalle nicht oder in nicht merklicher Weise stattfindet. Mit welcher Annäherung diese Bedingung bei den Mischkristallen des Au bei 15° C erfüllt ist, wissen wir nicht. Wenn im Laufe eines oder mehrerer Jahre eine merkliche Verschiebung aller Einwirkungsgrenzen zu höheren Au-Werten eintreten sollte, so wäre hieraus ein Schluß auf den Betrag des Platzwechsels der aktiven nnd inaktiven Atome jener Mischkristalle zu ziehen.

3) Von größter Bedeutung für die Einwirkungsgrenzen ist die Beschaffenheit der Oberflächen der Legierungen. Die natürliche Oberfläche ist, wie zu erwarten war, die widerstandsfähigste. Schleift man sie mit feinstem Schmirgelpapier, so entstehen zahllose Rillen, an deren Oberflächen die regelmäßige, normale Verteilung beider Atomarten im Gitter gestört worden ist, ebenso wird das Polieren auf der Tuchscheibe wirken. Die durch Schleifen und Polieren bewirkte Anordnung der beiden Atomarten nähert sich der ungeordneten Verteilung. Diese Verteilung ist, wie die Rechnung lehrt, viel weniger widerstandsfähig als die geordnete normale Verteilung, daher wird die polierte Oberfläche weniger widerstandsfähig sein als die natürliche. Durch Herstellung der ungeordneten Verteilung von Atomen in kleinen Gitterteilen werden

die großen Unterschiede in der Widerstandsfähigkeit der natürlichen Oberflächen bei der Einwirkungsgrenze verringert, die Einwirkungsgrenze wird verwischt. Das trifft, wie beschrieben, auch ohne Ausnahme zu.

Allerdings können sich beim Tempern auch Schutzschichten bilden, wie auf den Oberflächen der Ag-Au-Legierunden mit etwa $\frac{2}{8}$ Mol Au. Die Bildung von Schutzschichten beim Tempern ist an der Verkleinerung der Einwirkungsgeschwindigkeit mit zunehmender Temperzeit zu erkennen. Da dieser Einfluß bei den Ag-Au-Legierungen mit zirka $\frac{4}{8}$ Au nicht zu bemerken war und auch bei den Cu-Au-Legierungen mit zirka $\frac{2}{8}$ Mol Au fehlt, so ist hier die Wirkung des Polierens der Änderung der Verteilung beider Atomarten, die nach dem Polieren die Oberfläche als Gittertrümmer bedecken, zuzuschreiben.

Eine andere Frage ist die, ob bei Verschiebungen auf Gleitebenen ebenfalls eine Änderung der Atomverteilung im Mischkristall eintreten kann. Betreffs dieser Frage sind nur gelegentliche Beobachtungen gemacht worden. Auf stark deformierte Legierungen mit ein wenig mehr als $\frac{2}{8}$ Mol Au wirkt eine Lösung von Na_2Se_2 viel stärker ein als auf die nicht deformierten; die Schnittflächen solcher Plättchen und die in die Plättchen geschlagenen Nummern werden schwarz, während auf einer ziemlich stark verbogenen natürlichen Oberfläche eine Schwärzung nicht zu beobachten ist. Auch die Fällung von Silber aus $AgNO_3$-Lösungen tritt auf den Schnittflächen der Legierungen mit ein wenig mehr als $\frac{1}{8}$ Mol Au noch auf, während sie auf natürlichen, auch stärker verbogenen Oberflächen nicht mehr wahrzunehmen ist. Man hat also hier ein Mittel in der Hand, um die Frage nach den Verwirrungen des Gitters bei verschiedenen Arten dauernder Defori mationen zu untersuchen. Man braucht nur jene Ag-Au- oder Cu-Au-Legierungen technologisch wichtigen Deformationen zu unterwerfen und sie mit jenen Reagentien zu untersuchen. Stärkere Verwirrungen im Gitterbau der einzelnen Kristallite werden dann sichtbar. Es scheint, daß eine reine Verschiebung nach Gleitebenen ohne Brüche von Kristalliten oder Lamellen keine merkliche Änderung in der Verteilung der aktiven und inaktiven Atome nach sich zieht.

4) Die genaue Zusammensetzung der untersuchten Legierungen in Gewichtsprozenten und in Molenbrüchen Au findet man in folgenden Tabellen. Im vorhergehenden Text ist ihre Zusammensetzung abgerundet angegeben.

Cu-Au Legierungen.

48.303 % Au	0.2315 Au	23.69 % Au	0.0723 Au
49.500	0.2400	25.75	0.1006
50.169	0.2450	27.86	0.1107
51.491	0.2554	29.89	0.1209
52.142	0.2599	31.52	0.1291
53.463	0.2703	33.62	0.1376
		35.71	0.1520
		38.86	0.1646

Ag-Au-Legierungen.

35.330 % Au	0.2301 Mol	62.804 % Au	0.4802 Au
36.598	0.2399	63.714	0.4899
37.240	0.2451	64.160	0.4948
38.504	0.2551	65.100	0.5050
39.111	0.2600	65.550	0.5100
40.338	0.2700	66.452	0.5201

5) Die genauer bestimmten Einwirkungsgrenzen sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Agens Lösungen von:	Einwirkungsgrenzen auf Cu-Au-Mischkristalle.	Einwirkungsgrenzen auf Ag-Au-Mischkristalle.
$PdCl_2$	0.245—0.255 Mol Au	
$Pd(NO_3)_2$		0.245—0.255 Mol Au
$PtCl_2$	0.245—0.255 „ „	0.245—0.255 „ „
$(NH_4)_2S_2$	0.240—0.245 „ „	>0.32 „ „
Na_2S_2		0.27—0.32 „ „
Na_2S	0.22 „ „	0.27 „ „
Schwefel in CS_2	0.22 „ „	
Na_2Se_2	0.245—0.255 „ „	>0.27 „ „
Pikrinsäure	0.22 „ „	
alkalische Lösung von weinsaurem Natron	0.22 „ „	
$AuCl_3$		0.495—0.505 „ „
H_2CrO_4		0.492 „ „
$HMnO_4$		0.495—0.505 „ „
HNO_3		0.480—0.490 „ „
$HgCl$	keine „ „	
$HgNO_3$	keine „ „	
$HgCl_2$	Hg-Fällung 0.24 „ „	
$Hg(NO_3)_2$	keine „ „	
Silbersalze	0.08—0.15 „ „	

Die Einwirkungsgrenzen sind zu einem Teil innerhalb der Fehlergrenzen der Bestimmungen Vielfache von $\frac{1}{8}$, teilweise erreichen sie diese Vielfachen nicht ganz und teilweise überschreiten sie die Vielfachen merklich.

Deutung der Einwirkungsgrenzen.

Im Folgenden sollen im Anschluß an die frühere Deutung der normalen Resistenzgrenzen des 14-Punkt-Gitters die Grundlagen derselben kurz wiederholt werden, um dann die Abweichungen der gefundenen Einwirkungsgrenzen von den normalen auf Grund des atomistischen Aufbaus der Mischkristalle der 14-Punkt-Gitter zu erwartenden Resistenzgrenzen zu erörtern.

Wären die beiden Atomarten eines Mischristalls regellos in seinem Gitter verteilt, so könnten die durch ein Lösungsmittel extrahierten Mengen seines löslichen Bestandteils auf Grund der Wahrscheinlichkeitstheorie angegeben werden. Da aber die aus Mischkristallen gelösten Mengen von $p = 0.375$ bis 0.7 Mol des unlöslichen Bestandteils viel kleiner sind als die berechneten, so folgt hieraus, daß die beiden Atomarten in den Gittern einer Mischkristallreihe nicht wahllos verteilt sind. Diese Verteilung muß also eine regelmäßige sein.

Wenn die Mischkristalle ihren Eigenschaften nach die Symmetrie der Krystalle der beiden reinen Komponenten besitzen, so wird die Verteilung der beiden Atomarten in ihnen diese Symmetrie nicht stören dürfen. Im allgemeinen gibt es eine Reihe von Atomverteilungen für jedes Mischungsverhältnis, welche dieser Bedingung genügen. Aber die Durchmischung dieser Verteilungen ist eine sehr verschiedene. Durch die Diffusion, die in den Mischkristallen in einem Platzwechsel beider Atomarten besteht, wird sich bei hinreichend hoher Temperatur die bestmögliche Durchmischung beider Atomarten herstellen. Dem Zustand dieser bestmöglichen mit der Symmetrieforderung verträglichen Durchmischung entspricht eine Verteilung, bei der das Mischungsverhältnis des ganzen homogenen Kristalls sich in möglichst kleinen Bezirken des Gitters wiederholt. Von allen der Symmetrie-Forderung entsprechenden Verteilungen wird also in der Regel nur eine der Forderung bestmöglicher Durchmischung genügen. Im Allgemeinen, ausgenommen singuläre Mischungsverhältnisse, wird also die Atomverteilung, welche jenen beiden Forderungen entspricht, eine ganz bestimmte sein, und man wird die betreffende Verteilung genau angeben können.

Ein Mischkristall, dessen Atomverteilung im Gitter jenen beiden Forderungen entspricht, und dessen atomistischer Aufbau uns daher in allen Einzelnheiten bekannt ist, soll als normaler bezeichnet werden im Gegensatz zu den abnormen, bei denen die eine oder die andere oder beide Forderungen nicht erfüllt sind.

Bei höheren Temperaturen wird der Platzwechsel der beiden Atomarten im Mischkristall ein sehr lebhafter sein. Die Atomverteilung wird beständig um die normale schwanken. Mit sinkender Temperatur werden diese Schwankungen immer geringer und bei hochschmelzenden Stoffen werden sie schon bei gewöhnlicher Temperatur verschwunden sein. Wenn der Platzwechsel der beiden Atomarten im Mischkristall aufgehört hat, so wird offenbar die Thermodynamik auf die Gleichgewichte eines solchen Mischkristalls mit anderen Phasen nicht mehr anzuwenden sein, dafür wird man aber atomistische, sehr ins Spezielle gehende Beobachtungen anstellen dürfen.

Wenn ein chemisches Agens auf die Kristalle der einen Komponente einwirkt, nicht aber auf die der anderen, so können die Bedingungen der Einwirkung auf die Mischkristallreihe in folgender Weise formuliert werden.

Damit das Agens, abgesehen von den aktiven Atomen ihrer Oberflächen, also in die Tiefe der Mischkristalle wirken kann, müssen vor allem in ihm Gittergerade dichterer Atombesetzung vorhanden sein, die nur mit aktiven Atomen besetzt sind.

Aus der normalen Atomverteilung kann abgeleitet werden der Molenbruch der inaktiven Atomart p, bei dem die ersten nur mit aktiven Atomen besetzten Gittergeraden auftreten. Für die Gittergeraden verschiedener Gruppen kristallographisch gleichwertiger Richtungen sind diese p-Werte verschieden.

In der folgenden Tabelle sind die Quotienten einfacher Fäden für die Werte $p = \frac{n}{8}$ und für vier verschiedene Gruppen von Gittergeraden angegeben. Der Fadenquotient ist die Zahl der nur mit aktiven Atomen besetzten Gittergeraden dividiert durch die Gesamtzahl aller Gittergeraden einer Richtung. In kristallographisch gleichwertigen Richtungen hat der Fadenquotient denselben Wert.

Quotienten einfacher Fäden.

	$p = \frac{7}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$
1) Seitendiagonalen, senkrecht (011)	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
2) Würfelkanten, senkrecht (001)	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
3) Körperdiagonalen durch die Ecken und Seitenmitten, senkrecht (211)	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
4) Körperdiagonalen, durch die Würfelecken, senkrecht (111)	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{3}{4}$

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß, wie $p < \frac{1}{2}$ wird, in den Richtungen der Würfelkanten und der Körperdiagonalen Fäden

auftreten. In den beiden anderen, dichter mit Atomen besetzten Richtungen treten nur mit aktiven Atomen besetzte Gittergerade, Fäden, schon beim Wert $p = \frac{7}{8}$ auf. Es sind also bei $p = \frac{4}{8}$ schon viele Fäden vorhanden, und doch wirken auch die wirksamsten Agentien auf die Mischkristalle von $p = \frac{7}{8}$ bis $\frac{4}{8}$ nicht ein. Hieraus folgt, daß die Wirkung nicht auf jeden, beliebig gerichteten Faden stattfindet, sondern daß der Einwirkung nur Fäden bestimmter Richtung, der der Würfelkanten oder der der Körperdiagonalen, unterliegen können. Eine Entscheidung hierüber ergibt sich bei der Untersuchung der Einwirkungsgrenzen mit kleineren p-Werten.

Die Agentien kann man nach ihren Einwirkungsgrenzen, ausgedrückt durch die p-Werte, in Gruppen teilen. Die Agentien mit der Einwirkungsgrenze $p = \frac{4}{8}$ nennen wir einfache, die mit der Einwirkungsgrenze $p = \frac{2}{8}$ zweifache und die mit der Grenze $p = \frac{1}{8}$ vierfache. Der in dieser Weise bezeichnete Einwirkungsgrad fällt nicht selten mit der Wertigkeit des Agens zusammen, da die aktiven Cu- und Ag-Atome in unsern Fällen als einwertige Atome wirken.

Die Fähigkeit der aktiven Atome der Mischkristalle nur beim Angriff in gewissen Richtungen der Wirkung des Agens zu unterliegen, ist noch näher zu bestimmen.

Die aktiven Atome denken wir uns mit Affinitätsvektoren ausgestattet. Nur wenn das Molekül des Agens in den Richtungen dieser Affinitätsvektore Zutritt zum aktiven Atom hat, erfolgt die Einwirkung. Zu entscheiden ist, ob diese Affinitätsvektore die Richtungen der Würfelkanten oder die der Körperdiagonalen haben.

Ein einfaches Agens bedarf zu seiner Wirkung des Vorkommens einfacher, ein zweifaches des Vorkommens von Doppelfäden und ein vierfaches des von vier einander benachbarten Fäden. Bei der Einwirkungsgrenze eines zweifachen Agens müssen also in der Richtung, in der das einfache wirkt, die ersten Doppelfäden auftreten und es ist ferner wahrscheinlich, daß die beiden Fäden einander möglichst nahe liegen, daß also die Verbindungsgeraden je zweier Atome beider Fäden in den Richtungen der Seitendiagonalen, den am dichtesten besetzten Gitter-Geraden liegen. Auf Grund dieser Forderung kann die Frage nach der Richtung des Affinitätsvektors entschieden werden.

In der Richtung der Würfelkanten ändert sich der Quotient einfacher Fäden zwischen $p = \frac{2}{8}$ bis $p = \frac{3}{16}$ nicht, daher können in diesen Richtungen im angegebenen Konzentrationsintervall keine

Doppelfäden auftreten. Der Quotient einfacher Fäden der Körperdiagonalen wächst aber zwischen $p = \frac{2}{8}$ und $\frac{3}{16}$ von $\frac{12}{16}$ auf $\frac{13}{16}$ und es entstehen, wie $p < \frac{2}{8}$ wird, jene Doppelfäden, längs denen die Wirkung eines zweifachen Agens ins Innere des Mischkristalls dringen kann[1]). Die Affinitätsvektore liegen also in den Richtungen der Körperdiagonalen, oder: nur, wenn das Molekül eines Agens in dieser Richtung die aktiven Cu- oder Ag-Atome erreichen kann, wird die Einwirkung vor sich gehen.

Die Einwirkungsgrenze vierfacher Agentien bestätigt diese Bestimmung der Lage des Affinitätsvektors; denn bei dieser Einwirkungsgrenze $p = \frac{1}{8}$ treten vierfache Fäden in den Richtungen der Körperdiagonalen auf.

Die verschiedene Angriffsgeschwindigkeit verschiedener Kristallflächen eines Mischkristalls, dessen Au-Gehalt ein wenig unterhalb der Einwirkungsgrenze liegt.

Für den Affinitätsvektor ergab sich die Richtung der Körperdiagonale des Würfels. Da jedes Atom im Gitter von vier Körperdiagonalen geschnitten wird, so hat man sich vorzustellen, daß von jedem aktiven Atom aus acht Affinitätsvektore nach den acht Würfelecken weisen; nur in diesen acht Richtungen kann ein auf das aktive Atom stoßendes Molekül des Agens wirken.

Würden uns isolierte Mischkristalle zu Gebot stehen, so könnten aus dem verschiedenen Verhalten verschiedener Kristallflächen gegenüber der Einwirkung des Agens ebenfalls Schlüsse auf die Richtung der Affinitätsvektore gezogen werden. Die untersuchten Plättchen sind aber Konglomerate, bestehend aus unregelmäßig orientierten Kristalliten, deren Begrenzungsflächen ebenfalls unregelmäßig orientiert sind. Unterschiede in dem Verhalten der Flächen verschiedener Kristallite könnten durch verschiedene Orientierung dieser Flächen zu den Affinitätsvektoren bedingt sein. Solche Unterschiede können schon mit der Lupe auf den Oberflächen der Plättchen häufig beobachtet werden. Es ist aber auch daran zu erinnern, daß sich Schutzschichten verschiedener Dicke auf den einzelnen Kristalliten bilden können, wodurch solche Verschiedenheiten ebenfalls verursacht werden können. Die Möglichkeit, die Orientierung einzelner Kristallitenebenen aus ihrer Veränderung durch geeignete Agentien zu erkennen, wäre von Bedeutung, ins-

1) Diesem Faden fehlt die früher als erste und zweite Hinderung beschriebene Umgebung inaktiver Atome l. c. S. 260.

besondere könnte auf diesem Wege Genaueres über die Orientierung der bei dauernden Deformationen der Kristallite auftretenden Gleitebenen ermittelt werden.

Unter den Voraussetzungen, daß die Veränderungen einer Kristallebene proportional sind der Dichte der Fäden in den Richtungen der Körperdiagonalen auf den Kristallebenen, und daß die Winkel, unter denen diese Fäden die betreffenden Kristallflächen schneiden, die Angriffsgeschwindigkeit nicht beeinflussen, kann das Verhältnis der Veränderungen bestimmter Kristallebenen angegeben werden. Gesetzt die Zahl der Fäden in jeder Richtung der vier Körperdiagonalen des Würfels sei n. Eine Würfelebene (001) wird dann von $4n$ Fäden getroffen, eine Oktaederebene (111) nur von $3n$ Fäden, da n Fäden ihr parallel verlaufen und eine Rhombendodekaederebene (011) wird von $2n$ Fäden geschnitten, da $2n$ Fäden ihr parallel verlaufen. Dividiert man diese Zahlen durch den Flächeninhalt der drei Ebenen, die ihnen im Würfel mit der Seitenlänge a zukommt, so erhält man die Fadendichte auf jeder der drei Kristallebenen. Die Flächeninhalte der drei Ebenen sind: der der Würfelebene a^2, der der Oktaederebene $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ und der der Rhombendodekaederebene $\sqrt{2}\,a^2$. Die Fadendichten dieser drei Ebenen sind also $\frac{4n}{a^2}$, $\frac{2\sqrt{3}n}{a^2}$ und $\frac{\sqrt{2}n}{a^2}$, oder die Veränderungen der Kristallebenen (001), (111) und (011) verhalten sich wie $4:3.46:1.41$. Sucht man auf einem Cu-Au- oder Ag-Au-Plättchen mit natürlicher Oberfläche, die Kristallite mit maximaler Veränderung ihrer Oberflächen auf, so werden diese mit den Würfelebenen nahe zusammenfallen. Von diesen unterscheiden sich ihrer Veränderung nach die Oktaederebenen allerdings nicht erheblich. Die Rhombendodekaederebenen werden aber viel weniger angegriffen. In derselben Weise kann man sich von der Veränderung anderer Kristallebenen Rechenschaft geben.

Die Resistenz der Mischkristalle.

An Modellen, welche die normale Verteilung beider Atomarten in den Mischkristallen darstellen, können die Gründe der Angreifbarkeit oder Widerstandsfähigkeit der ihnen entsprechenden Mischkristalle näher verfolgt werden.

Fig. 4 ist nach der Photographie eines Modells eines 14-Punkt-Gitters mit gleicher Zahl von hellen und dunklen Atomen, $p = \frac{4}{8}$,

hergestellt. Bei dieser Stellung des Modells sieht man, daß dieser Mischkristall aus Atomschichten parallel der Oktaederebene, besteht; von diesen Schichten enthält jede nur eine Atomart. Ein Paar der Affinitätsvektore der hellen, aktiven Atome fällt mit der Oktaederebene zusammen. Daher könnte durch Wirkung eines Agens mit hinreichend kleinen Molekülen der Mischkristall in Lamellen inaktiver Atome aufgespalten werden. In Wirklichkeit wird er aber z. B. durch starke Salpetersäure nicht merklich angegriffen. Hieraus ist zu schließen, daß, wenn auch die hellen Atome der ersten Reihen auf den Würfelebenen gelöst werden, die ihnen parallelen Reihen von dunklen Atomen stehen bleiben

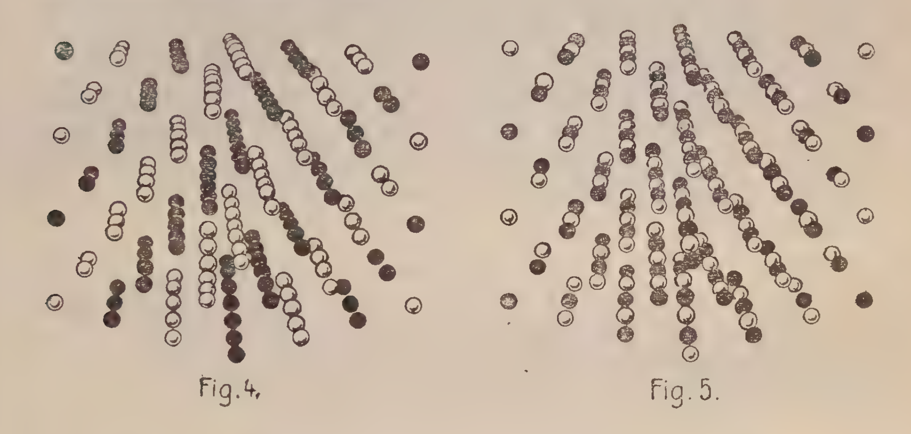


Fig. 4. Fig. 5.

und den Salpetersäure-Molekülen den Zutritt zu den tieferliegenden Reihen der hellen Atome verwehren. Wie tief der Eingriff der Salpetersäure ins Gitter sich erstreckt, ob nur die erste Reihe der hellen Atome oder auch die zweite unter der ersten Würfelebene oder sogar die dritte von der Salpetersäure entfernt werden, darüber könnte nur eine Spezialuntersuchung nach erst zu schaffenden Methoden entscheiden. In jedem Falle wäre die Menge der abgegebenen hellen Atome nicht analytisch nachweisbar.

Dreht man das Gitter um 90°, so ist aus Fig. 5 zu ersehen, daß Salpetersäure-Moleküle, die in der Richtung auf das Modell zu fliegen, nur die hellen, aktiven Atome der Oberfläche in Lösung bringen können, denn hinter jedem hellen Atom befindet sich in der Richtung der Körperdiagonalen ein dunkles. Allerdings würden die Moleküle des Agens nach Entfernung der hellen Atome der Würfelebenen noch Zutritt zu hellen Atomen haben, die mit den ersten Senkrechte zu den Ebenen (211) besetzen, aber auch hier würde den wirkenden Molekülen der Zutritt durch die stehen

gebliebenen dunklen Atome nach Entfernung der ersten oder zweiten Reihe der hellen behindert werden. Es bilden sich zwischen den stehen bleibenden dunklen Atomen Rillen, in welche die Moleküle des Agens nicht tief genug eindringen können, um merkliche Mengen der hellen Atome zu erfassen.

Denkt man sich nun auf der Körperdiagonale durch die oben dem Beschauer zugekehrte Ecke des Würfels die beiden schwarzen Atome durch helle ersetzt, also einen Faden entstanden, so würde durch Entfernung von sechs hellen Atomen um das dunkle, das sich mit der Würfelecke auf der Geraden senkrecht zur Ebene (211)

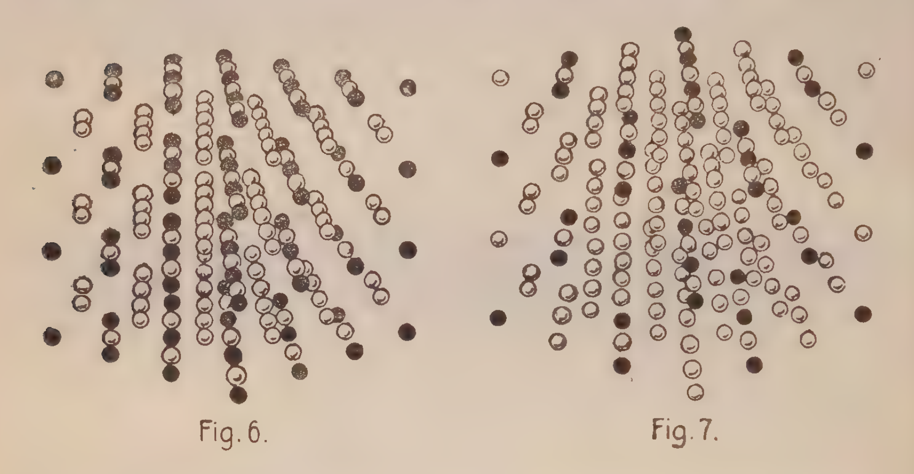


Fig. 6. Fig. 7.

befindet, dessen Zusammenhang mit dem Gitter so weit gelockert werden, daß es diesen Verband früher oder später verlassen wird. Dadurch werden weitere aktive Atome der Einwirkung zugänglich und die Bresche wird sich erweitern und vertiefen.

Fig. 6 gibt die normale Atomverteilung des 14-Punktgitters für $p = \frac{2}{8}$ wieder.

Es ist zu ersehen, daß bei diesem Mischungsverhältnis, ein einfaches Agens das Gitter vollständig abbauen wird. Nach Entfernung der hellen Atome aus den Würfelebenen haben die Moleküle des Agens Zutritt zu den Atomen der zweiten Schicht, die nur helle Atome enthält; nachdem diese in Lösung gegangen sind, können die dunklen Atome der ersten Schicht schwerlich im Gitterverbande verbleiben. An der dritten Schicht wiederholen sich die Ereignisse aus der ersten u. s. w.

Einem zweifachen Agens gegenüber ist diese Atomverteilung noch gerade beständig, da Doppelfäden der Körperdiagonalen des Würfels, deren Atompaare die möglichst kleinsten Abstände haben,

noch nicht vorhanden sind. Ersetzt man aber auf einer Körperdiagonalen die inaktiven, schwarzen Atome durch helle, so entsteht ein solcher Doppelfaden, und ein Molekül des Agens kann zwei helle Atome zugleich aus dem Gitter nehmen. Der so entstehende Kanal ist von 6 einfachen Fäden umgeben, dessen Atome ebenfalls paarweise mit dem zweifachen Molekül sich verbinden werden.

Fig. 7 gibt die Atomverteilung für $p = \frac{1}{8}$. Vierfache Fäden der Körperdiagonalen, deren Atome die Ecken eines Quadrates besetzen mit einer Seite, die gleich dem kleinsten Atomabstand ist, sind bei $p = \frac{1}{8}$ noch nicht vorhanden. Ersetzt man aber zwei schwarze Atome durch helle, z. B. die einer Körperdiagonale, so entsteht ein vierfacher Faden, und die Moleküle des Agens können in die Tiefe des Gitters wirken. Hier werden sich noch weitere Gelegenheiten finden, je vier Atome der beschriebenen Stellung zu einander herauszuholen.

An drei Beispielen wurde gezeigt, daß man sich bei gegebener, normaler Atomverteilung über den Abbau von Gittern, besetzt mit aktiven und inaktiven Atomen in bestimmten Mischungsverhältnissen, begründete, recht ins Einzelne gehende Vorstellungen verschaffen kann.

Die Abweichungen von den normalen Resistenzgrenzen.

Die normalen Resistenzgrenzen für Mischkristalle der 14-Punkt-Gitter liegen, wie wir sahen, bei Vielfachen von $\frac{1}{8}$. Die Einwirkungsgrenzen eines Teils der Agentien erreichen innerhalb der Fehlergrenzen der Bestimmungen diese normalen Grenzen. Bei der Einwirkung schwächerer Oxydationsmittel mit der normalen Grenze $p = \frac{2}{8}$ wird diese nicht ganz erreicht und bei der Einwirkung von schwefel- und selenhaltigen Stoffen auf die Ag-Au-Mischkristalle wird die normale Grenze $p = \frac{2}{8}$ sogar überschritten, während bei der Einwirkung dieser Agentien auf die Cu-Au-Mischkristalle die normale Grenze zum Teil erreicht, zum Teil fast erreicht wird. Aus diesen Tatsachen folgt, daß die Abweichungen von der theoretischen Grenze nicht durch Abweichungen von der normalen Atomverteilung im Gitter bedingt sind, sondern daß sie eine Folge spezieller Eigentümlichkeiten der Agentien oder der von ihnen gebildeten Reaktionsprodukte sind.

Man kann diese Abweichungen in erster Linie als Folgen der Tendenz der bei der Reaktion gebildeten Moleküle sich zu einer neuen Phase zu sammeln auffassen; ist diese Tendenz klein, so wird die normale Grenze nicht erreicht. Wenn andererseits die ersten

Molekülschichten der Reaktionsprodukte, wie Ag_2S oder Ag_2Se für die wirkenden S- oder Se-Atome durchlässig sind und sich nach einer gewissen Verdickung dieser Schicht ihre Phase bildet, so können hierbei die inaktiven Atome des Gitters aus ihren Lagen gehoben werden, worauf das Spiel von neuem beginnt. Erst wenn die Zahl der inaktiven Atome sich vermehrt hat, üben sie einen so starken Widerstand aus, daß die Beladung der Oberfläche mit den Molekülen der Reaktionsprodukte eine dauernde wird. Hiermit im Einklang steht die Tatsache, daß, wenn die normale Einwirkungsgrenze überschritten wird, eine deutliche Verfärbung der Plättchen, die sich weit über die Einwirkungsgrenze hin erstreckt, beobachtet wird.

Betrachtet man die Atomverteilung $p = \frac{2}{8}$, bei der das Überschreiten und Nichterreichen der theoretischen Grenze für mehrere Fälle erwiesen ist, und denkt sich mit je zwei aktiven Atomen ein Sauerstoff-Atom verbunden, so könnte dieses Gebilde eine recht erhebliche Stabilität besitzen, wenn die mit Sauerstoff beladenen Atome eine geringe Tendenz zur Bildung des Oxydes als neue Phase haben. Diese mit Sauerstoff verbundenen aktiven Atome nehmen zwischen den aktiven Atomen des Gitters und den Molekülen des Oxydes eine Zwitterstellung ein, indem sie fast Oxyd-Moleküle sind, andererseits aber noch dem Gitterverbande angehören. Denkt man sich in diesem Gebilde einen Doppelfaden, so wird derselbe mit zwei aktiven Atomen, an denen je ein Sauerstoff-Atom sitzt, abschließen; dieser ein wenig instabiler gewordene Zustand der Oberfläche wird sich aber noch halten bis sich die Zahl der Fäden bis zu einem gewissen Grade vermehrt hat, worauf tiefer gehende Wirkungen erfolgen.

Diese Auffassung kann auch auf andere Passivitätserscheinungen übertragen werden, nämlich auf die von F. Foerster[1]) unter der Bezeichnung „chemische“ Passivitätserscheinungen zusammengefaßten im Gegensatz zu „mechanischen“, durch Schichten von Reaktionsprodukten bedingten. Bei der Passivierung des Eisens, dessen Atome wahrscheinlich ebenfalls ein 14-Punkt-Gitter besetzen, könnte sich z. B. ein Sauerstoffmolekül an zwei benachbarte Fe-Atome lagern und deren vier Affinitätsvektore absättigen. Ob hierbei die Bindung zwischen den beiden Sauerstoffatomen aufgehoben oder nur gelockert wird, mag dahingestellt sein. Eine in dieser Weise mit Sauerstoff beladene Oberfläche eines Eisen-Kristalliten wäre Oxydationsmitteln gegenüber nicht mehr reaktions-

1) Elektrochemie 1915 S. 354.

fähig; durch Einwirkung von Reduktionsmitteln auf sie würde sie wieder aktiv werden. Diese Spezialisierung der Sauerstoffbeladung würde auch den Befunden von W. J. Müller und J. Königsberger[1]), daß durch Passivierung das Reflexionsvermögen des Eisens nicht merklich verändert wird, entsprechen.

Allgemeine Bedingung der chemischen Passivität ist die Abwesenheit von Platzwechseln der Atome im Gitter. Wenn diese bei Temperatursteigerung eintritt, so würde hierdurch der nicht sehr stabile Belastungszustand der Oberfläche des Metallstückes gestört werden.

Bei der Fällung von Silber aus seinen Salzen überschreiten die Fällungsgrenzen aus den Lösungen normaler Silbersalze den theoretischen Wert von 0.125 Mol Au und diese Grenze wird bei der Fällung aus Lösungen komplexer Silbersalze nicht erreicht.

Die Ag-Fällung ist offenbar an die Bedingung geknüpft, daß vier Ag-Ionen gleichzeitig vier Kupfer-Atome in den Richtungen der Körperdiagonalen treffen, und daß die Cu-Atome der Würfelebenen die Ecken eines Quadrates besetzen, dessen Seitenlänge der kleinsten Atomentfernung im Gitter entspricht. Bei $p = \frac{1}{8}$ Mol ist, wie aus Fig. 7 ersichtlich, diese Bedingung nur für jede zweite Netzebene des Würfels erfüllt; aber wenn ein Au-Atom der einen Netzebene durch ein Cu-Atom ersetzt wird, so ist diese Bedingung erfüllt. Wenn also der Au-Gehalt unter $\frac{1}{8}$ Mol Au sinkt, so müßte die Ag-Fällung vor sich gehen.

Daß die Ag-Fällung der Lösungen normaler Ag-Salze schon bei höherem Au-Gehalt eintritt, kann sehr wohl daher kommen, daß die normale Atomverteilung sich auch nach 40stündigem Tempern noch nicht genau hergestellt hat. Es ist auch zu erwarten, daß je größer die Abstände der Au-Atome im Gitter von einander werden, desto langsamer die normale Verteilung sich herstellen wird.

Daß die Fällungsgrenze in den Lösungen der komplexen Ag-Salze nicht erreicht wird, kann durch ihre sehr geringe Konzentration an Ag-Ionen und der damit verbundenen geringen Wahrscheinlichkeit bedingt sein, daß vier Ag-Atome gleichzeitig die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllen.

Eine Sonderstellung unter den auf die Cu-Au-Mischkristalle wirkenden Agentien nehmen die Quecksilbersalze ein. Lösungen von $HgNO_3$ und $HgCl$ wirken auf alle Cu-Au-Legierungen, nicht aber auf reines Au ein, und dasselbe gilt für die Lösungen von $Hg(NO_3)_2$. Der Grund für diese Sonderstellung ist darin zu suchen,

---

1) Zeitschr. f. Elektrochemie 13, 659, 1907 und 15, 742, 1909.

daß hier das Reaktionsprodukt, metallisches Quecksilber, auf die Au-Atome des Gitters wirkt, daher die Fähigkeit besitzt in das Gitter einzudringen, während den Reaktionsprodukten anderer Reaktionen diese Fähigkeit fehlt.

Da auch bei einem Gehalt von nur 1 % Cu die Wirkung der Merkurosalze noch eine recht merkliche ist, so werden, nachdem die relativ wenigen Cu-Atome der Oberfläche je ein Hg-Atom gefällt haben, jedes von diesen eine recht erhebliche Anzahl von Au-Atomen aus ihrem Gitterverbande bringen müssen, damit das Agens zu den tiefer liegenden, von Au-Atomen geschützten Cu-Atomen gelangen kann. Die Wirkung des Merkurinitrates ist, weil sich hierbei $HgNO_3$ bildet, wie die des $HgNO_3$ zu verstehen.

Die Wertigkeit der wirkenden Moleküle und die Einwirkungsgrenzen.

Die Einwirkungsgrenze eines Agens wird bestimmt durch die Natur des Agens, durch die Beschaffenheit der Fäden im Mischkristall, die bei der Einwirkungsgrenze verschwinden und durch die Wertigkeit der aktiven Atome des Mischkristalls. Die Beschaffenheit der Fäden kann sich in zweifacher Weise ändern. Erstens durch Änderung der Zahl der benachbarten Fäden und zweitens durch Änderung ihrer Umgebung mit inaktiven Atomen. Als Beispiel für die Wirkung der Umgebung auf einen einfachen Faden kann auf die früher dargelegte Deutung (l. c.) der Einwirkungsgrenzen schwacher, mittelstarker und stärkster Oxydationsmittel verwiesen werden.

In der Regel ist die Zahl der benachbarten Fäden, die bei der Einwirkungsgrenze verschwinden, gleich der Wertigkeit des Agens dividiert durch die der aktiven Atome des Mischkristalls. Ist dieser Quotient ein Bruch, so gibt der Zähler des Bruches die Zahl der benachbarten Fäden an, bei deren Verschwinden die Einwirkungsgrenze liegt.

Diese Regel ist nicht immer erfüllt, aber bei einem Teil der Abweichungen läßt sie sich durch eine zulässige Annahme über die wirkenden Moleküle des Agens halten. So liegt die Einwirkungsgrenze der Lösung von $AuCl_3$ auf die Ag-Au-Legierungen nicht bei dem Au-Gehalt, bei dem dreifache Fäden, sondern bei dem Au-Gehalt, bei dem einfache Fäden verschwinden. Die Lösungen von $AuCl_3$ enthalten aber bekanntlich neben $AuCl_3$-Molekülen auch AuCl-Moleküle. Schreibt man diesen die Wirkung zu, so ist die Wertigkeit des Agens und die der Ag-Atome mit der Einwirkungsgrenze in Übereinstimmung.

Neben der Wertigkeit können aber auch noch andere Reaktionsbedingungen bestehen, in die uns nur die Einwirkungsgrenzen Einblick verschaffen, wie in die Bedingungen der Fällung von Silbersalzen durch die Cu-Au-Mischkristalle.

In Übereinstimmung mit der Beziehung der Wertigkeit zu den Einwirkungsgrenzen hat sich ergeben, daß, wenn an Stelle eines einwertigen aktiven Atomes in der Mischkristallreihe ein zweiwertiges auftritt, der Unterschied der Einwirkungsgrenzen ein- und zweiwertiger Agentien verschwindet[1]).

---

1) Nachrichten Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1917 S. 161.

Bemerkung zu der Note:

Die Methode des Bogenelementes in der Theorie der Uniformisierungstranszendenten mit Grenz- oder Hauptkreis.

Von

Leon Lichtenstein in Berlin.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 11. Januar 1918.

In meiner unter dem obigen Titel in den Gött. Nachrichten vor kurzem erschienenen Note beweise ich unter anderem, daß die Lösung u der Differentialgleichung $\Delta u = ke^u$, unter k eine positive, reelle, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion verstanden, in der Umgebung der Randkomponente $\sum_\nu$ $(\nu = 1, \dots p)$ sich in der Form

$$u = v + \gamma + \omega_\nu(l_\nu), \quad \lim_{l=0} \omega_\nu = 0$$

darstellen läßt. In dem speziellen Falle der Differentialgleichung $\Delta u = 8e^u$ gilt nach einer früheren Veröffentlichung von Herrn Koebe[1]) die präzise Verhaltungsformel

$$u = -2\log l_\nu - 2\log 2 + \overline{\omega}_\nu(l_\nu), \quad \lim_{l_\nu=0} \overline{\omega}_\nu = 0.$$

Nach einer weiteren mündlichen Mitteilung des Herrn Koebe ergibt sich hieraus, wenn der Logarithmus von k eine Potentialfunktion ist, durch die Substitution

$$u' = u + \log k - 3\log 2$$

die präzise Verhaltungsformel

$$u = -2\log l_\nu - \log k + \log 2 + \overline{\overline{\omega}}_\nu(l_\nu), \quad \lim_{l_\nu=0} \overline{\overline{\omega}}_\nu = 0.$$

1) Vgl. P. Koebe, Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung (Voranzeige. Zweite Mitteilung), Gött. Nachrichten 1916.

Die kürzeste Entfernung und ihre Azimute zwischen zwei gegebenen Punkten des Erdellipsoids.

Von

L. Krüger in Potsdam.

Vorgelegt von Herrn Hartmann in der Sitzung vom 26. Oktober 1917.

In der zweiten Abhandlung der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“ hat C. F. Gauß auf zwei ganz voneinander verschiedenen Wegen Formeln entwickelt zur Übertragung der geographischen Breite und Länge auf dem Erdellipsoid mittels der linearen Länge der geodätischen Linie und ihres Ausgangsazimutes[1]). Voraussetzung ist dabei, daß die Entfernung s im Vergleich zu den Erddimensionen klein ist, daß sie etwa die Größe einer Hauptdreiecksseite hat, oder diese doch nicht wesentlich überschreitet[2]). Die Gauß'schen Formeln benutzen die Mittelwerte der Breiten und der Azimute in den Endpunkten der geodätischen Linie, erfordern also indirektes Rechnen. In ihrer logarithmischen Form werden kleine Größen 4. Ordnung von $\frac{s}{a}$ vernachlässigt; $a =$ Äquatorradius. Die Koeffizienten der Glieder 2. Ordnung sind aber vollständige Ausdrücke, die höheren Potenzen der Exzentrizität, auch wenn sie die vierte übersteigen, werden nicht vernachlässigt.

Eine Auflösung der umgekehrten Aufgabe: aus den geographischen Koordinaten zweier Punkte des Erdellipsoids die kürzeste

1) C. F. Gauß Werke, Band IV S. 312 u. f. oder Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 177, herausgegeben von J. Frischauf, S. 45 u. f.

2) Die mathematischen Grundlagen der Landesaufnahme und Kartographie des Erdsphäroids von Prof. Dr. Johannes Frischauf, Stuttgart, Verlag von Konrad Wittwer 1913, S. 21—25 u. 33/34.

Entfernung und ihre Azimute in den beiden Punkten zu berechnen, wurde von Helmert durch Umkehrung der Gauß'schen Formeln erhalten. Um ihre Anwendbarkeit zu vergrößern, wurden von ihm auch noch die von der Exzentrizität freien Glieder 4. Ordnung aus den Gleichungen für das entsprechende sphärische Dreieck entwickelt [1]). Die Formeln, bei denen die Rechnung jetzt eine direkte ist, finden u. a. Anwendung bei Lotabweichungsberechnungen.

Diese Umkehrungsformeln kann man nun auch durch eine direkte Entwicklung erhalten. Eine kurze Anleitung dazu findet man im Gauß'schen Nachlaß [2]); sie geht von den allgemeinen Formeln des Art. 24 der Disqu. gen. c. superficies curvas aus.

Die Entwicklung läßt sich aber noch einfacher gestalten, wie im folgenden zunächst gezeigt werden soll. Zu diesem Zwecke werden allgemein für Rotationsflächen Formeln hergestellt, die Entfernung und Azimut ergeben, wenn die geographischen Breiten und Längen bekannt sind. Aus ihnen folgen dann leicht Formeln, in logarithmischer Form bis auf kleine Glieder 4. Ordnung, die für das Erdellipsoid gelten.

Ich habe darauf die Entwicklung weiter geführt, sodaß auch die Glieder 4. Ordnung vollständig, mit Einschluß aller von der Exzentrizität abhängigen Bestandteile, erhalten werden.

Die Genauigkeit dieser Formeln läßt sich noch erhöhen, indem man sie so umformt, daß die ihren Hauptgliedern zugefügten Korrektionen 2. und 4. Ordnung, ebenso wie die in ihnen vernachlässigten Glieder höherer Ordnung, sämtlich mit dem Quadrat der Exzentrizität multipliziert sind. Der Gültigkeitsbereich wird dadurch sehr erweitert. Die neuen Formeln liefern in mittleren Breiten des Erdellipsoids, bei einem Breiten- und Längenunterschied von je etwa 10^0, in den Azimuten die 4. Dezimalstelle der Sekunde auf 1 bis 2 Einheiten und im Logarithmus der Entfernung die 9. Dezimalstelle auf eine Einheit genau. Sie reichen so weit wie die von W. Jordan als neue Auflösung des geodätischen Polardreiecks gegebenen Formeln [3]).

Ich halte die neuen Formeln aber bei der numerischen Rechnung für bequemer als die Jordan'schen Formeln, weil sie mit den

---

1) F. R. Helmert, Lotabweichungen, Heft I: Formeln und Tafeln, sowie einige numerische Ergebnisse für Norddeutschland. Veröffentlichung des Königl. Preuß. Geodätischen Institutes. Berlin 1886, S. 13—15.

2) C. F. Gauß' Werke, Band IX, S. 13—15.

3) W. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, Stuttgart, J. B. Metzler'sche Buchhandlung 1916, III. Band, bearbeitet von Prof. Dr. O. Eggert, S. 471—478.

unmittelbar gegebenen Größen rechnen, was bei Jordan nicht stattfindet.

Die Jordan'schen Formeln, die ein bestimmter Fall der meinigen sind, werden zum Schluß aus den letzteren hergeleitet. Dabei ergeben sich die Glieder 5. Ordnung in den Reduktionsformeln der sphäroidischen geographischen Länge und der sphäroidischen Entfernung auf die entsprechenden sphärischen Größen, die bei der Jordan'schen Auflösung zu benutzen sind, vollständig, während Jordan selbst nur die mit dem Quadrat der Exzentrizität multiplizierten Bestandteile hat.

Die Umformung in die Jordan'schen Formeln kann auf doppelte Weise geschehen. Dadurch wird eine Kontrolle für die Richtigkeit der Koeffizienten in den von mir entwickelten Formeln erhalten.

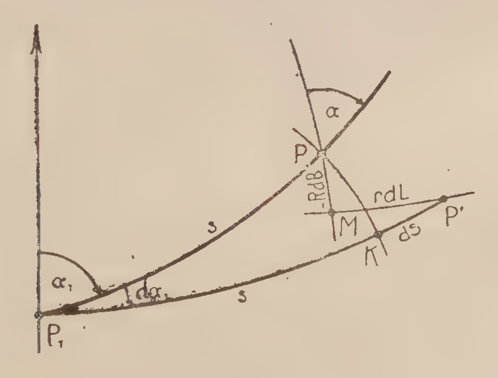
Formeln für Rotationsflächen.

§ 1. Kürzeste Entfernung und ihr Azimut.

Auf einer Rotationsfläche gehe eine geodätische Linie s von dem Punkte P_1 nach dem Punkte P. Ihr nordöstliches Azimut in P sei α; ferner seien B und L die geographische Breite und Länge, und R und r die Krümmungsradien im Meridian und im Parallelkreise des Punktes P. Die entsprechenden Werte in P_1 werden durch den Index 1 kenntlich gemacht.

Dreht man die geodätische Linie in P_1 um $d\alpha_1$, und vergrößert man sie gleichzeitig um ds, so gelangt man nach P'. Zum Punkt P' kommt man auch, wenn man sich auf dem Meridian durch P um $-RdB$ bis M und alsdann auf dem Parallelkreise um rdL bewegt. Zieht man den geodätischen Kreis um P_1 mit dem Radius $P_1P = s = P_1K$, so ist $KP' = ds$ und PK ist senkrecht zu P_1P und P_1K. Da ferner $P'M$ senkrecht zu PM ist, so folgt aus dem unendlich kleinen Viereck $PMP'K$:

$$ds = RdB.\cos\alpha + rdL.\sin\alpha;$$



für die partiellen Änderungen von ds ergibt sich hiernach:

$$\frac{\partial s}{\partial B} = R \cos\alpha, \quad \frac{\partial s}{\partial L} = r \sin\alpha.$$

Daraus erhält man:

$$s\cos\alpha = \frac{1}{2R}\frac{\partial s^2}{\partial B}, \quad s\sin\alpha = \frac{1}{2r}\frac{\partial s^2}{\partial L}; \tag{1}$$

$$\left(\frac{1}{R}\frac{\partial s^2}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial s^2}{\partial L}\right)^2 = 4s^2. \tag{2}$$

Mittels der letzten Gleichung kann s^2 als Potenzreihe von $\varDelta B = B - B_1$ und $\varDelta L = L - L_1$ entwickelt werden. $\varDelta B$ und $\varDelta L$, die vorläufig in Bogenmaß gegeben sein sollen, werden als kleine Größen 1. Ordnung vorausgesetzt.

Hierzu wird die Annahme gemacht, daß sich R und r für den Bereich von s in konvergente Potenzreihen von $\varDelta B$ entwickeln lassen.

Es sei

$$\begin{aligned} R &= R_1(1 + \mu_1' \varDelta B + \tfrac{1}{2}\mu_1'' \varDelta B^2 + \tfrac{1}{6}\mu_1''' \varDelta B^3 + \cdots) \\ r &= r_1(1 + \nu_1' \varDelta B + \tfrac{1}{2}\nu_1'' \varDelta B^2 + \tfrac{1}{6}\nu_1''' \varDelta B^3 + \cdots), \end{aligned} \tag{3}$$

worin

$$= \frac{d\ln R_1}{dB_1}, \quad \mu_1^{(i+1)} = \mu_1' \mu_1^{(i)} + \frac{d\mu_1^{(i)}}{dB_1};$$

$$\nu_1' = \frac{d\ln r_1}{dB_1}, \quad \nu_1^{(i+1)} = \nu_1' \nu_1^{(i)} + \frac{d\nu_1^{(i)}}{dB_1}.$$

Die Entwicklung von s^2 muß mit $R_1^2 \varDelta B^2 + r_1^2 \varDelta L^2$ beginnen, welcher Wert sich für unendlich kleine s^2 ergibt. Weiter erkennt man, daß s^2 nur gerade Potenzen von $\varDelta L$ besitzen kann, weil sein Wert ungeändert bleiben muß, wenn $-\varDelta L$ an Stelle von $+\varDelta L$ tritt. Mithin wird s^2 die folgende Form haben:

$$s^2 = f_0 + f_1 \varDelta L^2 + f_2 \varDelta L^4 + \cdots \tag{4}$$

mit

$$\begin{aligned} f_0 &= R_1^2(\varDelta B^2 + c_{0.3}\varDelta B^3 + c_{0.4}\varDelta B^4 + \cdots) \\ f_1 &= r_1^2(1 + c_{2.1}\varDelta B + c_{2.2}\varDelta B^2 + \cdots) \\ f_2 &= r_1^4(c_{4.0} + \cdots), \text{ usw.} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten c sind nun zu bestimmen.

Setzt man

$$f_0' = \frac{df_0}{dB} = 2R_1^2 \varDelta B(1 + \tfrac{3}{2}c_{0.3}\varDelta B + 2c_{0.4}\varDelta B^2 + \cdots) \tag{5}$$

$$f_1' = \frac{df_1}{dB} = r_1^2(c_{2\cdot 1} + 2c_{2\cdot 2}\varDelta B + \cdots) \tag{5}$$

$$f_2' = \frac{df_2}{dB} = r_1^4(\ldots),$$

so ist:

$$\frac{\partial s^2}{\partial B} = f_0' + f_1'\varDelta L^2 + f_2'\varDelta L^4 + \cdots$$

$$\frac{\partial s^2}{\partial L} = 2f_1\varDelta L + 4f_2\varDelta L^3 + \cdots.$$

Die Substitution dieser beiden Werte, mit dem Ausdruck (4) für s^2 zusammen, in (2) liefert jetzt durch Vergleichung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $\varDelta L^2$ die nachstehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 4f_0 &= \frac{1}{R^2} f_0'^2 \\ 4f_1 &= \frac{1}{R^2} 2f_0' f_1' + \frac{1}{r^2} 4f_1^2 \\ 4f_2 &= \frac{1}{R^2}(2f_0' f_2' + f_1'^2) + \frac{1}{r^2} 16 f_1 f_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Wenn man in ihnen die Werte für R und r aus (3) und die Werte für f und f' einträgt, so gibt die erste der Gleichungen (6) die Koeffizienten $c_{0\cdot 3}$, $c_{0\cdot 4}$, ..., die zweite darauf die Koeffizienten $c_{2\cdot 1}$, $c_{2\cdot 2}$, ..., usw.

Die Gl. $4R^2 f_0 = f_0'^2$ liefert

$$\begin{aligned} &(1 + 2\mu_1'\varDelta B + (\mu_1'^2 + \mu_1'')\varDelta B^2 + \cdots)(1 + c_{0\cdot 3}\varDelta B + c_{0\cdot 4}\varDelta B^2 + \cdots) \\ &= 1 + 3c_{0\cdot 3}\varDelta B + (\tfrac{9}{4}c_{0\cdot 3}^2 + 4c_{0\cdot 4})\varDelta B^2 + \cdots, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$c_{0\cdot 3} = \mu_1', \quad c_{0\cdot 4} = \tfrac{1}{4}\mu_1'^2 + \tfrac{1}{3}\mu_1'', \cdots \tag{7}$$

Aus der zweiten Gl. (6), die man mit Hilfe der ersten Gl. in

$$2r^2 f_0 f_1' = f_0' f_1 (r^2 - f_1)$$

umformt, wird erhalten:

$$\begin{aligned} &(1 + 2\nu_1'\varDelta B + \cdots)(1 + c_{0\cdot 3}\varDelta B + \cdots)(c_{2\cdot 1} + 2c_{2\cdot 2}\varDelta B + \cdots) \\ &= (1 + \tfrac{3}{2}c_{0\cdot 3}\varDelta B + \cdots)(1 + c_{2\cdot 1}\varDelta B \cdots)(2\nu_1' - c_{2\cdot 1} + (\nu_1'^2 + \nu_1'' - c_{2\cdot 2})\varDelta B + \cdots). \end{aligned}$$

Mit dem vorher gefundenen Werte für $c_{0\cdot 3}$ ergibt sich hieraus:

$$c_{2\cdot 1} = \nu_1', \quad c_{2\cdot 2} = \tfrac{1}{6}\mu_1'\nu_1' + \tfrac{1}{3}\nu_1'', \cdots. \tag{7*}$$

Nach der dritten Gl. (6) wird:

$$4(c_{4\cdot 0}+\cdots) = \frac{1}{R_1^2}(c_{2\cdot 1}^2+\cdots)+16(c_{4\cdot 0}+\cdots)$$

oder

$$c_{4\cdot 0} = -\frac{1}{12}\frac{c_{2\cdot 1}^2}{R_1^2} = -\frac{1}{12}\frac{\nu_1'^2}{R_1^2}, \cdots. \tag{7**}$$

Mithin lautet die Gleichung für s^2:

$$\begin{aligned} s^2 = R_1^2 \Big\{ & \varDelta B^2(1+\mu_1'\varDelta B+(\tfrac{1}{4}\mu_1'^2+\tfrac{1}{3}\mu_1'')\varDelta B^2+\cdots) \\ & +\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^2 \varDelta L^2(1+\nu_1'\varDelta B+(\tfrac{1}{6}\mu_1'\nu_1'+\tfrac{1}{3}\nu_1'')\varDelta B^2+\cdots) \\ & +\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^4 \varDelta L^4\left(-\frac{1}{12}\nu_1'^2+\cdots\right)+\cdots\Big\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Die Gleichungen für das Azimut der geodätischen Linie in dem beliebigen Punkt P können jetzt leicht nach (1) entwickelt werden:

$$s\cos\alpha = \frac{1}{2R}(f_0'+f_1'\varDelta L^2+\cdots)$$

$$s\sin\alpha = \frac{1}{r}\varDelta L(f_1+2f_2\varDelta L^2+\cdots).$$

Nach (3) ist darin

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}(1-\mu_1'\varDelta B+(\mu_1'^2-\tfrac{1}{2}\mu_1'')\varDelta B^2+\cdots)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}(1-\nu_1'\varDelta B+(\nu_1'^2-\tfrac{1}{2}\nu_1'')\varDelta B^2+\cdots)$$

zu setzen. Läßt man den Punkt P nun mit dem Endpunkt P_2 der geodätischen Linie zusammenfallen, so ist

$$\varDelta B = B_2-B_1,\quad \varDelta L = L_2-L_1 \text{ und } \alpha = \alpha_2. \tag{9}$$

Mit den Werten für f und f' unter Berücksichtigung von (7), (7*) und (7**) ergibt sich jetzt:

$$\begin{aligned} s\cos\alpha_2 = R_1\Big\{ & \varDelta B(1+\tfrac{1}{2}\mu_1'\varDelta B+\tfrac{1}{6}\mu_1''\varDelta B^2+\cdots) \\ & +\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^2\varDelta L^2(\tfrac{1}{2}\nu_1'-\tfrac{1}{3}(\mu_1'\nu_1'-\nu_1'')\varDelta B+\cdots)+\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^4\varDelta L^4(\ldots)+\cdots\Big\} \end{aligned} \tag{10}$$

$$s \sin \alpha_2 = r_1 \Delta L \Big\{ 1 \quad * \quad + \tfrac{1}{6}(\mu_1' \nu_1' - \nu_1'') \Delta B^2 + \cdots \qquad (10)$$
$$+ \left(\frac{r_1}{R_1}\right)^2 \Delta L^2 (-\tfrac{1}{6}\nu_{1}'^2 + \cdots) + \left(\frac{r_1}{R_1}\right)^4 \Delta L^4 (\ldots) + \ldots \Big\}.$$

Die Koeffizienten in (8) und (10) gehören zur Breite B_1 des Anfangspunktes P_1. Ist $\alpha_{1.2}$ das Azimut von P_2 in P_1 und $\alpha_{2.1}$ das Azimut von P_1 in P_2, so ist

$$\alpha_1 = \alpha_{1.2} \text{ und } \alpha_2 = \alpha_{2.1} \mp 180^0.$$

§ 2. Einführung der Mittelbreite und des mittleren Azimutes.

Es ist vorteilhaft, die Koeffizienten in (10) auf die Mittelbreite $\frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ zu beziehen und gleichzeitig in den Formeln das mittlere Azimut $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1}{2}(\alpha_{1.2} + \alpha_{2.1} \mp 180^0)$ einzuführen.

Um das Mitschleppen eines Indexes zu vermeiden, setze ich kurz

$$\tfrac{1}{2}(B_1 + B_2) = B \text{ und } \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha, \qquad (11)$$

sodaß also jetzt B und α andere Bedeutung haben, als in § 1.

Durch die Einführung der Mittelbreite und des mittleren Azimutes werden die Formeln (10) genauer, weil dann die Glieder gerader Ordnung sämtlich fortfallen. Denn vertauscht man die Endpunkte der geodätischen Linie, schreibt man also $-\Delta B$ und $-\Delta L$ für $+\Delta B$ und $+\Delta L$ und ersetzt man α durch $\alpha \pm 180^0$, so darf sich an den Formeln für $s \cos \alpha$ und $s \sin \alpha$ nichts ändern.

Zu B sollen R und r gehören. Zunächst sind nun R_1 und r_1 und die Ableitungen nach B_1 durch R und r und die Ableitungen nach B zu ersetzen. Da $B_1 = B - \frac{1}{2}\Delta B$ ist, so wird aber mittels der Taylor'schen Reihe, den Gl. (3) entsprechend, erhalten:

$$\begin{aligned}
R_1 &= R(1 - \tfrac{1}{2}\mu' \Delta B + \tfrac{1}{8}\mu'' \Delta B^2 - \tfrac{1}{48}\mu''' \Delta B^3 + \cdots) \\
R_1 \mu_1' &= R(\mu' - \tfrac{1}{2}\mu'' \Delta B + \tfrac{1}{8}\mu''' \Delta B^2 - \cdots) \\
R_1 \mu_1'' &= R(\mu'' - \tfrac{1}{2}\mu''' \Delta B + \cdots) \\
R_1 \mu_1''' &= R(\mu''' - \cdots) \text{ usw.}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
r_1 &= r(1 - \tfrac{1}{2}\nu' \Delta B + \tfrac{1}{8}\nu'' \Delta B^2 - \tfrac{1}{48}\nu''' \Delta B^3 + \cdots) \\
r_1 \nu_1' &= r(\nu' - \tfrac{1}{2}\nu'' \Delta B + \tfrac{1}{8}\nu''' \Delta B^2 - \cdots) \\
&\text{usw.,}
\end{aligned}$$

wobei

$$R\mu^{(i)} = \frac{d^i R}{dB^i}, \quad r\nu^{(i)} = \frac{d^i r}{dB^i},$$

oder

$$\mu' = \frac{d\ln R}{dB}, \quad \mu^{(i+1)} = \mu' \mu^{(i)} + \frac{d\mu^{(i)}}{dB};$$
$$\nu' = \frac{d\ln r}{dB}, \quad \nu^{(i+1)} = \nu' \nu^{(i)} + \frac{d\nu^{(i)}}{dB} \tag{12}$$

ist. Setzt man diese Werte in (10) ein, so ergibt sich zunächst:

$$s \cos \alpha_2 = R\Big\{\varDelta B + \tfrac{1}{24}\mu'' \varDelta B^3 + \cdots$$
$$+ \left(\frac{r}{R}\right)^2 \varDelta L^2 \left(\tfrac{1}{2}\nu' - \tfrac{1}{12}(\mu'\nu' + 3\nu'^2 - \nu'')\varDelta B + \cdots\right) + \cdots\Big\}$$
$$s \sin \alpha_2 = r\varDelta L\Big\{1 - \tfrac{1}{2}\nu' \varDelta B + \tfrac{1}{24}(4\mu'\nu' - \nu'')\varDelta B^2 + \cdots$$
$$+ \left(\frac{r}{R}\right)^2 \varDelta L^2 \left(-\tfrac{1}{6}\nu'^2 + \cdots\right) + \cdots\Big\}.$$

Aus diesen Formeln erhält man die entsprechenden für $s \cos \alpha_1$ und $s \sin \alpha_1$, indem man an Stelle von α_2, $\varDelta B$, $\varDelta L$ setzt: $\alpha_1 \pm 180^0$ $-\varDelta B$, $-\varDelta L$, d. h. den Punkt P_2 als Anfangspunkt ansieht. Es wird:

$$s \cos \alpha_1 = R\Big\{\varDelta B + \tfrac{1}{24}\mu'' \varDelta B^3 + \cdots$$
$$+ \left(\frac{r}{R}\right)^2 \varDelta L^2 \left(-\tfrac{1}{2}\nu' - \tfrac{1}{12}(\mu'\nu' + 3\nu'^2 - \nu'')\varDelta B + \cdots\right) + \cdots\Big\}$$
$$s \sin \alpha_1 = r\varDelta L\Big\{1 + \tfrac{1}{2}\nu' \varDelta B + \tfrac{1}{24}(4\mu'\nu' - \nu'')\varDelta B^2 + \cdots$$
$$+ \left(\frac{r}{R}\right)^2 \varDelta L^2 \left(-\tfrac{1}{6}\nu'^2 + \cdots\right) + \cdots\Big\}.$$

Bildet man nun aus diesen beiden Gleichungssystemen $\frac{1}{2}(s \sin \alpha_1 + s \sin \alpha_2)$, ferner $\frac{1}{2}(s \cos \alpha_1 - s \cos \alpha_2)$ und $\frac{1}{2}(s \cos \alpha_1 + s \cos \alpha_2)$, so entstehen die folgenden Gleichungen:

$$s \sin \alpha \cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = r\varDelta L\Big\{1 + \tfrac{1}{24}(4\mu'\nu' - \nu'')\varDelta B^2$$
$$- \tfrac{1}{6}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \nu'^2 \varDelta L^2 + Gl_4\Big\}$$
$$s \sin \alpha \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = -\tfrac{1}{2}\frac{r^2}{R}\nu' \varDelta L^2 + Gl_4$$
$$s \cos \alpha \cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = R\varDelta B\Big\{1 + \tfrac{1}{24}\mu'' \varDelta B^2$$
$$- \tfrac{1}{12}\left(\frac{r}{R}\right)^2 (\mu'\nu' + 3\nu'^2 - \nu'')\varDelta L^2 + Gl_4\Big\}.$$

Nach den beiden ersten dieser Gleichungen ist

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} = -\tfrac{1}{2}\frac{r}{R}\nu'\,\varDelta L + Gl_3,$$

also wird

$$\sec\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} = 1+\tfrac{1}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^2\nu'\,\varDelta L^2 + Gl_4;$$

damit findet man aus der ersten und dritten Gleichung als Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
s\sin\alpha &= r\varDelta L\left\{1+\tfrac{1}{24}(\mu'\nu'-\nu'')\,\varDelta B^2-\tfrac{1}{24}\left(\frac{r}{R}\right)^2\nu'^2\,\varDelta L^2\right\}+rGl_5 \qquad (13)\\
s\cos\alpha &= R\varDelta B\left\{1+\tfrac{1}{24}\mu''\,\varDelta B^2-\tfrac{1}{24}\left(\frac{r}{R}\right)^2(2\mu'\nu'+3\nu'^2-2\nu'')\,\varDelta L^2\right\}\\
&\qquad + RGl_5.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen liefern die lineare Länge s und das mittlere Azimut $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_{1.2}+\alpha_{2.1}\mp 180^0)$ der geodätischen Linie, wenn die geographischen Koordinaten ihrer Endpunkte bekannt sind.

Für α wird aus (13) erhalten:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha = \frac{r\varDelta L}{R\varDelta B}\Big\{1&+\tfrac{1}{24}(4\mu'\nu'-\mu''-\nu'')\,\varDelta B^2\\
&+\tfrac{1}{12}\left(\frac{r}{R}\right)^2(\mu'\nu'+\nu'^2-\nu'')\,\varDelta L^2\Big\}+Gl_4 \qquad (14)
\end{aligned}
$$

§ 3. Die Differenz der Azimute im Anfangs- und Endpunkte.

Die obige Formel für $\operatorname{tg}\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$ ist nicht genau genug; will man für sie denselben Genauigkeitsgrad wie bei (14) erzielen, so hätte man, wenn man wie vorher verfährt, die Entwicklung von s^2, Gl. (8), und den daraus folgenden Größen je um 2 Ordnungen weiter treiben müssen.

Man kann jedoch mit Hilfe von (14) eine genauere Formel für $\alpha_2-\alpha_1$ aus der Bedingungsgleichung für die geodätische Linie erhalten. Diese lautet:

$$r_1\sin\alpha_1 = r_2\sin\alpha_2$$

oder

$$r_1\sin(\alpha-\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)) = r_2\sin(\alpha+\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)),$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \operatorname{tg} \alpha. \tag{15}$$

Nun ist aber nach (3):

$$\begin{aligned} r_1 &= r(1 - \tfrac{1}{2}\nu' \varDelta B + \tfrac{1}{8}\nu'' \varDelta B^2 - \tfrac{1}{48}\nu''' \varDelta B^3 + \cdots) \\ r_2 &= r(1 + \tfrac{1}{2}\nu' \varDelta B + \tfrac{1}{8}\nu'' \varDelta B^2 + \tfrac{1}{48}\nu''' \varDelta B^3 + \cdots), \end{aligned}$$

wenn, wie in § 2, r zu $B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ gehört. Hiernach wird:

$$\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = -\tfrac{1}{2}\varDelta B\,(\nu' - \tfrac{1}{24}(3\nu'\nu'' - \nu''')\varDelta B^2 + Gl_4).$$

Setzt man diesen Wert, sowie den Wert von $\operatorname{tg}\alpha$ aus (14) in (15) ein, so wird:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) = -\tfrac{1}{2}\frac{r}{R}\varDelta L \Big\{ \nu' &+ \tfrac{1}{24}(4\mu'\nu'^2 - \mu''\nu' - 4\nu'\nu'' + \nu''')\varDelta B^2 \\ &+ \tfrac{1}{12}\left(\frac{r}{R}\right)^2 (\mu'\nu'^2 + \nu'^3 - \nu'\nu'')\varDelta L^2 + Gl_4 \Big\} \end{aligned}$$

und wenn man zum Winkel übergeht:

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 = -\frac{r}{R}\nu' \varDelta L \Big\{ 1 &+ \tfrac{1}{24}\left(4\mu'\nu' - \mu'' - 4\nu'' + \frac{\nu'''}{\nu'}\right)\varDelta B^2 \\ &+ \tfrac{1}{12}\left(\frac{r}{R}\right)^2 (\mu'\nu' - \nu'')\varDelta L^2 \Big\} + Gl_5. \end{aligned} \tag{16}$$

In allen diesen Gleichungen sind $\varDelta B$ und $\varDelta L$ in analytischem Maße zu verstehen.

Die Gl. (13) und (16) liefern die Auflösung der gestellten Aufgabe: s und $\alpha_{1.2} = \alpha_1$, $\alpha_{2.1} = \alpha_2 \pm 180^0$ aus B_1, B_2 und $\varDelta L = L_2 - L_1$ zu berechnen.

Es sei hier noch erwähnt, daß man Gl. (16) nach Gauß auch aus einer Differentialgleichung ableiten kann. Ist $\mathfrak{m}$ die reduzierte Länge der geodätischen Linie, so ist nach Fig. auf S. 3, wenn man sich P und P' durch P_2 und P_2' ersetzt denkt: $P_2K = \mathfrak{m}\,d\alpha_1$; also wird in dem unendlich kleinen Viereck $P_2MP_2'K$ außer der auf S. 3 angegebenen Gleichung $ds = R_2 dB_2 \cos\alpha_2 + r_2 dL_2 \sin\alpha_2$ auch noch die andere:

$$\mathfrak{m}\,d\alpha_1 = -R_2 dB_2 \sin\alpha_2 + r_2 dL_2 \cos\alpha_2$$

bestehen. Aus ihr folgt:

$$\mathfrak{m}\frac{\partial\alpha_1}{\partial B_2} = -\mathrm{R}_2 \sin\alpha_2,\quad \mathfrak{m}\frac{\partial\alpha_1}{\partial L_2} = r_2\cos\alpha_2$$

und hieraus

$$-R_2 \sin \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial L_2} = r_2 \cos \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial B_2}.$$

Differenziert man andererseits die Gleichung $\frac{\partial s}{\partial B_2} = R_2 \cos \alpha_2$ nach L_2 und die Gleichung $\frac{\partial s}{\partial L_2} = r_2 \sin \alpha_2$ nach B_2, so wird aus beiden erhalten:

$$-R_2 \sin \alpha_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2} = r_2 \cos \alpha_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial B_2} + \sin \alpha_2 \frac{\partial r_2}{\partial B_2}.$$

Subtrahiert man hiervon die vorhergehende Gleichung und multipliziert dann mit s, so gelangt man zu einer Gleichung für $\alpha_2 - \alpha_1$:

$$R_2 . s \sin \alpha_2 \frac{\partial (\alpha_2 - \alpha_1)}{\partial L_2} + r_2 . s \cos \alpha_2 \frac{\partial (\alpha_2 - \alpha_1)}{\partial B_2} = -s \sin \alpha_2 \frac{\partial r_2}{\partial B_2}.$$

In diese Gleichung sind noch die Werte für $s \sin \alpha_2$ und $s \cos \alpha_2$ aus (10) und ferner die Werte von R_2, r_2 und $\frac{\partial r_2}{\partial B_2}$ nach (3) einzutragen. Die Azimutdifferenz ergibt sich alsdann als eine Reihe, die nur ungerade Potenzen von ΔL besitzen kann, deren Koeffizienten Potenzreihen von ΔB sind. Darauf ist wieder wie vorher auf die Mittelbreite zu beziehen.

Diese Entwicklung ist jedenfalls viel umständlicher als die zuerst angegebene.

Anwendung auf das Erdellipsoid.

§ 4. Formeln für die Entfernung und für die Azimute. Gauß'sche Übertragungsformeln.

Die Gleichungen (13) § 2 und (16) § 3 sollen nun auf das Erdellipsoid angewendet werden.

Es bezeichne a die halbe große Achse und e^2 das Quadrat der Exzentrizität der Meridianellipse, ferner sei:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2}, \; e'^2 \cos^2 B_i = \varepsilon_i^2, \; 1 + \varepsilon_i^2 = Q_i = \frac{N_i}{R_i}$$
$$R = \frac{a\sqrt{1+e'^2}}{\sqrt{Q^3}}, \; N_i = \frac{a\sqrt{1+e'^2}}{\sqrt{Q_i}}, \; r_i = N_i \cos B_i; \qquad (1)$$

hiernach ist

$$\frac{d\varepsilon^2}{dB_i} = \frac{dQ_i}{dB} = -2\varepsilon^2 \operatorname{tg} B_i.$$

Die zu $\frac{1}{2}(B_1 + B_2) = B$ gehörigen Werte werden durch ε^2

Q, R, N, r, bezeichnet. Zur Abkürzung wird noch

$$\operatorname{tg} B = t \tag{2}$$

gesetzt.

Nach (12), S. 8, ist nun:

$$\begin{aligned}
\mu' &= \frac{dl n R}{dB} &&= 3\frac{\varepsilon^2 t}{Q} \\
\mu'' &= \mu'^2 + \frac{d\mu'}{dB} &&= 3\frac{\varepsilon^2}{Q^2}(Q-(1-4\varepsilon^2)t^2) \\
&&& \text{usw.} \\
\nu' &= \frac{dl n r}{dB} &&= -\frac{t}{Q} \\
\nu'' &= \nu'^2 + \frac{d\nu'}{dB} &&= -\frac{1}{Q^2}(Q+3\varepsilon^2 t^2) \\
\nu''' &= \nu'\nu'' + \frac{d\nu''}{dB} &&= +\frac{t}{Q^3}(Q(1-8\varepsilon^2)+3\varepsilon^2(1-4\varepsilon^2)t^2) \\
&&& \text{usw.}
\end{aligned} \tag{3}$$

Von jetzt ab sollen

$$B_2 - B_1 = \varDelta B, \quad L_2 - L_1 = \varDelta L, \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \varDelta\alpha, \tag{4}$$

die bisher in Bogenmaß vorausgesetzt waren, in Sekunden ausgedrückt sein, so daß ihnen also in den vorhergehenden Formeln der Faktor $\frac{1}{\varrho''} = \operatorname{arc} 1''$, $\log \varrho'' = 5{,}314\ 4251\ldots$, zuzufügen ist.

Die Substitution von (3) in (16) und (13), S. 10 u. 9, gibt sofort die gewünschten Formeln für s, $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ bis auf Glieder 5. Ordnung:

$$\begin{aligned}
\varDelta\alpha &= \sin B . \varDelta L \left\{1 + \frac{1}{24\varrho''^2}\frac{1}{Q}(3+5\varepsilon^2)\varDelta B^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{12\varrho''^2} Q (\cos B . \varDelta L)^2 \right\} \\
s\cos\alpha &= \frac{R}{\varrho''}\varDelta B \left\{1 + \frac{1}{8\varrho''^2}\frac{\varepsilon^2}{Q^2}(Q-(1-4\varepsilon^2)t^2)\varDelta B^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{24\varrho''^2}(2Q+3t^2)(\cos B . \varDelta L)^2 \right\} \\
s\sin\alpha &= \frac{N}{\varrho''}\cos B . \varDelta L \left\{1 + \frac{1}{24\varrho''^2}\frac{1}{Q^2}(Q-9\varepsilon^2 t^2)\varDelta B^2) \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{24\varrho''^2}(\sin B . \varDelta L)^2 \right\}; \\
\alpha_{1.2} &= \alpha - \tfrac{1}{2}\varDelta\alpha, \quad \alpha_{2.1} = \alpha + \tfrac{1}{2}\varDelta\alpha \pm 180^0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Aus diesen Formeln lassen sich leicht die Gauß'schen Formeln zur Übertragung der Breite, Länge und des Azimutes von P_1 nach P_2 herstellen.

Entwickelt man aus den letzten beiden Gleichungen ΔB und ΔL, und setzt man dann ihre Werte in die Gleichung für $\Delta\alpha$ ein, so erhält man, wenn dabei

$$\frac{\varrho''}{R} s \cos\alpha = \beta, \quad \frac{\varrho''}{N} s \sin\alpha \sec B = \lambda, \quad \frac{\varrho''}{N} s \sin\alpha \operatorname{tg} B = \tau \tag{6}$$

gesetzt wird:

$$\Delta B = \beta \left\{1 - \frac{1}{8\varrho''^2}\frac{\varepsilon^2}{Q^2}\left(Q - (1-4\varepsilon^2)t^2\right)\beta^2 + \frac{Q}{12\varrho''^2}(\lambda\cos B)^2 + \frac{1}{8\varrho''^2}\tau^2 + Gl_4\right\} \tag{7}$$

$$\Delta L = \lambda \left\{1 - \frac{1}{24\varrho''^2}\frac{1}{Q^2}(Q - 9\varepsilon^2 t^2)\beta^2 \quad * \quad + \frac{1}{24\varrho''^2}\tau^2 + Gl_4\right\}$$

$$\Delta\alpha = \tau \left\{1 + \frac{1}{24\varrho''^2}\frac{1}{Q^2}\left(Q(2+5\varepsilon^2) + 9\varepsilon^2 t^2\right)\beta^2 + \frac{Q}{12\varrho''^2}(\lambda\cos B)^2 + \frac{1}{24\varrho''^2}\tau^2 + Gl_4\right\}.$$

Eliminiert man in den Gliedern dritter Ordnung $\lambda \cos B$, indem man die Beziehung: $\frac{Q}{\varrho''^2}\lambda^2\cos^2 B = \frac{s^2}{RN} - \frac{\beta^2}{\varrho''^2 Q}$ berücksichtigt, und geht dann zu Logarithmen über, so folgen die Gauß'schen Gleichungen:

$$\log \Delta B = \log\beta - \frac{M}{24\varrho''^2}\frac{1}{Q^2}\left(Q(2+3\varepsilon^2) - 3(1-4\varepsilon^2)\varepsilon^2 t^2\right)\beta^2 + \frac{M}{8\varrho''^2}\tau^2 + \frac{M}{12}\frac{s^2}{RN} + Gl_4 \tag{8}$$

$$\log \Delta L = \log\lambda - \frac{M}{24\varrho''^2}\frac{1}{Q^2}(Q - 9\varepsilon^2 t^2)\beta^2 + \frac{M}{24\varrho''^2}\tau^2 \quad * \quad + Gl_4$$

$$\log \Delta\alpha = \log\tau + \frac{M}{24\varrho''^2}\frac{\varepsilon^2}{Q^2}(5Q + 9t^2)\beta^2 + \frac{M}{24\varrho''^2}\tau^2 + \frac{M}{12}\frac{s^2}{RN} + Gl_4,$$

M bedeutet den Modul der Briggs'schen Logarithmen.

Zu bemerken ist nur, daß Gauß in seinen Formeln, Bd. IV S. 329, e^2 statt e'^2 benutzt, was etwas unvorteilhafter ist.

§ 5. Andere Formen der Gleichungen für s, $\alpha_{1\cdot 2}$ und $\alpha_{2\cdot 1}$.

Die Gleichungen (5) kann man in verschiedene Formen bringen. Logarithmiert man sie, und führt man darauf in der ersten Gleichung $\log\sec\frac{\Delta B}{2} = \frac{M}{8\varrho''^2}\Delta B^2 + Gl_4$ und in der zweiten Gleichung $\log\cos\frac{\Delta L}{2} = -\frac{M}{8\varrho''^2}\Delta L^2 + Gl_4$ ein, indem man gleichzeitig

$$\Delta L \,.\, \sin B = m \text{ und } \Delta L \,.\, \cos B = n \tag{9}$$

setzt, so gelangt man zu der Form von Helmert:

$$\log \Delta\alpha \quad = \log\left(m \sec\frac{\Delta B}{2}\right) + \frac{M}{12\varrho''^2}\frac{\varepsilon^2}{Q}\Delta B^2 \tag{10}$$
$$+ \frac{M}{12\varrho''^2} Q n^2 \qquad * \qquad + Gl_4$$

$$\log(s\cos\alpha) = \log\left(\frac{R}{\varrho''}\Delta B \,.\, \cos\frac{\Delta L}{2}\right) + \frac{M}{8\varrho''^2}\frac{\varepsilon^2}{Q^2}(Q - (1-4\varepsilon^2)t^2)\Delta B^2$$
$$+ \frac{M}{24\varrho''^2}(1-2\varepsilon^2)n^2 \qquad * \qquad + Gl_4$$

$$\log(s\sin\alpha) = \log\left(\frac{N}{\varrho''}n\right) + \frac{M}{24\varrho''^2}\frac{1}{Q^2}(Q - 9\varepsilon^2 t^2)\Delta B^2$$
$$* \qquad - \frac{M}{24\varrho''^2}m^2 + Gl_4;$$

$$\alpha_{1\cdot 2} = \alpha - \tfrac{1}{2}\Delta\alpha, \quad \alpha_{2\cdot 1} = \alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha \pm 180^0.$$

Für die Koeffizienten der Korrektionsglieder, ebenso wie für die sphärischen Glieder 4. Ordnung sind in den „Lotabweichungen“, Heft I, Tafelwerte berechnet. In den Koeffizienten ist dort, etwas weniger günstig, e^2 statt e'^2 zur Verwendung gekommen.

Die Gleichungen (10) enthalten Korrektionsglieder mit ΔB^2, m^2 und n^2. Man kann aber die letzte Gleichung noch so umformen, daß das Glied mit m^2, das nur hier vorkommt, in ein Glied mit n^2 umgewandelt wird. Sondert man nämlich in ihr

$$\log\left(\sec\frac{\Delta B}{2}\cos\frac{\Delta L}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{M}{24\varrho''^2}\Delta B^2 - \frac{M}{24\varrho''^2}\Delta L^2 + Gl_4$$

ab, so wird:

$$\log(s\sin\alpha) = \log\left(\frac{N}{\varrho''}n\left(\sec\frac{\Delta B}{2}\cos\frac{\Delta L}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \tag{10*}$$
$$- \frac{M}{24\varrho''^2}\frac{\varepsilon^2}{Q^2}(Q + 9\,tg^2 B)\Delta B^2 + \frac{M}{24\varrho''^2}n^2 + Gl_4.$$

Außerdem ist dadurch erreicht, daß nun auch hier das Glied in $\varDelta B^2$ mit ε^2 multipliziert ist, wie es bei den ersten beiden Gl. (10) der Fall ist. Aus diesen beiden Gleichungen kann auch

$\log\left(\sec\frac{\varDelta B}{2}\cos\frac{\varDelta L}{2}\right)$ entnommen werden.

Eine elegante Form nehmen die Gleichungen an, wenn man

$$\begin{aligned} \varDelta L\,.\,\sin B\,\sec\frac{\varDelta B}{2} &= g \\ \frac{R}{\varrho''}\varDelta B\,.\cos\frac{\varDelta L}{2} &= b \\ \frac{N}{\varrho''}\varDelta L\,.\cos B\left(\sec\frac{\varDelta B}{2}\cos\frac{\varDelta L}{2}\right)^{\frac{1}{3}} &= l \end{aligned} \qquad (11)$$

setzt; alsdann wird:

$$\begin{aligned} \log\varDelta\alpha &= \log g + [1]\,l^2 + [4]\,b^2 + Gl_4 \\ \log(s\sin\alpha) &= \log l + [2]\,l^2 - [5]\,b^2 + \;\text{„} \\ \log(s\cos\alpha) &= \log b + [3]\,l^2 + [6]\,b^2 + \;\text{„}, \end{aligned} \qquad (12)$$

mit

$$[1] = \frac{M}{12}\frac{1}{RN},\; [2] = \frac{M}{24}\frac{1}{N^2},\; [3] = \frac{M}{24}\frac{1-2\varepsilon^2}{N^2},\; [1]+[3] = 3\,[2],$$

$$[4] = \frac{M}{12}\frac{\varepsilon^2}{RN},\; [5] = \frac{M}{24}\frac{\varepsilon^2}{N^2}(Q+9t^2),\; [6] = \frac{M}{8}\frac{\varepsilon^2}{N^2}(Q-(1-4\varepsilon^2)t^2).$$

$$B = \tfrac{1}{2}(B_1+B_2),\; \operatorname{tg} B = t;\;\; \varepsilon^2 = e'^2\cos^2 B,\; Q = 1+\varepsilon^2 = \frac{N}{R}.$$

§ 6. Die Glieder 4. Ordnung zu den vorhergehenden Formeln.

Die Entwicklung der Gl. (5) habe ich nun noch weiter geführt, sodaß die Glieder 5. Ordnung vollständig erhalten wurden. Ihre Herleitung ist, im Verhältnis zu derjenigen bis zu den Gliedern 3. Ordnung, sehr umständlich. Ich gebe daher im folgenden nur die Ergebnisse an, nämlich die Glieder 4. Ordnung, die zu den Gl. (10) und (10*) gehören. Die erhaltenen Werte konnten, wie in den §§ 9 und 10 gezeigt werden wird, durch Kontrollen sichergestellt werden.

Wie früher ist:

$$B = \tfrac{1}{2}(B_1 + B_2),\ \operatorname{tg} B = t;$$

zu B gehören

$$R, N, Q = \frac{N}{R} = 1 + e'^2 \cos^2 B = 1 + \varepsilon^2;$$

$\varDelta B = B_2 - B_1$ und $\varDelta L = L_2 - L_1$ sind in Sekunden vorausgesetzt, $\varDelta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ wird in Sekunden erhalten.

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2),\ \alpha_{1.2} = \alpha - \tfrac{1}{2}\varDelta\alpha,\ \alpha_{2.1} = \alpha + \tfrac{1}{2}\varDelta\alpha \pm 180^0.$$

Setzt man noch

$$\frac{\varDelta B}{\varrho'' Q} = \varDelta B' \text{ und } \frac{\varDelta L}{\varrho''}\cos B = \varDelta L', \tag{13}$$

so lauten die Gleichungen zur Berechnung von s, α und $\varDelta\alpha$, wenn die geographischen Positionen der Endpunkte der geodätischen Linie s gegeben sind:

$$\begin{aligned}
\log \varDelta\alpha = \log\left(\varDelta L . \sin B \sec\frac{\varDelta B}{2}\right) + Q\{&+ k_{2.0}\varDelta B'^2 - k_{4.0}\varDelta B'^4 \\
&+ k_{0.2}\varDelta L'^2 - k_{2.2}\varDelta B'^2 \varDelta L'^2 \\
&+ k_{0.4}\varDelta L'^4 + Gl_6\} \\
\log(s\cos\alpha) = \log\left(\frac{R}{\varrho''}\varDelta B . \cos\frac{\varDelta L}{2}\right) &+ h_{2.0}\varDelta B'^2 + h_{4.0}\varDelta B'^4 \\
&+ h_{0.2}\varDelta L'^2 - h_{2.2}\varDelta B'^2 \varDelta L'^2 \\
&- h_{0.4}\varDelta L'^4 + Gl_6 \\
\log(s\sin\alpha) = \log\left(\frac{N}{\varrho''}\varDelta L . \cos B\right) &+ i_{2.0}\varDelta B'^2 + i_{4.0}\varDelta B'^4 \\
&- i_{0.2}\varDelta L'^2 - i_{2.2}\varDelta B'^2 \varDelta L'^2 \\
&- i_{0.4}\varDelta L'^4 + Gl_6.
\end{aligned} \tag{14}$$

Dabei ist:

$$k_{2.0} = \frac{M}{12}\varepsilon^2,\ k_{0.2} = \frac{M}{12} \tag{14*}$$

$$k_{4.0} = \frac{M}{1440}\varepsilon^2\{Q(16 + \varepsilon^2) + 6t^2(5 + 14\varepsilon^2 + 4\varepsilon^4)\}$$

$$k_{2.2} = \frac{M}{720}\{6\varepsilon^2 Q + t^2(15 + 55\varepsilon^2 + 54\varepsilon^4)\}$$

$$k_{0.4} = \frac{M}{1440}\{7Q - 6t^2(1 + 4\varepsilon^2)\};$$

$$h_{2.0} = \frac{M}{8}\varepsilon^2\{Q - t^2(1 - 4\varepsilon^2)\},\ h_{0.2} = \frac{M}{24}(1 - 2\varepsilon^2)$$

$$h_{4\cdot0} = \frac{M}{320}\varepsilon^2 \{Q^2(-2+3\varepsilon^2)+12\,Qt^2(1-23\varepsilon^2+16\varepsilon^4) \qquad (14^*)$$
$$+5\varepsilon^2 t^4(1-14\varepsilon^2+4\varepsilon^4)\}$$

$$h_{2\cdot2} = \frac{M}{1440} Q\{4Q(1-3\varepsilon^2)+3t^2(5-\varepsilon^2-36\varepsilon^4)\}$$

$$h_{0\cdot4} = \frac{M}{2880}\{-1+28\varepsilon^2+14\varepsilon^4+2t^2(5-4\varepsilon^2-24\varepsilon^4)\};$$

$$i_{2\cdot0} = \frac{M}{24}\{Q-9\varepsilon^2 t^2\},\ i_{0\cdot2} = \frac{M}{24}t^2$$

$$i_{4\cdot0} = \frac{M}{2880}\{Q^2(1+12\varepsilon^2)+6\varepsilon^2 Qt^2(3-67\varepsilon^2)+45\varepsilon^4 t^4(3-10\varepsilon^2)\}.$$

$$i_{2\cdot2} = \frac{M}{1440} Q\{4Q+t^2(15+57\varepsilon^2)\}$$

$$i_{0\cdot4} = \frac{M}{2880}t^2\{12Q+t^2\}.$$

An Stelle der letzten Gl. (14) kann man entsprechend (10*) die folgende benutzen:

$$\log(s\sin\alpha)$$
$$=\log\left\{\frac{N}{\varrho''}\varDelta L.\cos B\left(\cos\frac{\varDelta L}{2}\sec\frac{\varDelta B}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}-i'_{2\cdot0}\varDelta B'^2-i'_{4\cdot0}\varDelta B'^4 \qquad (15)$$
$$+i'_{0\cdot2}\varDelta L'^2-i'_{2\cdot2}\varDelta B'^2\varDelta L'^2$$
$$+i'_{0\cdot4}\varDelta L'^4+Gl_6$$

mit

$$i'_{2\cdot0} = \frac{M}{24}\varepsilon^2(Q+9t^2),\ i'_{0\cdot2} = \frac{M}{24}$$

$$i'_{4\cdot0} = \frac{M}{2880}\{Q^2(4-2\varepsilon^2+5\varepsilon^4)-6\varepsilon^2 Qt^2(3-67\varepsilon^2)-45\varepsilon^4 t^4(3-10\varepsilon^2)\}$$

$$i'_{2\cdot2} = i_{2\cdot2} \qquad (15^*)$$

$$i'_{0\cdot4} = \frac{M}{2880}\{5-2t^2(1+6\varepsilon^2)+4t^4\}.$$

Will man die Glieder 4. Ordnung tabulieren, so muß man in ihnen nach (7):

$$\varDelta B' = \frac{s}{N}\cos\alpha+Gl_3 \text{ und } \varDelta L' = \frac{s}{N}\sin\alpha+Gl_3$$

setzen.

Die Glieder 4. Ordnung zu den Gl. (12) ergeben sich, wenn man in die ersten beiden Gl. (14) und in die Gl. (15) nach (11):

$$\varDelta B'^2 = \frac{b^2}{N^2}\left(1 + \frac{1}{4}\,\frac{1+t^2}{N^2}\,l^2 + \cdots\right)$$

$$\varDelta L'^2 = \frac{l^2}{N^2}\left(1 - \frac{1}{12}\,\frac{Q^2}{N^2}\,b^2 + \frac{1}{12}\,\frac{1+t^2}{N^2}\,l^2 + \cdots\right)$$

einführt. Vernachlässigt man bei ihnen die von der Exzentrizität abhängigen Bestandteile, und berücksichtigt man, daß dann weiter

$$b^4 = s^4 \cos^4\alpha\,(1 + Gl_2),\ b^2 l^2 = s^4 \sin^2\alpha \cos^2\alpha\,(1 + Gl_2)$$
$$l^4 = s^4 \sin^4\alpha\,(1 + Gl_2)$$

ist, so erhält man als Zusätze bei den Gl. (12):

$$Gl_4 \text{ in } \log \varDelta\alpha:\quad -\frac{M}{1440}\left(\frac{s}{N}\right)^4 \left\{(10 + 30t^2)\sin^2\alpha - (27 + 34t^2)\sin^4\alpha\right\} \tag{12*}$$

$$\text{„ „} \log(s\cos\alpha): -\frac{M}{2880}\left(\frac{s}{N}\right)^4 \left\{(18 + 30t^2)\sin^2\alpha - (29 + 30t^2)\sin^4\alpha\right\}$$

$$\text{„ „} \log(s\sin\alpha): -\frac{M}{2880}\left(\frac{s}{N}\right)^4 \left\{4 + (10 + 30t^2)\sin^2\alpha - (29 + 38t^2 + 4t^4)\sin^4\alpha\right\}$$
$$= -\frac{M}{720}\left(\frac{s}{N}\right)^4 (\cos^4\alpha - \sin^4\alpha \sec^4 B) + Gl_4 \text{ zu } \log(s\cos\alpha).$$

Durch Umkehrung der Gl. (14) kann man weitere Glieder zu den Formeln (8) von Gauß erhalten.

§ 7. Neue Formeln für s, $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$.

Die Genauigkeit der Gl. (14) läßt sich noch erhöhen. Man kann sie so umformen, daß die den Hauptgliedern zuzufügenden Korrektionen 2. und 4. Ordnung, ebenso wie auch alle vernachlässigten Glieder höherer Ordnung, mit dem Quadrate der Exzentrizität multipliziert sind. Dies wird dadurch erreicht, daß die Gleichungen in Formen gebracht werden, die der Auflösung bei der Kugel entsprechen.

Auf der Kugel ist, wenn b_1 und b_2 die geographischen Breiten zweier Punkte sind und $\varDelta l$ ihr Längenunterschied ist, ferner σ das Stück des größten Kreisbogens zwischen ihnen mit den Azimuten a_1 und a_2 bedeutet:

$$\varDelta a = a_2 - a_1,\ a = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2),\ \varDelta b = b_2 - b_1,\ b = \tfrac{1}{2}(b_1 + b_2)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varDelta a}{2} = \sin b \sec\frac{\varDelta b}{2} \operatorname{tg}\frac{\varDelta l}{2}$$

$$\sin\frac{\sigma}{2}\sin a = \cos b \sin\frac{\Delta l}{2}$$

$$\sin\frac{\sigma}{2}\cos a = \sin\frac{\Delta b}{2}\cos\frac{\Delta l}{2}.$$

Diesen Gleichungen entsprechend werde ich nun die Gl. (14) umwandeln.

Zunächst ersetze ich in den Gliedern 2. und 4. Ordnung $\Delta B' = \frac{\Delta B}{\varrho'' Q}$ und $\Delta L' = \frac{\Delta L}{\varrho''}\cos B$ durch $\sin\frac{\Delta B}{2}$ und $\sin\frac{\Delta L}{2}$. Es ist dabei vorteilhaft die Größen:

$$\frac{1}{\sqrt{Q}}\sin\frac{\Delta B}{2} = u \quad \text{und} \quad \sin\frac{\Delta L}{2}\cos B = v \qquad (16)$$

einzuführen; damit wird

$$\Delta B'^2 = 4\frac{u^2}{Q} + \tfrac{4}{3}u^4 + \cdots,\ \Delta L'^2 = 4v^2 + \tfrac{4}{3}(1+t^2)\,v^4 + \cdots; \qquad (17)$$

$$\Delta B'^4 = 16\frac{u^4}{Q^2} + \cdots,\ \Delta B'^2 \Delta L'^2 = 16\frac{u^2 v^2}{Q} + \cdots,\ \Delta L'^4 = 16v^4 + \cdots.$$

Wie vorher ist $t = \operatorname{tg} B$.

Zur Umformung der ersten Gl. (14) hat man nun:

$$\log\frac{\Delta L}{2\varrho''} = \log\operatorname{tg}\frac{\Delta L}{2} - \frac{M}{3}\sin^2\frac{\Delta L}{2} - \frac{17}{90}M\sin^4\frac{\Delta L}{2}\cdots$$

$$= \log\operatorname{tg}\frac{\Delta L}{2} - \frac{M}{3}(1+t^2)\,v^2 - \frac{17}{90}M(1+2t^2+t^4)v^4 - \cdots$$

und

$$\log\frac{\Delta\alpha}{2\varrho''} = \log\operatorname{tg}\frac{\Delta\alpha}{2} - \frac{M}{3}\left(\frac{\Delta\alpha}{2\varrho''}\right)^2 - \frac{7M}{90}\left(\frac{\Delta\alpha}{2\varrho''}\right)^4 - \cdots.$$

In den letzten Gleichungen ist zu setzen:

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\varrho''}\right)^2 = \left(\frac{\Delta L}{2\varrho''}\right)^2 \sin^2 B \sec^2\frac{\Delta B}{2}\left(1 + 2Q\,(\bar{k}_{2\cdot 0}\,\Delta B'^2 + \bar{k}_{0\cdot 2}\,\Delta L'^2) + \cdots\right),$$

wobei $\bar{k}_{2\cdot 0} = \frac{1}{M}k_{2\cdot 0}$ und $\bar{k}_{0\cdot 2} = \frac{1}{M}k_{0\cdot 2}$ ist. Wegen $\sec^2\frac{\Delta B}{2} = 1 + Qu^2 + \cdots$, und wenn für $\Delta B'^2$ und $\Delta L'^2$ die Werte aus (17) benutzt werden, ergibt sich weiter:

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{2\varrho''}\right)^2 = t^2 v^2 + t^2(8\bar{k}_{2\cdot 0} + Q)\,u^2 v^2 + t^2\left(8Q\bar{k}_{0\cdot 2} + \tfrac{1}{3}(1+t^2)\right)v^4 + \cdots$$

und dem entsprechend:

$$\left(\frac{\varDelta\alpha}{2\varrho''}\right)^4 = t^4 v^4 + \cdots.$$

Bei der zweiten und dritten der Gl. (14) führe ich $\sin\frac{s}{2\sqrt{RN}}$ ein; $\frac{1}{\sqrt{RN}} = \frac{1}{R\sqrt{Q}} = \frac{\sqrt{Q}}{N}$. Es ist

$$\log\frac{s}{2\sqrt{RN}} = \log\sin\frac{s\varrho''}{2\sqrt{RN}} + \frac{M}{6}\left(\frac{s}{2\sqrt{RN}}\right)^2 + \frac{M}{180}\left(\frac{s}{2\sqrt{RN}}\right)^4 + \cdots,$$

dabei wird nach diesen Gleichungen, wenn $\bar{h} = \frac{1}{M}h$ und $\bar{i} = \frac{1}{M}i$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{s}{2\sqrt{RN}}\right)^2 = Q\left\{\left(\frac{\varDelta B'}{2}\right)^2\cos^2\frac{\varDelta L}{2}\left(1 + 2\bar{h}_{2.0}\,\varDelta B'^2 + 2\bar{h}_{0.2}\,\varDelta L'^2 + \cdots\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\varDelta L'}{2}\right)^2\left(1 + 2\bar{i}_{2.0}\,\varDelta B'^2 - 2\bar{i}_{0.2}\,\varDelta L'^2 + \cdots\right)\right\}$$

oder mit $\cos^2\frac{\varDelta L}{2} = 1 - (1+t^2)v^2 + \cdots$ und mit den Werten aus (17):

$$\left(\frac{s}{2\sqrt{RN}}\right)^2 = u^2 + Qv^2 + Q\left(8\frac{\bar{h}_{2.0}}{Q^2} + \tfrac{1}{3}\right)u^4 + \left(8\bar{h}_{0.2} + 8\bar{i}_{2.0} - (1+t^2)\right)u^2v^2$$
$$- Q\left(8\bar{i}_{0.2} - \tfrac{1}{3}(1+t^2)\right)v^4 + \cdots.$$

Hiernach ist

$$\left(\frac{s}{2\sqrt{RN}}\right)^4 = u^4 + 2Qu^2v^2 + Q^2v^4 + \cdots.$$

Ferner ist in der zweiten Gl. (14)

$$\log\frac{\varDelta B}{\varrho''} = \log\left(2\sin\frac{\varDelta B}{2}\right) + \frac{M}{6}Qu^2 + \frac{11M}{180}Q^2u^4 + \cdots$$

und in der dritten Gl. (14)

$$\log\frac{\varDelta L}{\varrho''} = \log\left(2\sin\frac{\varDelta L}{2}\right) + \frac{M}{6}(1+t^2)v^2 + \frac{11M}{180}(1+2t^2+t^4)v^4 + \cdots$$

zu setzen.

Mit den angegebenen Substitutionen gelangt man zu den folgenden neuen Formeln:

$$\log \operatorname{tg} \frac{\Delta\alpha}{2} = \log\left(\sin B \sec \frac{\Delta B}{2} \operatorname{tg} \frac{\Delta L}{2}\right) + (1) u^2 \quad - (4) u^4$$
$$+ (1) v^2 \quad - (7) u^2 v^2$$
$$+ (10) v^4 + e'^2 Gl_6$$

$$\log\left(\sin \frac{s\varrho''}{2\sqrt{RN}} \sin\alpha\right) = \log\left(\sqrt{Q} \cos B \sin \frac{\Delta L}{2}\right) \quad - (2) u^2 \quad - (5) u^4 \qquad (18)$$
$$- \tfrac{1}{2}(1) v^2 - (8) u^2 v^2$$
$$- (11) v^4 + e'^2 Gl_6$$

$$\log\left(\sin \frac{s\varrho''}{2\sqrt{RN}} \cos\alpha\right) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{Q}} \sin \frac{\Delta B}{2} \cos \frac{\Delta L}{2}\right) + (3) u^2 \quad + (6) u^4$$
$$- \tfrac{3}{2}(1) v^2 + (9) u^2 v^2$$
$$+ (12) v^4 + e'^2 Gl_6.$$

$$\Delta B = B_2 - B,\ \Delta L = L_2 - L_1;\ \frac{1}{\sqrt{Q}} \sin \frac{\Delta B}{2} = u,\ \sin \frac{\Delta L}{2} \cos B = v.$$
$$\alpha_{1.2} = \alpha - \tfrac{1}{2}\Delta\alpha,\ \alpha_{2.1} = \alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha \pm 180^0.$$

Die Koeffizienten in (18) lauten:

$$(1) = \frac{M}{3}\varepsilon^2,\ (2) = \frac{3M}{2}\frac{\varepsilon^2 t^2}{Q},\ (3) = \frac{M}{6}\frac{\varepsilon^2}{Q}(4Q - 3t^2(1-4\varepsilon^2))$$
$$(4) = \frac{M}{90}\frac{\varepsilon^2}{Q}(Q(6-11\varepsilon^2) + 6t^2(5+14\varepsilon^2+4\varepsilon^4))$$
$$(5) = \frac{M}{60}\frac{\varepsilon^2}{Q^2}(6Q^2 + 2Qt^2(7+102\varepsilon^2) - 15\varepsilon^2 t^4(3-10\varepsilon^2)) \qquad (18^*)$$
$$(6) = \frac{M}{180}\frac{\varepsilon^2}{Q^2}((-2Q^2(3-34\varepsilon^2) + 6Qt^2(3-74\varepsilon^2+68\varepsilon^4)$$
$$+45\varepsilon^2 t^4(1-14\varepsilon^2+4\varepsilon^4))$$
$$(7) = \frac{2M}{15}\varepsilon^2(Q + t^2(5+9\varepsilon^2)),\ (8) = \frac{2M}{15}\varepsilon^2 t^2$$
$$(9) = \frac{2M}{15}\varepsilon^2(Q + t^2(4+9\varepsilon^2)),\ (10) = \frac{M}{90}\varepsilon^2(24+7\varepsilon^2-24\varepsilon^2 t^2)$$
$$(11) = \frac{M}{180}\varepsilon^2(12+\varepsilon^2+12t^2),\ (12) = \frac{M}{60}\varepsilon^2(5(4+\varepsilon^2)+4t^2(1-4\varepsilon^2))$$
$$\varepsilon^2 = e'^2\cos^2 B,\ Q = 1+\varepsilon^2 = N:R,\ \operatorname{tg} B = t.$$

Diese Werte, die zu $B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ gehören, sind vollständige Ausdrücke, in denen nichts vernachlässigt ist.

Wo Q im Nenner steht, kann man damit auch durchdividieren.

Zwischen den ersten 3 Koeffizienten besteht die Gleichung:

$$-6(1)+(2)+3(3) = 4\varepsilon^2(2);$$

zwischen den übrigen Koeffizienten ergeben sich folgende Beziehungen:

$$(4)-(5)-(6) = \frac{M}{2}\varepsilon^4\left(-1-4\frac{\varepsilon^2 t^2}{Q}+t^4\left(1-3\frac{\varepsilon^4}{Q^2}\right)\right) = [4]$$

$$(7)-(8)-(9) = 0 \qquad (19)$$

$$(10)+(11)-(12) = 0.$$

Aus (18) kann man mit Hilfe von (19) weiter die Gleichungen:

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \log\left(Q\frac{\cos B}{\sin\frac{\Delta B}{2}}\operatorname{tg}\frac{\Delta L}{2}\right)-[1]u^2+(1)v^2-[3]u^4 - (7)u^2v^2+(10)v^4+e'^2\,Gl_6 \qquad (20)$$

und

$$\log \operatorname{tg}\frac{\Delta\alpha}{2} = \log\left(\frac{1}{Q}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}B\operatorname{tg}\frac{\Delta B}{2}\right)+[2]u^2-[4]u^4+e'^2\,Gl_6 \qquad (21)$$

erhalten, in denen

$$[1] = \frac{M}{3}\varepsilon^2\left(2+3t^2\left(1+\frac{\varepsilon^2}{Q}\right)\right)$$

$$[2] = M\varepsilon^2\left(1+t^2\left(1+\frac{\varepsilon^2}{Q}\right)\right) = Me'^2+M\frac{\varepsilon^4 t^2}{Q} = (1)+(2)+(3)$$

$$[3] = \frac{M}{90}\varepsilon^2\left(6+34\varepsilon^2+6t^2\left(5+9\varepsilon^2+25\frac{\varepsilon^4}{Q}\right)-45\varepsilon^2 t^4\left(1-3\frac{\varepsilon^4}{Q^2}\right)\right)$$

ist. Nach (19) ist $[4]u^4$ von der Ordnung $e'^4\,Gl_4$.

Die Korrektionsglieder müssen sämtlich mit ε^2 multipliziert sein, weil aus (18) die sphärischen Gleichungen folgen müssen, wenn man $\varepsilon^2 = 0$ setzt.

Uebergang zu den Formeln von W. Jordan.

§ 8. Kennzeichnung des Rechnungsganges. Beziehungen zwischen der geographischen und der reduzierten Breite.

Wenn man sphärisch aus den geographischen Koordinaten B_1, B_2 und ΔL das größte Kreisbogenstück σ, in Winkelmaß, und seine Azimute a_1 und a_2 berechnet hätte, so würden die Gl. (18) den Übergang zur geodätischen Linie s und ihren Azimuten α_1 und α_2 auf dem Ellipsoid ergeben.

Anstatt B_1, B_2 und $\varDelta L$ selbst für die sphärische Berechnung zu benutzen, kann man auch durch irgendwelche Beziehungen mit ihnen zusammenhängende Werte b_1, b_2 und $\varDelta l$ ansetzen, mit denen man σ, a_1 und a_2 herleitet. Es würde sich dann darum handeln, aus (18) die Korrektionen zu finden, durch welche man auf dem Ellipsoid zu den Werten s, α_1 und α_2 gelangt, die zu B_1, B_2 und $\varDelta L$ gehören. Hierbei ist Bedingung, daß die willkürlich angenommenen Unterschiede $B_1 - b_1$, $B_2 - b_2$, $\varDelta L - \varDelta l$ von der Ordnung e'^2 sind.

Ich nehme nun an, daß b_1 und b_2 gleich den reduzierten Breiten von B_1 und B_2 sind.

Geht alsdann auf einer Kugel ein größter Kreisbogen σ unter dem ellipsoidischen Azimut α_1 von einem Punkte mit der Breite b_1 nach einem Punkte mit der Breite b_2, so ist in diesem, infolge der Bedingungsgleichung der geodätischen Linie, das Azimut ebenfalls gleich dem ellipsoidischen Azimut α_2. Zu σ gehöre der geographische Längenunterschied $\varDelta l$.

Kann man jetzt erstens zwischen $\varDelta l$ und $\varDelta L$ eine Gleichung aufstellen, die $\varDelta l$ liefert, so lassen sich aus b_1, b_2 und $\varDelta l$ nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie die sphäroidischen Azimute α_1 und α_2 berechnen. Gleichzeitig findet man das zugehörige Kreisbogenstück σ. Zweitens bedarf es daher noch einer Gleichung zwischen σ und s, um die zu B_1, B_2 und $\varDelta L$ gehörige geodätische Linie zu erhalten.

Diese Beziehungen zwischen $\varDelta l$ und $\varDelta L$ und zwischen σ und s sollen nun entwickelt werden.

Dazu kann man die Gl. (14) mit (14*), S. 442/443, benutzen. Aus ihnen stellt man zunächst die Gleichungen für die Kugel her, indem man $\varepsilon^2 = 0$ annimmt, und ersetzt darauf die Kugelbreiten, die gleich den reduzierten Breiten sein sollen, durch die ellipsoidischen Breiten. Die Vergleichung der so umgeformten Gleichungen für die Kugel mit den Gl. (14), S. 442, gibt in doppelter Weise die gewünschten Beziehungen.

Ich werde jedoch von den Endgleichungen (18), S. 447, ausgehen, die ja aus (14) entstanden sind. Die den Gl. (18) entsprechenden sphärischen Gleichungen lauten:

$$\log \operatorname{tg} \frac{\varDelta \alpha}{2} = \log\left(\sin b \sec \frac{\varDelta b}{2} \operatorname{tg} \frac{\varDelta l}{2}\right)$$

$$\log\left(\sin \frac{\sigma}{2} \sin \alpha\right) = \log\left(\cos b \sin \frac{\varDelta l}{2}\right) \qquad (1)$$

$$\log\left(\sin\frac{\sigma}{2}\cos\alpha\right) = \log\left(\sin\frac{\Delta b}{2}\cos\frac{\Delta l}{2}\right). \quad (1)$$

$$\Delta b = b_2 - b_1,\ \Delta l = l_2 - l_1;\ b = \tfrac{1}{2}(b_1 + b_2);$$
$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1,\ \ \alpha = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2).$$

In ihnen müssen nun b_1 und b_2, die gleich den reduzierten Breiten von B_1 und B_2 sein sollen, durch diese letzteren ersetzt werden. Zwischen b_i und B_i bestehen die Gleichungen:

$$db_i = \sqrt{1+e'^2}\,\frac{dB_i}{Q_i},\ \sin b_i = \frac{\sin B_i}{\sqrt{Q_i}},\ \cos b_i = \sqrt{1+e'^2}\,\frac{\cos B_i}{\sqrt{Q_i}};\quad (2)$$
$$Q_i = 1 + e'^2\cos^2 B_i.$$

Daraus sind also Reihen für $\log\sin b$, $\log\cos b$, $\log\sec\frac{\Delta b}{2}$ und $\log\sin\frac{\Delta b}{2}$ herzuleiten, die nach Potenzen von ΔB fortschreiten, und deren Koeffizienten zum Argument $B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ gehören.

Entspricht dem Mittelwerte B die reduzierte Breite b', so erhält man, wenn man $b_2 - b'$ und $b_1 - b'$ nach Potenzen von $\frac{\Delta B}{2}$ entwickelt und die zweite Reihe dann von der ersten subtrahiert:

$$\Delta b = \frac{db'}{dB}\Delta B + \frac{1}{24}\frac{d^3 b'}{dB^3}\Delta B^3 + \frac{1}{1920}\frac{d^5 b'}{dB^5}\Delta B^5 + \cdots.$$

Mit Hilfe der ersten Gl. (2) ergibt sich hiernach, wenn wie früher $e'^2\cos^2 B = \varepsilon^2$, $1 + \varepsilon^2 = Q$ und $\operatorname{tg} B = t$, ferner $\frac{\Delta B}{\varrho'' Q} = \Delta B'$ gesetzt wird:

$$\frac{\Delta b}{\varrho''} = \sqrt{1+e'^2}\,\Delta B'\,\Big\{1 + \tfrac{1}{12}\varepsilon^2\left(Q - t^2(1-3\varepsilon^2)\right)\Delta B'^2$$
$$+ \tfrac{1}{240}\varepsilon^2\big(-Q^2(1-2\varepsilon^2) + Qt^2(1-20\varepsilon^2+15\varepsilon^4)$$
$$+ 3\varepsilon^2 t^4(1-10\varepsilon^2+5\varepsilon^4)\big)\Delta B'^4 + e'^2\,Gl_6\Big\}.$$

Δb und ΔB sind in Sekunden vorausgesetzt. Wenn man nun die Reihen für log sec und log sin anwendet, und darauf in der Klammer nach (17), S. 445, $\Delta B'^2 = 4\frac{u^2}{Q} + \frac{4}{3}u^4 + \cdots$ setzt, so wird, indem man noch berücksichtigt, daß $1 + e'^2 = Q + \varepsilon^2 t^2$ ist:

$$\log\sec\frac{\Delta b}{2} = \log\sec\frac{\Delta B}{2}$$
$$+ M\left\{\frac{\varepsilon^2}{2Q}(-Q+t^2)u^2 + \frac{\varepsilon^4}{4Q^2}\left(-Q^2 + 6Qt^2 - t^4(1-4\varepsilon^2)\right)u^4 + \cdots\right\} \quad (3)$$

und

$$\log \sin \frac{\varDelta b}{2} = \log\left(\frac{\sqrt{1+e'^2}}{Q} \sin \frac{\varDelta B}{2}\right) + M\left\{\frac{\varepsilon^2}{2Q}\left(Q - t^2(1-2\varepsilon^2)\right) u^2 \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon^4}{4Q^2}\left(Q^2 - Qt^2(6-4\varepsilon^2) + t^4(1-8\varepsilon^2+2\varepsilon^4)\right) u^4 + \cdots\right\}. \qquad (4)$$

Ferner ist:

$$\sin b_1 + \sin b_2 = 2 \sin b \cos \frac{\varDelta b}{2} = \frac{\sin B_1}{\sqrt{Q_1}} + \frac{\sin B_2}{\sqrt{Q_2}},$$

worin B_1 durch $B - \frac{1}{2}\varDelta B$ und B_2 durch $B + \frac{1}{2}\varDelta B$ zu ersetzen ist. Entwickelt man die Ausdrücke mittels des Taylor'schen Satzes, so findet man zunächst

$$\sin b \cos \frac{\varDelta b}{2} = \frac{\sin B}{\sqrt{Q}}\left\{1 - (1+e'^2)\left[\tfrac{1}{8}(1-2\varepsilon^2)\varDelta B'^2 \right.\right.$$

$$\left.\left. - \tfrac{1}{384}\left(Q(1-28\varepsilon^2+16\varepsilon^4) + 3\varepsilon^2 t^2(3-24\varepsilon^2+8\varepsilon^4)\right)\varDelta B'^4 + \cdots\right]\right\}$$

Hierin wird wie vorher u^2 eingeführt. Indem man alsdann zu Logarithmen übergeht und die Gl. (3) benutzt, erhält man:

$$\log \sin b = \log \frac{\sin B}{\sqrt{Q}}$$

$$+ M(1+e'^2)\left\{\frac{\varepsilon^2}{Q} u^2 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^4}{Q^2}\left(-Q + t^2(3-\varepsilon^2)\right) u^4 + \cdots\right\}. \qquad (5)$$

Ebenso gelangt man zur Gleichung:

$$\log \cos b = \log\left(\sqrt{1+e'^2}\,\frac{\cos B}{\sqrt{Q}}\right)$$

$$- Mt^2\left\{\frac{\varepsilon^2}{Q} u^2 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^4}{Q^2}\left(3Q - t^2(1-3\varepsilon^2)\right) u^4 + \cdots\right\}. \qquad (6)$$

§ 9. Gleichungen zwischen der sphärischen und der sphäroidischen Längendifferenz $\varDelta l$ und $\varDelta L$.

Eine Gleichung zwischen $\varDelta l$ und $\varDelta L$ ergibt sich sofort, wenn man für $\log \sec \frac{\varDelta b}{2}$ und $\log \sin b$ die Werte aus (3) und (5) in der ersten Gl. (1) substituiert und alsdann den so erhaltenen Wert für $\log \operatorname{tg} \frac{\varDelta \alpha}{2}$ mit dem Werte aus der ersten Gl. (18), S. 447, vergleicht.

Aus (1) folgt in der angegebenen Weise:

$$\log \operatorname{tg} \frac{\varDelta\alpha}{2} = \log\left(\frac{1}{\sqrt{Q}} \sin B \sec \frac{\varDelta B}{2} \operatorname{tg} \frac{\varDelta l}{2}\right) + p_1 u^2 + p_2 u^4 + \cdots$$

mit

$$p_1 = \frac{M}{2} \frac{\varepsilon^2}{Q} \left(Q + t^2 (1 + 2\varepsilon^2)\right), \quad p_2 = \frac{M}{4} \frac{\varepsilon^4}{Q^2} \left(Q^2 + 4\varepsilon^2 Q t^2 - t^4 (1 + 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon^4)\right).$$

Ihre Vergleichung mit der ersten Gl. (18), S. 447, gibt:

$$\log \operatorname{tg} \frac{\varDelta l}{2} = \log\left(\sqrt{Q} \operatorname{tg} \frac{\varDelta L}{2}\right) - c_1 u^2 + (1) v^2 - c_3 u^4 - (7) u^2 v^2 + (10) v^4 + e'^2 Gl_6, \tag{7}$$

worin die Koeffizienten (1), (7), (10) und (4) die in den Gl. (18*), S. 447, angegebene Bedeutung haben, und

$$\begin{aligned} c_1 &= -(1) + p_1 = \frac{M}{6} \frac{\varepsilon^2}{Q} \left(Q + 3t^2 (1 + 2\varepsilon^2)\right), \\ c_3 &= +(4) + p_2 = \frac{M}{180} \frac{\varepsilon^2}{Q^2} \left(Q^2 (12 + 23\varepsilon^2) + 12 Q t^2 (5 + 14\varepsilon^2 + 19\varepsilon^4) - 45\varepsilon^2 t^4 (1 + 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon^4)\right) \end{aligned} \tag{7*}$$

ist.

Zu dieser Gleichung gelangt man auch, wenn man die Gleichung

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \log\left(\frac{\cos b}{\sin \frac{\varDelta b}{2}} \operatorname{tg} \frac{\varDelta l}{2}\right),$$

nachdem man die Gl. (4) und (6) benutzt hat, mit der Gl. (20), S. 22, verbindet.

Durch diesen zweiten Weg wird eine Kontrolle der Koeffizienten in (18*), S. 447, ausgeübt; gleichzeitig erkennt man, daß zum Übereinstimmen des auf beiden Wegen erhaltenen Ergebnisses die beiden letzten Gl. (19), S. 448, bestehen mußten.

Aus (7) leitet man weiter ab, wenn man die Reihen zwischen tg und sin und zwischen log tg und log sin berücksichtigt:

$$\log \sin \frac{\varDelta l}{2} = \log\left(\sqrt{Q} \sin \frac{\varDelta L}{2}\right) - c_1 u^2 - c_2 v^2 - c_3 u^4 + c_4 u^2 v^2 - c_5 v^4 + e'^2 Gl_6 \tag{8}$$

mit

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{M}{6} \varepsilon^2 (1 + 3t^2), \quad c_4 = \frac{M}{30} \varepsilon^2 \left(Q - \varepsilon^2 t^2 + 15 t^4 (1 + 2\varepsilon^2)\right) \\ c_5 &= \frac{M}{180} \varepsilon^2 \left(12 + \varepsilon^2 + 6t^2 (10 + 3\varepsilon^2) - 45\varepsilon^2 t^4\right). \end{aligned} \tag{8*}$$

Ferner folgt aus (7) und (8):

$$\log\cos\frac{\Delta l}{2} = \log\cos\frac{\Delta L}{2} - d_2 v^2 + d_4 u^2 v^2 - d_5 v^4 + e'^2 Gl_6 \qquad (9)$$

mit

$$d_2 = \frac{M}{2}\varepsilon^2(1+t^2) = \frac{M}{2}e'^2,\ d_4 = \frac{M}{6}\varepsilon^2(Q+t^2(4+7\varepsilon^2)+3t^4(1+2\varepsilon^2))$$

$$d_5 = \frac{M}{12}\varepsilon^2(4+\varepsilon^2+t^2(4-2\varepsilon^2)-3\varepsilon^2 t^4) \qquad (9^*)$$

$$= \frac{M}{3}e'^2 + \frac{M}{12}\varepsilon^4(1-2t^2-3t^4).$$

Will man in den Gl. (7) bis (9) die ursprünglich gegebenen ΔB und ΔL haben, so muß man in ihnen nach (17), S. 19, setzen:

$$u^2 = \frac{Q}{4}\Delta B'^2 - \frac{Q^3}{48}\Delta B'^4 + \cdots = \frac{1}{Q}\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{\Delta B}{\varrho''}\right)^2 - \tfrac{1}{48}\left(\frac{\Delta B}{\varrho''}\right)^4 + \cdots\right) \qquad (10)$$

$$v^2 = \tfrac{1}{4}\Delta L'^2 - \tfrac{1}{48}(1+t^2)\Delta L'^4 + \cdots = \cos^2 B\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{\Delta L}{\varrho''}\right)^2 - \tfrac{1}{48}\left(\frac{\Delta L}{\varrho''}\right)^4 + \cdots\right).$$

Man kann auch von (7) oder (8) mittels bekannter Reihen zu der direkten Beziehung zwischen Δl und ΔL übergehen. Es ergibt sich mit Benutzung von (10):

$$\begin{aligned}\Delta l = \sqrt{Q}\,\Delta L\{1 &- f_{2\cdot 0}\Delta B'^2 - f_{4\cdot 0}\Delta B'^4 \\ &- f_{0\cdot 2}\Delta L'^2 - f_{2\cdot 2}\Delta B'^2\Delta L'^2 \\ &- f_{0\cdot 4}\Delta L'^4 \qquad + e'^2 Gl_6\}\end{aligned} \qquad (11($$

mit

$$f_{2\cdot 0} = \frac{\varepsilon^2}{24}(Q+3t^2(1+2\varepsilon^2)),\ f_{0\cdot 2} = \frac{\varepsilon^2 t^2}{12}$$

$$f_{4\cdot 0} = \frac{\varepsilon^2}{5760}(Q^2(4+21\varepsilon^2)+6Qt^2(10+21\varepsilon^2+46\varepsilon^4)-45\varepsilon^2 t^4(3+8\varepsilon^2))$$

$$f_{2\cdot 2} = \frac{\varepsilon^2}{1440}(2Q^2+Qt^2(20+33\varepsilon^2)-15t^4(2+7\varepsilon^2+6\varepsilon^4)) \qquad (11^*)$$

$$f_{0\cdot 4} = \frac{\varepsilon^2 t^2}{240}(3Q-t^2(1+3\varepsilon^2));$$

dabei ist

$$\Delta B' = \frac{\Delta B_{\text{Sek.}}}{\varrho'' Q},\ \Delta L' = \frac{\Delta L_{\text{Sek.}}}{\varrho''}\cos B.$$

Dies ist die erste Formel von Jordan. Doch sind hier die

Koeffizienten der Glieder 4. Ordnung in der Klammer vollständige Ausdrücke, während Jordan in ihnen bereits die mit ε^4 multiplizierten Bestandteile vernachlässigt hat.

§ 10. Gleichungen zwischen der sphärischen und der sphäroidischen Bogenlänge σ und s.

Die Herleitung einer Gleichung zwischen σ und s kann gleichfalls in doppelter Weise geschehen, sodaß sich dadurch wiederum eine Kontrolle der Koeffizienten (18*), S. 447, ergibt.

Setzt man in $\log\left(\sin\frac{\sigma}{2}\sin\alpha\right) = \log\left(\cos b\sin\frac{\Delta l}{2}\right)$ die Werte aus (6) und (8) mit (8*) ein, und vergleicht man sie alsdann mit der zweiten Gl. (18), S. 447, oder

setzt man in $\log\left(\sin\frac{\sigma}{2}\cos\alpha\right) = \log\left(\sin\frac{\Delta b}{2}\cos\frac{\Delta l}{2}\right)$ die Werte aus (4) und (9) mit (9*) ein und verbindet sie darauf mit der dritten Gl. (18), S. 447, so findet man übereinstimmend:

$$\log\sin\frac{\varrho'' s}{2\sqrt{RN}} = \log\left(\sqrt{\frac{Q}{1+e'^2}}\sin\frac{\sigma}{2}\right) + q_1 u^2 + q_2 v^2 - q_3 u^4 - q_4 u^2 v^2 + q_5 v^4 + e'^2 Gl_6, \tag{12}$$

worin

$$q_1 = \frac{M}{6}\frac{\varepsilon^2}{Q}(Q + 6\varepsilon^2 t^2),\quad q_2 = \frac{M}{2}\varepsilon^2 t^2$$

$$q_3 = \frac{M}{180}\frac{\varepsilon^2}{Q^2}\left(Q^2(6-23\varepsilon^2) - Qt^2(18-174\varepsilon^2+228\varepsilon^4) + 90\varepsilon^4 t^4(3-\varepsilon^2)\right)$$

$$q_4 = \frac{M}{30}\varepsilon^2\left(Q + t^2(4-\varepsilon^2) + 15t^4(1+2\varepsilon^2)\right)$$

$$q_5 = \frac{M}{60}\varepsilon^2 t^2(16 + 6\varepsilon^2 - 15\varepsilon^2 t^2)$$

ist.

Durch die zweifach erhaltenen Gl. (7) und (12) ist die Richtigkeit der Gl. (18) mit (18*), S. 447, sicher gestellt.

Aus der Gl. (12) läßt sich mit Hilfe der Reihe

$$\log\sin x = \log\frac{x}{\varrho''} - \frac{M}{6}\sin^2 x - \frac{11}{180}M\sin^4 x - \cdots$$

eine direkte Beziehung zwischen σ und s herstellen. Dabei ist zu berücksichtigen, daß

$$\sin^2\frac{\varrho'' s}{2\sqrt{RN}} - \sin^2\frac{\sigma}{2} = \sin^2\frac{\varrho'' s}{2\sqrt{RN}}\left(1 - \sin^2\frac{\sigma}{2} : \sin^2\frac{\varrho'' s}{2\sqrt{RN}}\right)$$

ist, worin nach (12)

$$\sin^2\frac{\sigma}{2} : \sin^2\frac{\varrho'' s}{2\sqrt{RN}} = \left(1+\frac{\varepsilon^2 t^2}{Q}\right)\left(1-\frac{1}{3}\frac{\varepsilon^2}{Q}(Q+6\varepsilon^2 t^2)u^2-\varepsilon^2 t^2 v^2+\cdots\right)$$

und nach der zweiten und dritten Gl. (18) mit (18*), S. 447:

$$\sin^2\frac{\varrho'' s}{2\sqrt{RN}} = Qv^2\left(1-3\frac{\varepsilon^2 t^2}{Q}u^2-\tfrac{1}{3}\varepsilon^2 v^2+\cdots\right)$$
$$+u^2(1-v^2(1+t^2))\left(1+\tfrac{1}{3}\frac{\varepsilon^2}{Q}(4Q-3t^2(1-\varepsilon^2))u^2-\varepsilon^2 v^2+\cdots\right)$$

ist; daß ebenso:

$$\sin^4\frac{\varrho'' s}{2\sqrt{RN}}-\sin^4\frac{\sigma}{2}$$
$$=(u^4+2Qu^2v^2+Q^2v^4+\cdots)\left(1-\left(1+\frac{\varepsilon^2 t^2}{Q}\right)^2(1-\cdots)\right)$$

wird.

Ersetzt man ferner u^2 und v^2 durch die Werte aus (10), so folgt:

$$\log s = \log\left(\frac{a}{\sqrt{Q}}\frac{\sigma}{\varrho''}\right)+g_{2\cdot 0}\,\Delta B'^2+g_{4\cdot 0}\,\Delta B'^4$$
$$+g_{0\cdot 2}\,\Delta L'^2-g_{2\cdot 2}\,\Delta B'^2\,\Delta L'^2 \qquad (13)$$
$$+g_{0\cdot 4}\,\Delta L'^4 \qquad +e'^2\,Gl_6$$

mit

$$g_{2\cdot 0} = \frac{M}{24}\varepsilon^2(Q-t^2(1-6\varepsilon^2)),\quad g_{0\cdot 2} = \frac{M}{12}\varepsilon^2 t^2$$

$$g_{4\cdot 0} = \frac{M}{2880}\varepsilon^2(Q^2(-6+13\varepsilon^2)+Qt^2(6-194\varepsilon^2+168\varepsilon^4)$$
$$+\varepsilon^2 t^4(19-330\varepsilon^2+90\varepsilon^4)) \qquad (13^*)$$

$$g_{2\cdot 2} = \frac{M}{720}\varepsilon^2(-Q^2+Qt^2(2-19\varepsilon^2)+t^4(15+43\varepsilon^2+30\varepsilon^4))$$

$$g_{0\cdot 4} = \frac{M}{1440}\varepsilon^2 t^2(18Q-t^2(10+13\varepsilon^2)).$$

In (13) bedeutet a den Äquatorradius; weiter ist:

$$\Delta B' = \frac{\Delta B_{\text{Sek.}}}{\varrho'' Q} \quad \Delta L' = \frac{\Delta L_{\text{Sek.}}}{\varrho''}\cos B$$
$$\varepsilon^2 = e'^2\cos^2 B,\ 1+\varepsilon^2 = Q;\ \operatorname{tg} B = t.$$

Dies ist die zweite Jordan'sche Formel; über die Glieder 4. Ordnung gilt dasselbe wie vorher.

Die Auflösung besteht hiernach in folgendem: Nachdem aus B_1 und B_2 die reduzierten Breiten b_1 und b_2 und ferner Δl aus (11) oder aus (7) oder (8) berechnet sind, werden die sphäroidischen Azimute α_1 und α_2 und weiter σ durch sphärische Berechnung nach (1) erhalten; der Übergang von σ zur sphäroidischen Bogenlänge s geschieht alsdann nach (13) oder auch nach (12).

Die Rechnung nach (18), S. 447, scheint mir aber einfacher zu sein.

Beispiele.

§ 11. Anwendung der neuen Formeln des § 7 und Vergleichung mit der Jordan'schen Auflösung.

Gegeben ist: $B_1 = 45^0$, $B_2 = 55^0$ und $\Delta L = 10^0$.

Zu der Mittelbreite $B = 50^0$ gehört:

$$\varepsilon^2 = e'^2 \cos^2 B \ldots 7{,}443\,4537\,8, \quad 1+\varepsilon^2 = Q \ldots 0{,}001\,2040\,262;$$

$$N = \frac{a\sqrt{1+e'^2}}{\sqrt{Q}}, \quad R = \frac{a\sqrt{1+e'^2}}{\sqrt{Q^3}}, \quad \sqrt{NR} = \frac{a\sqrt{1+e'^2}}{Q},$$

$$a\sqrt{1+e'^2} \ldots 6{,}806\,0976\,435.$$

Nach (18) mit (18*) und (20), S. 447/448, ergibt sich nun mit

$$u = \frac{\sin\frac{\Delta B}{2}}{\sqrt{Q}} \quad \text{und} \quad v = \sin\frac{\Delta L}{2}\cos B$$

$\sin\frac{\Delta L}{2} \cdots$	8,940 2960 083	$\cos\frac{\Delta L}{2} \cdots$	9,998 3442 260
$\cos B \ldots$	9,808 0674 967	$\sin\frac{\Delta B}{2} \cdots$	8,940 2960 083
$\sqrt{Q} \ldots$	0,000 6020 131	$1:\sqrt{Q} \cdots$	9,999 3979 869
$-(2)u^2 = -$	194 038	$+(3)u^2 = -$	3 072
$-\frac{1}{2}(1)v^2 = -$	6 307	$-\frac{3}{2}(1)v^2 = -$	18 921
$-(5)u^4 = -$	304	$+(6)u^4 = +$	70
$-(8)u^2v^2 = -$	54	$+(9)u^2v^2 = +$	257
$-(11)v^4 = -$	19	$-(12)v^4 = -$	51
$\sin\frac{s\varrho''}{2\sqrt{RN}}\sin\alpha \cdots$	8,748 9454 459	$\sin\frac{s\varrho''}{2\sqrt{RN}}\cos\alpha =$	8,938 0360 495
$\sin\alpha \ldots$	9,734 9765 314	$\cos\alpha \ldots$	9,924 0671 350
$\sin\frac{s\varrho''}{2\sqrt{RN}} \cdots$	9,013 9689 145	$\sin\frac{s\varrho''}{2\sqrt{RN}} \cdots$	9,013 9689 145

$\sin \frac{s\varrho''}{2\sqrt{RN}} \cdots 9{,}013\,9689\,145$

$\frac{s\varrho''}{2\sqrt{RN}} : \sin \frac{s\varrho''}{2\sqrt{RN}} \cdots 5{,}315\,2000\,870$

$2\sqrt{RN} : \varrho'' \ldots 1{,}791\,4984\,798$

$s \ldots 6{,}120\,6674\,813$

$s\varrho'' : 2\sqrt{RN} = 5^0 55' 38{,}''75\,128$

$= 213\,38{,}''75\,128$

$s\varrho'' : 2\sqrt{RN} \ldots 4{,}329\,1690\,014$

$2\sqrt{RN} : \varrho'' \ldots 1{,}791\,4984\,798$

$s \ldots 6{,}120\,6674\,81\dot{2}$

$\operatorname{tg} B \ldots 0{,}076\,1864\,698$

$\operatorname{tg} \frac{\Delta B}{2} \cdots 8{,}941\,9517\,823$

$1 : Q \cdots 9{,}998\,7959\,738$

$\operatorname{tg} \alpha \ldots 9{,}810\,9093\,964$

$+[2]u^2 = + \quad 221\,410$

$-[4]u^4 = - \quad 1$

$\operatorname{tg} \frac{\Delta\alpha}{2} \cdots 8{,}827\,8657\,632$

$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) = 32^0 54' 11{,}''42998$

$\frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) = 3\;50\;55{,}97039$

$\alpha_{1\cdot 2} = 29^0\; 3'\; 15{,}''4596$

$\alpha_{2\cdot 1} = 216\;45\;7{,}4004$

$\sin B \ldots 9{,}884\,2539\,665$

$\sec \frac{\Delta B}{2} \cdots 0{,}001\,6557\,740$

$\operatorname{tg} \frac{\Delta L}{2} \cdots 8{,}941\,9517\,823$

$+(1)u^2 = + \quad 30\,444$

$+(1)v^2 = + \quad 12\,614$

$-(4)u^4 = - \quad 375$

$-(7)u^2 v^2 = - \quad 311$

$+(10)v^4 = + \quad 32$

$\operatorname{tg} \frac{\Delta\alpha}{2} \cdots 8{,}827\,8657\,632$

Bei der Rechnung muß

$$(1)\,u^2 + (2)\,u^2 + (3)\,u^2 = [2]\,u^2$$
$$(4)\,u^4 - (5)\,u^4 - (6)\,u^4 = [4]\,u^4$$
$$(7)\,u^2v^2 - (8)\,u^2v^2 - (9)\,u^2v^2 = 0$$
$$(10)\,v^4 + (11)\,v^4 - (12)\,v^4 = 0$$

sein. Die Auflösung hat mithin den Vorteil, viele Kontrollen zu bieten.

Ich habe nun auch die Rechnung nach den Formeln der §§ 8—10 ausgeführt. Die Ergebnisse sind zwar schon von W. Jordan angegeben, doch fanden sich kleine Abweichungen.

Zunächst ist von B_1 und B_2 zu den reduzierten Breiten b und b_2 überzugehen. Dazu kann man sich z. B. der Formel

$$\sin(B_i - b_i) = \frac{\sqrt{1+e'^2} - 1}{2\sqrt{Q}} \sin 2B$$

bedienen; es ergab sich:

$$b_1 = 44^0 54' 14{,}''67493 \qquad b_2 = 54^0 54' 35{,}''31462,$$

sodaß $b = 49^0 54' 24{,}''99477$ und $\frac{\varDelta b}{2} = 5^0\, 0' 10{,}''31985$

wird.

Nun ist $\varDelta l$ nach (11) mit (11*), S. 453, zu berechnen. Mit

$$\varDelta B' = \frac{\varDelta B}{Q\varrho''} \cdots 9{,}240\,673 \qquad \varDelta L' = \frac{\varDelta L}{\varrho''} \cos B \ldots 9{,}049\,945$$

und $\varDelta L \sqrt{Q} \ldots 4{,}556\,9045\,139$ wird:

$$\varDelta L \sqrt{Q} \cdot \left\{ \begin{array}{lrl} 1 & = & 36049{,}''93731 \\ -f_{2\cdot 0}\varDelta B'^2 & = - & 0{,}66792.1 \\ -f_{0\cdot 2}\varDelta L'^2 & = - & 0{,}14908.7 \\ -f_{4\cdot 0}\varDelta B'^4 & = - & 0{,}00142.4 \\ -f_{2\cdot 2}\varDelta B'^2 \varDelta L'^2 & = + & 0{,}00080.8 \\ -f_{0\cdot 4}\varDelta L'^4 & = - & 0{,}00014.8 \end{array} \right.$$

$$\varDelta l = 36049{,}''11954; \quad \frac{\varDelta l}{2} = 5^0 0' 24{,}''55977.$$

Die sphärische Auflösung nach (1), S. 449/450, liefert mit diesen Werten:

$\cos b \ldots 9{,}808\,9067\,272$	$\sin \frac{\varDelta b}{2} \cdots 8{,}940\,5442\,963$
$\sin \frac{\varDelta l}{2} \cdots 8{,}940\,8866\,635$	$\cos \frac{\varDelta l}{2} \cdots 9{,}998\,3396\,988$
$\sin \frac{\sigma}{2} \sin\alpha \ldots 8{,}749\,7933\,907$	$\sin \frac{\sigma}{2} \cos\alpha \ldots 8{,}938\,8839\,951$
$\sin\alpha \ldots 9{,}734\,9765\,308$	$\cos\alpha \ldots 9{,}924\,0671\,352$
$\sin \frac{\sigma}{2} \cdots 9{,}014\,8168\,599$	$\sin \frac{\sigma}{2} \cdots 9{,}014\,8168\,599$

$$\frac{\sigma}{2} = 5^0 56' 20{,}''60504; \quad \sigma = 42761{,}''21008.$$

$\sin b \ldots 9{,}883\,6611\,224$	$\operatorname{tg} b \ldots 0{,}074\,7543\,952$
$\sec \frac{\varDelta b}{2} \cdots 0{,}001\,6576\,756$	$\operatorname{tg} \frac{\varDelta b}{2} \cdots 8{,}942\,2019\,719$
$\operatorname{tg} \frac{\varDelta l}{2} \cdots 8{,}942\,5469\,648$	$\operatorname{tg}\alpha \ldots 9{,}810\,9093\,956$
$\operatorname{tg} \frac{\varDelta\alpha}{2} \cdots 8{,}827\,8657\,628$	$\operatorname{tg} \frac{\varDelta\alpha}{2} \cdots 8{,}827\,8657\,627$

$$\alpha = 32^0 54' 11{,}''42981$$
$$\frac{\Delta\alpha}{2} = 3\ 50\ 55{,}97037$$
$$\alpha_{1\cdot2} = 29^0\ 3' 15'', 4594$$
$$\alpha_{2\cdot1} = 216^0 45' 7'', 4002$$

Der Übergang von σ zu s erfolgt nach (13) mit (13*), S. 455:

$$\sigma \ldots 4{,}631\ 0499\ 866$$
$$a \ldots 6{,}804\ 6434\ 637$$
$$1 : \sqrt{Q} \ldots 9{,}999\ 3979\ 869$$
$$1 : \varrho'' \ldots 4{,}685\ 5748\ 668$$
$$+ g_{2\cdot0}\, \Delta B'^2 = - \quad 5\,993.6$$
$$+ g_{0\cdot2}\, \Delta L'^2 = + \quad 17\,960.5$$
$$+ g_{4\cdot0}\, \Delta B'^4 = + \quad 7.2$$
$$- g_{2\cdot2}\, \Delta B'^2 \Delta L'^2 = - \quad 206.0$$
$$+ g_{0\cdot4}\, \Delta L'^4 = + \quad 7.2$$
$$s \ldots 6{,}120\ 6674\ 815$$

Hierzu sei noch bemerkt, daß Jordan mittels der weiterreichenden Besselschen Formeln als zusammengehörige Werte

$\alpha_{1\cdot2} = 29^0 3' 15{,}''4598$, $\alpha_{2\cdot1} = 216^0 45' 7{,}''4006$; $s \ldots 6{,}120\ 6674\ 805$

erhalten hat[1]).

§ 12. Abgekürzte Formeln.

Vernachlässigt man die Glieder 4. Ordnung in den Formeln (18), S. 447, so sind diese immer noch genauer als die Formeln (5) oder (10) oder (12), S. 438, 440 und 441. Den letzteren muß man noch die sphärischen Glieder 4. und höherer Ordnung hinzufügen, um mit ihnen die gleiche Genauigkeit zu erlangen.

Um zu zeigen, daß die Gl. (18), S. 447, ohne die Glieder 4. Ordnung noch ziemlich weit reichen, sollen sie jetzt auf das folgende, in der geodätischen Literatur oft behandelte Beispiel Berlin-Königsberg angewendet werden.

Es ist gegeben:

$$B_1 = 52^0 30' 16{,}''7,\ B_2 = 54^0 42' 50{,}''6;\ \Delta L = 7^0 6' = 25560''.$$

Danach ist

$$B = 53^0 36' 33{,}''65 \text{ und } \Delta B = 2^0 12' 33{,}''9 = 7953{,}''9.$$

1) Jordan-Eggert, III. S. 470.

In den Formeln (18) ersetze ich noch $\log \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ und $\log \sin \frac{x}{2}$ durch $\log \frac{x}{2\varrho''}$ mittels der Gleichungen:

$$\log \sin \frac{x}{2} = \log \frac{x}{2\varrho''} - \sigma_x, \quad \sigma_x = \frac{M:24\varrho''^2}{[7{,}628\,7228-20]} x^2 + \frac{M:2880\varrho''^4}{[4{,}921-30]} x^4$$

$$= \frac{M:6}{[8{,}859\,6330-10]} \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{11M:180}{[8{,}424-10]} \sin^4 \frac{x}{2};$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \log \frac{x}{2\varrho''} + \tau_x, \quad \tau_x = \frac{M:12\varrho''^2}{[7{,}929\,7528-20]} x^2 + \frac{7M:1440\varrho''^4}{[6{,}0668-30]} x^4;$$

für x ist in der ersten Gleichung der Reihe nach $\varDelta L$, $\varDelta B$ und $\frac{s\varrho''}{\sqrt{RN}}$ (beim zweiten Ausdruck für σ_x), in der letzten Gleichung $\varDelta L$ und $\varDelta\alpha$ zu nehmen. Die erhaltenen Werte werden durch σ_L, σ_B, σ_s; τ_L, τ_α bezeichnet.

Ferner wird

$$u = \tfrac{1}{2} \frac{\varDelta B}{\varrho'' \sqrt{Q}} + \cdots, \quad v = \tfrac{1}{2} \frac{\varDelta L}{\varrho''} \cos B + \cdots$$

gesetzt; $\varDelta B$ und $\varDelta L$ sind hier wie auch weiterhin in Sekunden zu verstehen.

Es wird nun erhalten:

$1:2\varrho''$ ...	4,384 5448 71	$1:2\varrho''$ ...	4,384 5448 71
$\cos B$ ...	9,773 2652 48	$\cos \frac{\varDelta L}{2}$ ...	9,999 1658 51
$\varDelta L$ ...	4,407 5608 50	$\varDelta B$ ...	3,900 5801 26
$\sqrt{Q}$ ...	0,000 5129 68	$1:\sqrt{Q}$ ...	9,999 4870 32
$-(2)\,u^2 = -$	10 49	$+(3)\,u^2 = -$	93
$-\frac{1}{2}(1)\,v^2 = -$	2 31	$-\frac{3}{2}(1)\,v^2 = -$	6 94
$-\sigma_L = -$	2779 08	$-\sigma_B = -$	269 09
$\sin \frac{s\varrho''}{2\sqrt{RN}} \sin\alpha$ ...	8,565 6047 49	$\sin \frac{s\varrho''}{2\sqrt{RN}} \cos\alpha$ ...	8,283 7501 84
$\sin\alpha$ ...	9,947 5720 47	$\cos\alpha$ ...	9,665 7174 82
$\sin \frac{s\varrho''}{2\sqrt{RN}}$ ...	8,618 0327 02	$\sin \frac{s\varrho''}{2\sqrt{RN}}$ ...	8,618 0327 02
$+\sigma_s = +$	1247 31		
$2\sqrt{RN}$ ...	7,106 1017 03	$\operatorname{tg}\alpha$ ...	0,281 8545 65
s ...	5,724 2591 36		

			$\sin B \ldots$	9,905 7908 07
			$\sec \frac{\varDelta B}{2} \cdots$	0,000 0807 27
α	=	62°24′35″,0271	$\varDelta L \ldots$	4,407 5608 50
$\frac{\varDelta\alpha}{2}$	=	2 51 34, 3380	$+(1)\,u^2 = +$	1 27
$\alpha_{1\cdot 2}$	=	59°33′ 0″,6891	$+(1)\,v^2 = +$	4 63
$\alpha_{2\cdot 1}$	=	245 16 9, 3651.	$+\tau_L = +$	5562 42
			$-\tau_\alpha = -$	3607 96
			$\varDelta\alpha \ldots$	4,313 6284 20

Die Ausdrücke der Koeffizienten (1), (2) und (3) sind in (18*), S. 447, angegeben.

Die genaueren Werte nach den Bessel'schen Formeln mit 10-stelligen Logarithmen berechnet, vgl. Helmert, Theorien d. höheren Geodäsie Band I, S. 244, 247 und S. 261, weichen von den obigen Werten in $\log s$ nur um 1 Einheit der 9. Dezimalstelle, in $\alpha_{1\cdot 2}$ um 0″,0001 und in $\alpha_{2\cdot 1}$ um 0″,0002 ab.

Wenn man 7- oder 8-stellige Logarithmentafeln benutzt, so ist die Berechnung von σ_x und τ_x überflüssig, da alsdann die Hilfslogarithmen $S = \log \frac{\sin x}{x''}$ und $T = \log \frac{\operatorname{tg} x}{x''}$ vorhanden sind.

Überführung des Mannits in Methyl-α-pyran.

Von

A. Windaus und **A. Tomich.**

(Aus dem Allgemeinen Chemischen Laboratorium der Universität Göttingen.)

Vorgelegt in der Sitzung vom 25. Januar 1918 von O. Wallach.

Unter den organischen Verbindungen sind die Kohlenhydrate besonders ausgezeichnet durch die Mannigfaltigkeit ihrer Umwandlungsprodukte. Bei der Einwirkung einfacher chemischer Reagentien liefern sie nicht nur Verbindungen der Fettreihe mit gerader und verzweigter Kette, sondern auch aromatische Verbindungen mit carbocyclischen und heterocyclischen Ringsystemen. Eine Durchforschung der Litteratur nach solchen Übergängen der Kohlenhydrate in cyclische Derivate ergibt etwa das Folgende:

1. Nach Hoppe-Seyler[1]) und Munk[2]) soll sich aus Zucker beim Erhitzen mit Wasser Brenzkatechin bilden. Nachgewiesen ist das Brenzkatechin allerdings nur durch seine Farbenreaktionen, die Ausbeute ist vermutlich sehr gering.
2. Durch Erhitzen mit starken Säuren liefern die Pentosen Furfurol[3]) und die Methylpentosen Methylfurfurol[4]). Aus der Fruktose ist mit Bromwasserstoff in ätherischer Lösung ein Brommethylfurfurol[5]) erhalten worden. Auch Oxymethylfurfurol ist aus Polysachariden bereitet worden.
3. Wird Traubenzucker mit Ammoniak bei Anwesenheit stärkerer Basen stehen gelassen, bildet sich in sehr guter Aus-

1) B **4**, 15.
2) H **1**, 357.
3) A **254**, 314. **249**, 227.
4) C r. **109**, 571.
5) Soc. **73**, 556. **79**, 807.

heute das 4- (bezw. 5)-Methylimidazol[1]). Rhamnose liefert außerdem Dimethyl-imidazol und noch andere Imidazolderivate[2]). Mit Kupferhydroxyd-Ammoniak liefert Traubenzucker Imidazolcarbonsäure[3]).

4. Beim Digerieren der Fruktose mit methylalkoholischem Ammoniak bildet sich das sogenannte Fruktosimin[4]), das sich als ein Pyrazinderivat herausgestellt hat[5]). Auch beim Erhitzen des Traubenzuckers mit Ammoniak unter Druck erhält man kleine Mengen flüchtiger Basen, die Pyrazinderivate enthalten[6]).

Es ist also bisher geglückt aus den Zuckerarten zu erhalten:

Derivate des Benzols (CH, CH, CH, CH, CH, CH), des Furans (CH, CH, CH, CH, O),

des Imidazols (CH, NH, CH, CH, N) und des Pyrazins (N, CH, CH, CH, CH, N).

Die Überführung des Traubenzuckers in eine hydroaromatische Verbindung, den Inosit, ist trotz vieler Versuche noch nicht geglückt.

Wir haben nun am Mannit, einem nahen Verwandten des Zuckers, einen unerwarteten und neuartigen Übergang in eine heterocyclische Verbindung aufgefunden, und zwar bei der Behandlung des Mannits mit Ameisensäure.

Über die Einwirkung der Ameisensäure auf aliphatische einwertige Alkohole liegt eine zusammenfassende Arbeit von Sabatier[7]) vor, aus der hervorgeht, daß die Formiate der Alkohole bei höherer Temperatur in Alkohol und Kohlenoxyd zerfallen. Je nach Art des anwesenden Katalysators kann an Stelle des Alkohols der ungesättigte Kohlenwasserstoff, der Äther, oder auch der entsprechende Aldehyd (bezw. das entsprechende Keton) gebildet werden.

1) B **38**, 1166. **39**, 3886.
2) H **92**, 276.
3) H **90**, 367.
4) R **18**, 72.
5) Bio. Z **12**, 499.
6) J. pr. (2) **54**, 481.
7) C. r. **154**, 49.

Sehr bemerkenswert ist das Verhalten der mehrwertigen Alkohole gegen Ameisensäure. Im einfachsten Falle werden zwei benachbarte Hydroxylgruppen unter Bildung einer Doppelbindung abgespalten; so liefert Glycol Aethylen [1]), und Glycerin nach der berühmten Arbeit von Tollens und Henninger [2]) Allylalkohol. Über welche Zwischenprodukte diese Reaktion verläuft, ist nicht festgestellt; der Erklärungsversuch von Nef [3]) ist nicht überzeugend. Komplizierter als beim Glykol und Glycerin geht die Reaktion beim Erythrit vor sich. Hier hat Henninger [4]) bei der Behandlung mit Ameisensäure fünf verschiedene Produkte isoliert, und zwar:

1. das Erythran

```
HOCH——CHOH
 CH2\    /CH2  ,
      O
```

2. das Dihydrofurfuran

```
 CH═══CH
CH2\   /CH2 ,
     O
```

3. das Formiat eines Alkohols der Formel $C_4H_8O_2$,
4. Butadien $CH_2 : CH—CH : CH_2$ und
5. Crotonaldehyd $CH_3CH : CHCHO$.

Mit der Einwirkung der Ameisensäure auf Mannit haben sich Henninger [5]) und Fauconier [6]) beschäftigt. Letzterer hat im Jahre 1885 eine kurze vorläufige Mitteilung ohne experimentelle Einzelheiten veröffentlicht. Soweit uns bekannt geworden, ist eine ausführliche Mitteilung oder eine Fortsetzung der Arbeit nicht erschienen.

Fauconier macht die folgenden Angaben: Wird Mannit mit Ameisensäure erhitzt, so spaltet sich Wasser ab unter Bildung von Mannitan $C_6H_{12}O_5$ und Isomannid $C_6H_{10}O_4$. Dann findet eine Veresterung des Mannitans statt unter Bildung von Mono- und Diformiat. Bei einer Temperatur von 210° findet eine Zersetzung des Diformiats nach folgenden Gleichungen statt:

1. $C_6H_{10}O_3(OCOH)_2 = CO + CO_2 + C_6H_{16}O_3$
2. $C_6H_{10}O_3(OCOH)_2 = 2H_2O + 2CO_2 + C_6H_8O$.

Während über den Stoff $C_6H_{10}O_3$ nichts weiter angegeben ist, sind von dem Stoff C_6H_8O die wichtigsten physikalischen Kon-

1) Bl. (2) **21**, 242.
2) A. **156**, 134. **167**, 722.
3) A. **335**. 228.
4) C. r. **98**, 149.
5) Bl. (2) **21**, 242.
6) C. r. **100**, 914.

stanten ermittelt; über seine Konstitution aber sind keine Vermutungen ausgesprochen. Als wir die Einwirkung von Ameisensäure auf Mannit zu studieren begannen, war uns die Arbeit von Fauconier, die auch in Tollens „Handbuch der Kohlehydrate" nicht zitiert ist, unbekannt. Wir waren damals mit Versuchen beschäftigt, neue Darstellungsverfahren für Glycerin ausfindig zu machen, dabei beobachteten wir, daß die Ameisensäureester mancher Zuckerderivate beim Erhitzen ein nach Allylalkohol riechendes Destillat gaben, und wir hatten diese Reaktion zu studieren begonnen. Bei solchen Versuchen am Mannit fanden wir den Stoff C_6H_8O wieder auf und versuchten seine Konstitution zu ermitteln.

Hierbei ergab sich zunächst, daß die Substanz ungesättigt ist und mit kolloidalem Palladium und Wasserstoff zwei Moleküle Wasserstoff aufnimmt und in eine gesättigte Verbindung $C_6H_{12}O$ übergeht. Dieses Reduktionsprodukt entwickelt mit metallischem Natrium keinen Wasserstoff und ist indifferent gegen Hydroxylamin. Das Sauerstoffatom wird also wahrscheinlich als Oxydsauerstoff vorhanden sein; auch der sehr niedrige Siedepunkt des ungesättigten und des gesättigten Produktes spricht für die oxydartige Bindung. Wenn wir annehmen, daß die sechs Kohlenstoffatome in der Verbindung C_6H_8O, ebenso wie im Mannit gradlinig miteinander verknüpft sind, können wir für den Stoff C_6H_8O eine Anzahl Formeln ableiten, die einen drei-, vier-, fünf-, sechs- oder sieben-gliedrigen sauerstoffhaltigen Ring enthalten. Um über die Gliederzahl des Ringes einen Anhaltspunkt zu gewinnen, haben wir das ungesättigte Oxyd mehrere Stunden im Rohr mit Wasser auf 110° erhitzt und festgestellt, daß es hierbei unangegriffen bleibt. Eine solche Beständigkeit zeigen nach den Angaben der Litteratur nur die fünf- oder sechsgliedrigen Oxydringe, sicher nicht die dreigliedrigen und wahrscheinlich nicht die vier- und siebengliedrigen. Danach bleiben für den Stoff C_6H_8O, wenn wir die Möglichkeit eines viergliedrigen Ringes außer acht lassen, die folgenden Formulierungen (I—V) in Betracht zu ziehen:

CH—CH
H₃CC C—CH₃
O
I.

HC—CH
HC C—CH₂CH₃
O
II.

CH₂
HC CH
H₃CC CH
O
III.

CH
HC CH
HC CH—CH₃
O
IV.

CH—CH
HC CH
CH₂ CH₂
O
V[1]).

CH₂
H₂C CH₂
H₂C CH—CH₃
O
VI.

Zunächst vermuteten wir, daß in dem Oxyd C_6H_8O ein Abkömmling des Furans vorläge, da ja Furanderivate häufig aus Zuckern erhalten worden sind. Indessen ist das Produkt aus dem Mannitformiat sicher vom Dimethylfuran (I.) verschieden, da es einen um 11° höheren Siedepunkt besitzt. Und ebenso wenig kann ihm eine der Formeln II, III oder V zukommen, da alle diese Formeln symmetrisch gebaut sind und keine Spiegelbildisomerie erkennen lassen; der hier erhaltene Stoff ist aber optisch aktiv (linksdrehend) und besitzt sogar ein beträchtliches Drehungsvermögen; es bleibt also nur die Formel IV eines Methyl-α-pyrans übrig.

Bei diesen Schlußfolgerungen ist allerdings die Möglichkeit, daß ein viergliedriger Oxydring vorliegen könne, nicht in Betracht gezogen worden. Wenn uns auch die Bildung eines solchen als sehr unwahrscheinlich erscheint, haben wir es doch für nötig gehalten die für den Stoff C_6H_8O abgeleitete Formel IV auf synthetischem Wege zu beweisen. Wenn diese Formel zutrifft, muß das oben erwähnte, auf katalytischem Wege gewonnene Reduktionsprodukt $C_6H_{12}O$ die Formel VI besitzen. Ein Oxyd, das dieser Formel entspricht, ist schon in der Litteratur beschrieben und zwar unter dem Namen δ-Hexylenoxyd; Lipp[2]) hat es aus Trimethylenbromid und Natriumacetessigester nach der unten stehenden Reaktionsfolge erhalten:

1) In der Formel V. sind die Doppelbindungen beliebig eingezeichnet.
2) B 18, 3275.

$$
\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_2 \\ | \\ COOC_2H_5 \end{array}
+
\begin{array}{l} CH_2Br \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2Br \end{array}
\rightarrow
\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CH{-}CH_2{-}CH_2{-}CHBr \\ | \\ COOC_2H_5 \end{array}
\rightarrow
$$

$$
\rightarrow
\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_2{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_2{-}OH \end{array}
\rightarrow
\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CHOH \\ | \\ CH_2{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_2{-}OH \end{array}
\rightarrow
$$

$$
\rightarrow
\begin{array}{ccc} & CH_3 & \\ & | & \\ & CH & \\ H_2C & & O \\ H_2C & & CH_2 \\ & CH_2 & \end{array}
$$

Wir haben diese Versuche von Lipp wiederholt und ohne Schwierigkeiten das von ihm beschriebene Hexylenoxyd erhalten, das genau denselben Siedepunkt wie unser Stoff $C_6H_{12}O$ besitzt; irgend einen Unterschied zwischen beiden Verbindungen haben wir nicht festzustellen vermocht. Wir haben dann beide Oxyde mit rauchender Bromwasserstoffsäure zu den Dibromiden $C_6H_{12}Br_2$ aufgespalten, die ebenfalls denselben Siedepunkt besitzen.

Hierdurch scheint uns die Formel VI für unser Reduktionsprodukt und die Formel IV für den Stoff C_6H_8O bewiesen zu sein. Der Übergang des Mannits in das Methylpyran verläuft nach der Bruttoformel $C_6H_{14}O_6 + 2H_2 = C_6H_8O + 5H_2O$. Über die Reaktionsfolge sich ein klares Bild zu verschaffen ist zur Zeit noch nicht möglich. — Für die systematische organische Chemie besitzt die Darstellung des Methyl-α-pyrans ein gewisses Interesse. Wenn auch die Existenz der α-Pyrane längst vorausgesehen war, so war doch bisher die Darstellung eines solchen nicht geglückt: das Methyl-α-pyran ist daher der erste Vertreter einer neuen Körperklasse. Dagegen sind Carbonylderivate des α-Pyrans, die α-Pyrone nicht nur in der Natur aufgefunden[1]), sondern auch synthetisch aufgebaut worden. Einfache γ-Pyrane sind ebenfalls noch nicht bekannt, dagegen haben Blaise und

1) z. B. 1-Phenyl-pyron in der Kotorinde.

Gault[2]) aus α-α'Diketopimelinsäuren α-α'Pyrandicarbonsäuren bereitet; doch sind ihre Versuche aus diesen Säuren Kohlendioxyd abzuspalten und γ-Pyrane zu gewinnen erfolglos geblieben. Auch in der γ-Pyranreihe sind die Carbonylverbindungen, die γ-Pyrone, synthetisch leicht zugänglich und auch weit im Pflanzenreich verbreitet.

Der hier aufgefundene glatte Übergang des Mannits in ein Pyranderivat läßt es nicht ausgeschlossen erscheinen, daß auch die in der Pflanze vorkommenden Pyranderivate in nahem genetischen Zusammenhang mit den Kohlehydraten stehen.

Die neue Reaktion, die wir in der vorliegenden Arbeit beschrieben haben, wird sicher mannigfaltiger Erweiterung fähig sein. Die mit dem Mannit stereoisomeren Hexite werden vielleicht bei der entsprechenden Behandlung das *d*- und das *d, l*-Methyl-α-pyran liefern; aus den Pentiten wird sich möglicherweise die Stammsubstanz der ganzen Reihe, das α-Pyran selbst, gewinnen lassen. Auch die eigentlichen Zucker und einige ihrer einfachen Derivate, besonders die stickstoffhaltigen, lassen bei der Behandlung mit Ameisensäure bemerkenswerte Ergebnisse erwarten.

Die experimentellen Einzelheiten dieser Untersuchung sind in der Doktordissertation des Herrn A. Tomich niedergelegt.

---

2) Bl (4) 1, 129.

Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik[1]).

Von

F. Klein.

Vorgelegt in der Sitzung vom 25. Januar 1918.

I. Aus einem Briefe von F. Klein an D. Hilbert.

... Indem ich Ihre Note sorgfältig studierte, bemerkte ich, daß man die Zwischenrechnungen, die Sie anstellen, durch Benutzung des gewöhnlichen Lagrangeschen Variationsansatzes wesentlich abkürzen kann und im Zusammenhang damit genauere Einsicht in die Bedeutung des Erhaltungssatzes gewinnt, den Sie für Ihren Energievektor aufstellen. Bei der folgenden Darstellung meiner Überlegungen schließe ich mich möglichst an Ihre Bezeichnungsweise an, nur daß ich der Konsequenz halber die Weltparameter w durch obere Indizes unterscheide:

$$w^{I},\ w^{II},\ \dots\ w^{IV}$$

und unbestimmte Indizes durchweg durch griechische Buchstaben bezeichne. Dadurch erleichtere ich den Vergleich mit den parallellaufenden Einsteinschen Entwickelungen, über die ich gleichfalls einige Bemerkungen zu machen habe.

1. Ich beginne gleich damit, nach p. 10 Ihrer Note die beiden Integrale einzuführen, die ich I_1 und I_2 nenne:

(1) $$I_1 = \int K d\omega, \quad I_2 = \int L d\omega,$$

unter $d\omega$ das invariante Raumelement

$$d\omega = \sqrt{g}\,.\,dw^{I} \dots dw^{IV}$$

1) Diese Nachrichten, Math.-phys. Klasse, 1915, p. 395—407 (Mitteilung vom 20. November 1915).

verstanden. Hier ist K die fundamentale Ortsinvariante des zugrunde gelegten ds^2, die sich unter Benutzung Riemannscher Vierindizessymbole so schreibt:

$$(2) \qquad K = \sum_{\mu, \nu, \varrho, \sigma} (\mu\nu, \varrho\sigma)(g^{\mu\varrho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\varrho}),$$

für L aber will ich, da es mir nicht auf Allgemeinheit der physikalischen Voraussetzungen ankommt, den einfachsten nach p. 13 Ihrer Note zulässigen Wert schreiben:

$$(3) \qquad L = \alpha Q = \alpha \sum_{\mu, \nu, \varrho, \sigma} (q_{\mu\nu} - q_{\nu\mu})(q_{\varrho\sigma} - q_{\sigma\varrho})(g^{\mu\varrho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\varrho}).$$

Dabei ist α, gemäß den Einsteinschen Auffassungen, gleich der mit $\frac{8\pi}{c^2}$ multiplizierten Gravitationskonstanten zu nehmen, also in den bei den Physikern gebräuchlichen Einheiten eine sehr kleine Zahl:

$$\alpha = 1{,}87 . 10^{-27};$$

ich führe diesen Zahlenwert ausdrücklich an, damit man sieht, daß die alte Maxwellsche Theorie des von Elektronen freien Raumes, welche $\alpha = 0$ setzt und von K überhaupt nicht spricht, als eine für die gewöhnlichen Messungen zureichende Annäherung an die hier zu besprechenden neuen Ansätze aufgefaßt werden kann. Vergl. weiter unten Nr. 5.

2. Ich bilde nun zunächst rein formal die Variationen der Integrale I_1, I_2, welche einer beliebigen Abänderung der $g^{\mu\nu}$, q_ϱ um $\delta g^{\mu\nu}$, δq_ϱ entsprechen, und schreibe sie abkürzend so:

$$(4a) \qquad \delta I_1 = \int \sum_{\mu, \nu} K_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d\omega$$

$$(4b) \qquad \delta I_2 = \alpha \int \Big(\sum_{\mu, \nu} Q_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sum_{\varrho} Q^\varrho \delta q_\varrho \Big) d\omega.$$

Hier bezeichnen die $K_{\mu\nu}$, $Q_{\mu\nu}$ die wohlbekannten zu den Produkten $dw^\mu dw^\nu$ kontragredienten Tensoren:

$$(5a) \qquad K_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \sqrt{g} K}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_{\varrho} \frac{\partial \left(\frac{\partial \sqrt{g} K}{\partial g^{\mu\nu}_\varrho} \right)}{\partial w^\varrho} + \sum_{\varrho, \sigma} \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial \sqrt{g} K}{\partial g^{\mu\nu}_{\varrho\sigma}} \right)}{\partial w^\varrho \partial w^\sigma} \right) : \sqrt{g},$$

$$(5b) \qquad Q_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \sqrt{g} Q}{\partial g^{\mu\nu}} \right) : \sqrt{g},$$

die Q^ϱ aber den zu den dw^ϱ kogredienten Vektor:

$$(6) \qquad Q^\varrho = - \left(\sum_{\sigma} \frac{\partial \left(\frac{\partial \sqrt{g} Q}{\partial q_{\varrho\sigma}} \right)}{\partial w^\sigma} \right) : \sqrt{g}.$$

Die Gleichungen

$$Q^{\varrho} = 0 \tag{7}$$

sind, in den Koordinaten w geschrieben, die unseren physikalischen Voraussetzungen entsprechenden Maxwellschen Gleichungen; andererseits sind die $Q_{\mu\nu}$, wie Sie auf p. 10 Ihrer Note bemerken, die Energiekomponenten des elektromagnetischen Feldes.

3. Noch will ich, der Deutlichkeit halber, gleich vorab zwischen der skalaren Divergenz eines „Vektors p^{ϱ}" und der vektoriellen Divergenz eines „Tensors $t_{\mu\nu}$" unterscheiden. In unseren allgemeinen Koordinaten w^{ν} drückt sich erstere bekanntlich durch die Summe aus:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial(\sqrt{g}\, p^{\nu})}{\partial w^{\nu}} : \sqrt{g}, \tag{8}$$

die letztere aber wird etwas komplizierter; ihre vier Komponenten lauten:

$$\left(\sum_{\mu,\nu} \frac{\partial(\sqrt{g}\, t_{\mu\sigma}\, g^{\mu\nu})}{\partial w^{\nu}} + \frac{1}{2}\sqrt{g} \sum_{\mu,\nu} t_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}_{\sigma}\right) : \sqrt{g} \tag{9}$$

für $\sigma = 1, 2, 3, 4$.

4. Ich entwickele nun gleich die vier einfachen partiellen Differentialgleichungen, denen I_1 bezw. I_2 (weil beide Invarianten bei beliebigen Transformationen der w sind) genügen. Zu diesem Zwecke bestimmt man natürlich, wie dies insbesondere Lie in seinen zahlreichen einschlägigen Veröffentlichungen getan hat, die formellen Änderungen, welche sich bei einer beliebigen infinitesimalen Transformation

$$\delta w^{\mathrm{I}} = p^{\mathrm{I}}, \quad \ldots \quad \delta w^{\mathrm{IV}} = p^{\mathrm{IV}} \tag{10}$$

ergeben (unter p^{σ} einen infinitesimalen Vektor verstanden, dessen höhere Potenzen vernachlässigt werden dürfen). — Sie haben dies für das Integral I_1 auf p. 4, 5, 6 Ihrer Note in der Weise ausgeführt, daß Sie zunächst die verhältnismäßig komplizierten Änderungen von K in Betracht zogen, um von da durch Integration zur Änderung des I_1 aufzusteigen. Meine ganze Vereinfachung der Überlegung besteht darin, daß ich an die Formel (4a) anknüpfe, d. h. die Änderung des I_1 direkt aus der Lagrangeschen Ableitung berechne. Die Änderung von I_1 muß Null sein, wenn ich (in 4a) für die $\delta g^{\mu\nu}$ diejenigen Werte einsetze, welche der infinitesimalen Transformation (10)

entsprechen. Da die $g^{\mu\nu}$ den $dw^{\mu}\,dw^{\nu}$ kogredient sind, findet man als solche einfach

(11) $$\delta g^{\mu\nu} = \sum_{\sigma} (g^{\mu\nu}_{\sigma} p^{\sigma} - g^{\mu\sigma} p^{\nu}_{\sigma} - g^{\nu\sigma} p^{\mu}_{\sigma}).$$

Wir haben also

$$\int \sum_{\mu,\nu} K_{\mu\nu} (\sum_{\sigma} g^{\mu\nu}_{\sigma} p^{\sigma} - \sum_{\sigma} g^{\mu\sigma} p^{\nu}_{\sigma} - \sum_{\sigma} g^{\nu\sigma} p^{\mu}_{\sigma})\, d\omega = 0.$$

Hier gestalten wir die Glieder mit p^{ν}_{σ}, p^{μ}_{σ} in bekannter Weise durch partielle Integration um, indem wir die sonst willkürlichen p^{σ} der Bedingung unterwerfen, an den Gränzen der Integration zu verschwinden. Wir bekommen dann

$$\int \sum_{\sigma} p^{\sigma} \left(\sqrt{g} \sum_{\mu,\nu} K_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{\sigma} + 2 \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial (\sqrt{g}\, K_{\mu\sigma} g^{\mu\nu})}{\partial w^{\nu}} \right) dw^{\mathrm{I}} \ldots dw^{\mathrm{IV}} = 0$$

und hieraus, wegen der Willkür der p^{σ}, die vier für den Tensor $K_{\mu\nu}$ geltenden, auch von Ihnen (bezw. Einstein) aufgestellten Differentialgleichungen:

(12) $$\sqrt{g} \sum_{\mu,\nu} K_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{\sigma} + 2 \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial (\sqrt{g}\, K_{\mu\sigma} g^{\mu\nu})}{\partial w^{\nu}} = 0 \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4),$$

die wir offenbar dahin interpretieren können, daß wir sagen: die vektorielle Divergenz des Tensors $K_{\mu\nu}$ verschwindet.

Genau so wird man das Integral I_2 behandeln können. Neben die Inkremente (11) der $g^{\mu\nu}$ treten dann nur noch folgende Inkremente der q_{ϱ}[1]):

(13) $$\delta q_{\varrho} = \sum_{\sigma} (q_{\varrho\sigma} p^{\sigma} + q_{\sigma} p^{\sigma}_{\varrho}).$$

Wir bekommen so folgende vier Differentialgleichungen für die $Q_{\mu\nu}$, Q^{ϱ}:

(14) $$\sum_{\mu,\nu} \left(\sqrt{g}\, Q_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{\sigma} + 2 \frac{\partial (\sqrt{g}\, Q_{\mu\sigma} g^{\mu\nu})}{\partial w^{\nu}} \right) + \sum_{\varrho} \left(\sqrt{g}\, Q^{\varrho} q_{\varrho\sigma} - \frac{\partial (\sqrt{g}\, Q^{\varrho} q_{\sigma})}{\partial w^{\varrho}} \right) = 0,$$

für $\sigma = 1, 2, 3, 4$.

Es ist wohl unnötig, sie noch besonders in Worte zu fassen. Wohl aber verlohnt es sich, einer Umgestaltung zu gedenken, die sie wegen der besonderen Form unseres Q gestatten (und die mutatis mutandis an verschiedenen Stellen Ihrer Note ebenfalls auftritt). Q hängt nur von den Differenzen $q_{\varrho\sigma} - q_{\sigma\varrho}$ ab und hat daher,

1) Meine $\delta g^{\mu\nu}$ (11) und δq_{ϱ} (13) sind nichts anderes, als die von Ihnen auf p. 4 Ihrer Note mit $p^{\mu\nu}$ bezw. p_{ϱ} bezeichneten Größen.

wie ein Blick auf (6) zeigt, eine verschwindende skalare Divergenz:

$$\sum_{\varrho} \frac{\partial (\sqrt{g}\, Q^{\varrho})}{\partial w^{\varrho}} = 0.$$

In Folge dessen können wir die Differentialgleichungen (14) in die andere Gestalt setzen:

$$(14') \quad \sum_{\mu,\nu} \left(\sqrt{g}\, Q_{\mu\nu}\, g_{\sigma}^{\mu\nu} + 2 \frac{\partial (\sqrt{g}\, Q_{\mu\sigma}\, g^{\mu\nu})}{\partial w^{\nu}} \right) + \sum_{\varrho} \left(\sqrt{g}\, Q^{\varrho} (q_{\varrho\sigma} - q_{\sigma\varrho}) \right) = 0,$$
$$\text{für } \sigma = 1, 2, 3, 4.$$

5. Jetzt erst führe ich die Grundannahme der Einsteinschen Theorie ein, am liebsten natürlich in der von Ihnen in Ihrer Note gewählten Form, die sich hier dahin ausspricht, daß die Variation

$$(15) \qquad \delta I_1 + \delta I_2 = 0$$

sein soll, für beliebige $\delta g^{\mu\nu}$, δq_{ϱ}.

Dies gibt gemäß (4a), (4b) die bekannten 14 „Feldgleichungen“, nämlich die 10 Gleichungen:

$$(16a) \qquad K_{\mu\nu} + \alpha Q_{\mu\nu} = 0$$

und die 4 Gleichungen

$$(16b) \qquad Q^{\varrho} = 0.$$

Sie bemerken in Ihrer Note, daß zwischen diesen 14 Gleichungen 4 Abhängigkeiten bestehen müssen, und zeigen auf p. 12 durch besondere Rechnung, wie man insbesondere die 4 Gleichungen (16b) — die Maxwellschen Gleichungen — aus den 10 Gleichungen (16a) ableiten kann. Dies ist bei mir natürlich in den Formeln der vorigen Nummer bereits mit enthalten. In der Tat braucht man nur die Gleichungen (14′) mit α multipliziert zu den Gleichungen (12) zu addieren, um unmittelbar abzulesen, daß aus den Gleichungen (16a) das Verschwinden der Q^{ϱ} folgt.

Zugleich ergibt sich völlig klar, was über den Charakter der alten Maxwellschen Theorie als einen Gränzfall der neuen Theorie gesagt wurde. Wenn wir die alte Maxwellsche Theorie in beliebigen krummlinigen Koordinaten $w^{I} \dots w^{IV}$ behandeln, haben wir es doch immer mit einem ds^2 zu tun, dessen Riemannsches Krümmungsmaß identisch verschwindet, für welches also die $K_{\mu\nu}$ schlechtweg 0 sind. Andererseits werde $\alpha = 0$ genommen. Damit sind die 10 Gleichungen (16a) von selbst erfüllt; die Energiekomponenten $Q_{\mu\nu}$ des elektromagnetischen Feldes unterliegen von da aus keiner Bindung mehr.

Es bleiben nur mehr die 4 Gleichungen (16b), d. h. eben die Maxwellschen Gleichungen, bestehen. Als eine Folge derselben haben die $Q_{\mu\nu}$ gemäß (14) eine verschwindende vektorielle Divergenz.

Natürlich haben vor Einstein wir Andern die krummlinigen Koordinaten w in der Physik nur so eingeführt, daß wir die 3 Raumkoordinaten beliebig transformierten, das t aber ungeändert ließen. Das t mit in die Koordinatentransformation einzubeziehen, erscheint als die eine große Leistung von Einstein. Die andere ist dann selbstverständlich die, daß der Gravitation Rechnung getragen werden kann, indem an die Stelle des ds^2 von verschwindendem Riemannschen Krümmungsmaße ein allgemeineres ds^2 gesetzt wird. — Andererseits war, um auch dies zu betonen, das mathematische Rüstzeug zur Bearbeitung dieser neuen physikalischen Gedanken längst bereit gestellt, da uns Räume von beliebig vielen Dimensionen mit beliebigem Bogenelement doch seit Riemann geläufig sind. Es ist hier nicht der Ort, einen historischen Exkurs einzuschalten, der mit den Methoden von Lagranges Mécanique analytique beginnen müßte; es wären sonst namentlich die Arbeiten von Beltrami und Lipschitz zu besprechen.

6. Ich will jetzt, ohne die Feldgleichungen (16) zu benutzen, die Gleichungen (12), (14) zusammen addieren, nachdem ich letztere mit α multipliziert habe. Dies gibt für $\sigma = 1, 2, 3, 4$ die Identitäten:

(17)
$$\sum_{\mu,\nu} \sqrt{g}\,(K_{\mu\nu} + \alpha Q_{\mu\nu})\, g^{\mu\nu}_{\sigma} + \sum_{\varrho} \alpha \sqrt{g}\, Q^{\varrho} q_{\varrho\sigma}$$
$$= -2 \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial \left[\sqrt{g}\,(K_{\mu\sigma} + \alpha Q_{\mu\sigma})\, g^{\mu\nu} - \alpha \sqrt{g}\, Q^{\nu} q_{\sigma}\right]}{\partial w^{\nu}}.$$

Diese Gleichungen multipliziere ich mit p^{σ} (unter p^{σ} einen beliebigen zu den dw^{σ} kogredienten Vektor verstanden) und summiere nach σ. Hier kann ich rechter Hand die p^{σ} mit unter die Differentiationszeichen hineinnehmen, indem ich linker Hand entsprechende Ergänzungsterme hinzusetze. Dabei will ich linker Hand die Buchstabenbezeichnungen σ und ν vertauschen, auch statt $2 g^{\mu\nu} p^{\nu}_{\sigma}$ das, im Zusammenhange gleichbedeutende, symmetrische $g^{\mu\sigma} p^{\nu}_{\sigma} + g^{\nu\sigma} p^{\mu}_{\sigma}$ setzen. Solcherweise entsteht:

(18)
$$\sum_{\mu,\nu,\sigma} \sqrt{g}\,(K_{\mu\nu} + \alpha Q_{\mu\nu})\,(g^{\mu\nu}_{\sigma} p^{\sigma} - g^{\mu\sigma} p_{\sigma} - g^{\nu\sigma} p^{\mu}_{\sigma})$$
$$+ \sum_{\varrho,\sigma} \alpha \sqrt{g}\, Q^{\varrho} (q_{\varrho\sigma} p^{\sigma} + q_{\sigma} p^{\sigma}_{\varrho})$$
$$= -2 \sum_{\mu,\nu,\sigma} \frac{\partial \left\{\left[\sqrt{g}\,(K_{\mu\sigma} + \alpha Q_{\mu\sigma})\, g^{\mu\nu} - \alpha \sqrt{g}\, Q^{\nu} q_{\sigma}\right] p^{\sigma}\right\}}{\partial w^{\nu}},$$

was natürlich nur eine andere Schreibweise der (17) ist. In Anbetracht des besonderen Wertes, den ich für Ihr H von vornherein angenommen habe ($H = K + \alpha Q$), steht hier nun linker Hand genau, was Sie als Wert der mit $\sqrt{g}$ multiplizierten skalaren Divergenz Ihres Energievektors e^{ν} angeben (p. 8 Ihrer Note), also

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \sqrt{g}\, e^{\nu}}{\partial w^{\nu}}.$$

Es folgt, daß Ihr Energievektor e^{ν} von

$$-2 \sum_{\mu, \sigma} \sqrt{g}\, ((K_{\mu\sigma} + \alpha Q_{\mu\sigma})\, g^{\mu\nu} + \alpha Q^{\nu} q_{\sigma})\, p^{\sigma}$$

nur um einen Term verschieden ist, dessen skalare Divergenz identisch verschwindet.

Nehmen wir jetzt die 14 Feldgleichungen (16a), (16b) hinzu, so reduziert sich e^{ν} auf diesen Zusatzterm und die Angabe p. 8 Ihrer Note, daß

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \sqrt{g}\, e^{\nu}}{\partial w^{\nu}} = 0 \tag{19}$$

statt hat, erscheint als mathematische Identität. Besagte Angabe kann also wohl nicht als Analogie zum Erhaltungssatze der Energie, wie er in der gewöhnlichen Mechanik herrscht, angesehen werden. Denn wenn wir in letzterer schreiben:

$$\frac{d(T+U)}{dt} = 0,$$

so besteht diese Differentialbeziehung doch nicht identisch, sondern erst in Folge der Differentialgleichungen der Mechanik.

7. Natürlich wäre es erwünscht, den Zusatzterm, um den sich Ihr e^{ν} von den in Folge der Feldgleichungen verschwindenden Gliedern unterscheidet, explizite anzugeben. Ich finde aber Ihre Formeln so kompliziert, daß ich die Nachrechnung nicht unternommen habe. Nur das scheint klar, daß er Bestandteile umfaßt, die in den p^{σ} linear sind, andere, welche die p^{σ}_{μ}, und vielleicht noch solche, welche die $p^{\sigma}_{\mu\nu}$ linear enthalten. Es kann eigentlich nicht schwer sein, die allgemeinsten Vektoren dieser Bauart anzugeben, deren skalare Divergenz identisch verschwindet. Man erhält überhaupt Vektoren X^{ν} verschwindender Divergenz, indem man von irgend einem Sechsertensor (einem schief symmetrischen Tensor) $\lambda^{\mu\nu}$ ausgeht und

$$\sqrt{g}\, X^{\nu} = \sum_{\mu} \frac{\partial \lambda^{\mu\nu}}{\partial w^{\mu}} \tag{20}$$

setzt. Will man Linearität der X^ν in den p^σ und den p^σ_μ haben, so kann man beispielsweise wählen

$$\lambda^{\mu\nu} = ((\sum_\varrho g^{\mu\varrho} q_\varrho) p^\nu - (\sum_\varrho g^{\nu\varrho} q_\varrho) p^\mu). \tag{21}$$

8. Hier habe ich eine wesentliche Einschaltung zu machen. Sie wissen, daß mich Frl. Noether bei meinen Arbeiten fortgesetzt berät und daß ich eigentlich nur durch sie in die vorliegende Materie eingedrungen bin. Als ich nun Frl. Noether letzthin von meinem Ergebnis betr. Ihren Energievektor sprach, konnte sie mir mitteilen, daß sie dasselbe aus den Entwickelungen Ihrer Note (also nicht aus den vereinfachten Rechnungen meiner Nr. 4) schon vor Jahresfrist abgeleitet und damals in einem Manuskript festgelegt habe (in welches ich dann Einsicht nahm); sie hatte es nur nicht mit solcher Entschiedenheit zur Geltung gebracht, wie ich kürzlich in der Mathematischen Gesellschaft (22. Januar).

9. Zum Schluß will ich noch darauf aufmerksam machen, daß für die „Erhaltungssätze", wie sie Einstein 1916 formuliert hat[1]), selbstverständlich das gleiche glt, wie für Ihren Satz (19). Er spricht es eigentlich selbst völlig klar aus. Ich will hier nicht auf die Einzelheiten seiner Rechnung eingehen, sondern nur an sein Schlußresultat anknüpfen, das er so schreibt:

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial w^\nu} (\mathfrak{T}^\nu_\sigma + \mathfrak{t}^\nu_\sigma) = 0, \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4) \tag{22}$$

wo er die $\mathfrak{T}^\nu_\sigma$ und die $\mathfrak{t}^\nu_\sigma$ als die „gemischten" Energiekomponenten des elektromagnetischen, bezw. des Gravitationsfeldes bezeichnet. Dabei gibt er an, daß sich diese $\mathfrak{T}^\nu_\sigma + \mathfrak{t}^\nu_\sigma$ unter Zuziehung der Feldgleichungen vermöge einer von ihm näher definierten, vom Koordinatensystem abhängigen Funktion $\mathfrak{G}^*$ so ausdrücken lassen:

$$\mathfrak{T}^\nu_\sigma + \mathfrak{t}^\nu_\sigma = -\sum_{\mu,\varrho} \left(\frac{\partial}{\partial w^\varrho} \left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\varrho} g^{\mu\nu} \right) \right), \tag{23}$$

und daß für dieses $\mathfrak{G}^*$ unabhängig von dem Werte des σ die identische Gleichung besteht:

$$\sum_{\mu,\nu,\varrho} \frac{\partial^2}{\partial w^\nu \partial w^\varrho} \left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\varrho} g^{\mu\nu} \right) = 0. \tag{24}$$

Das ist genau, worauf es hier ankommt.

---

1) Vergl. die selbständig erschienene Schrift: Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie (Leipzig 1916) sowie namentlich die Mitteilung an die Berliner Akademie vom 29. Okt. 1916 „Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie" (Sitzungsberichte, p. 1111—1116).

Um den Zusammenhang mit der von mir benutzten Bezeichnung herzustellen, bemerke ich, daß Einsteins $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ dasselbe sind, wie meine $\sum_\mu \sqrt{g}\, Q_{\mu\sigma} g^{\mu\nu}$, Einsteins t_σ^ν aber von den entsprechenden $\frac{1}{\alpha}\sum_\mu \sqrt{g}\, K_{\mu\sigma} g^{\mu\nu}$ um einen Summanden abweichen, der sich ergibt, wenn man die Gleichungen (23) mit den Feldgleichungen

$$K_{\mu\nu} + \alpha Q_{\mu\nu} = 0$$

vergleicht.

Nach alle dem kann ich kaum glauben, daß es zweckmäßig ist, die sehr willkürlich gebildeten Größen t_σ^ν als Energiekomponenten des Schwerefeldes zu bezeichnen. . . . .

II. Aus der Antwort von D. Hilbert.

... Mit Ihren Ausführungen über den Energiesatz stimme ich sachlich völlig überein: Emmy Noether, deren Hülfe ich zur Klärung derartiger analytischer meinen Energiesatz betreffenden Fragen vor mehr als Jahresfrist anrief, fand damals, daß die von mir aufgestellten Energiekomponenten — ebenso wie die Einsteinschen — formal mittelst der Lagrangeschen Differentialgleichungen (4), (5) in meiner ersten Mitteilung in Ausdrücke verwandelt werden können, deren Divergenz identisch d. h. ohne Benutzung der Lagrangeschen Gleichungen (4), (5) verschwindet. Da andererseits die Energiegleichungen der klassischen Mechanik, der Elastizitätstheorie und Elektrodynamik nur als Folge der Lagrangeschen Differentialgleichungen des Problems erfüllt sind, so ist es gerechtfertigt, wenn Sie deswegen in meinen Energiegleichungen nicht das Analogon zu denen jener Theorien erblicken. Freilich behaupte ich dann, daß für die allgemeine Relativität, d. h. im Falle der allgemeinen Invarianz der Hamiltonschen Funktion, Energiegleichungen, die in Ihrem Sinne den Energiegleichungen der orthogonalinvarianten Theorien entsprechen, überhaupt nicht existieren; ja ich möchte diesen Umstand sogar als ein charakteristisches Merkmal der allgemeinen Relativitätstheorie bezeichnen. Für meine Behauptung wäre der mathematische Beweis erbringbar.

Gestatten Sie mir bei dieser Gelegenheit kurz auszuführen, wie ich in meiner Vorlesung des letzten Winters die Frage nach den Energiegleichungen der orthogonalinvarianten Theorien der Physik (Elektrodynamik, Hydrodynamik und Elastizitätstheorie) behandelt habe.

Nehmen wir der Kürze wegen die Weltfunktion H als orthogonale Invariante an, die nur von den Komponenten eines elektrodynamischen Viererpotentials q_s und deren ersten Ableitungen q_{sl} nach w_k $(s, l = 1, 2, 3, 4)$ abhängt — die Methoden gelten in gleicher Weise, wenn H etwa die Vierordichte r und deren Ableitungen oder noch andere physikalische Parameter nebst Ableitungen enthält —: alsdann führt das Hamiltonsche Prinzip

(1) $$\delta \int H d\omega = 0$$

zu dem System der vier Lagrangeschen Differentialgleichungen

(2) $$[H]_s = 0, \qquad (s = 1, 2, 3, 4),$$

wo allgemein

$$[H]_s = \frac{\partial H}{\partial q_s} - \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k} \frac{\partial H}{\partial q_{sk}}$$

bedeutet.

Um zu den Energiegleichungen dieses Problems zu gelangen, schlagen wir den Weg ein, den die Darlegungen meiner ersten Mitteilung weisen, nämlich den Weg über die Gravitationstheorie. Es sei $\overline{H}$ diejenige allgemeine Invariante mit den Argumenten

$$q_s, \; q_{sl}, \; g^{\mu\nu}, \; g_l^{\mu\nu},$$

die für

(3) $$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad g_l^{\mu\nu} = 0$$

in H übergeht; dieselbe verschaffen wir uns, indem wir in H an Stelle von q_{sl} die kovarianten Ableitungen

$$\overline{q}_{sl} = q_{sl} - \sum_h \begin{Bmatrix} sl \\ h \end{Bmatrix} q_h$$

einsetzen und zugleich die Faltung mit den $g^{\mu\nu}$ vornehmen. Enthält beispielsweise H als Term den orthogonalinvarianten Ausdruck

(4) $$Q = \sum_{m,n} (q_{nm} - q_{mn})^2 = \tfrac{1}{4} \sum_{m,n} M_{mn}^2,$$

so ist dieser durch

$$Q = \tfrac{1}{4} \sum_{m,n,k,l} M_{mn} M_{kl} g^{mk} g^{nl}$$

zu ersetzen. Der Ausdruck

$$T = \sum_{s,h} q_{sh}^2$$

ist in

$$\overline{T} = \sum_{s,h,m,n} \overline{q}_{sh} \overline{q}_{mn} g^{sm} g^{hn}$$

umzuwandeln u. s. f.

Nun gilt für jede allgemeine Invariante eine Identität, die in meiner ersten Mitteilung (Theorem III) zwar nur für den Fall bewiesen worden ist, daß die Invariante von den $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen abhängt; aber das eingeschlagene Beweisverfahren gilt auch für unsere allgemeine Invariante H. Unter Verwendung der Bezeichnungen meiner ersten Mitteilung bekommen wir an Stelle der dortigen Gleichung

$$\int P_g(J\sqrt{g})\,d\omega = 0$$

nunmehr in unserem Falle die Gleichung

$$\int\{P_g(\overline{H}\sqrt{g})+P_q(\overline{H}\sqrt{g})\}\,d\omega \equiv \int\{P(\overline{H}\sqrt{g})\,d\omega = 0,$$

eine Identität, die unmittelbar

$$\int\Big\{\sum_{\mu,\nu}[\sqrt{g}\,\overline{H}]_{\mu\nu}\,p^{\mu\nu}+\sum_{\mu}[\sqrt{g}\,\overline{H}]_{\mu}\,p_{\mu}\Big\}\,d\omega = 0$$

zur Folge hat. Nach Einführung von $p^{\mu\nu}$, p_μ und Anwendung der partiellen Integration können wir das Integral linker Hand auf eine Gestalt bringen, in der der Integrand mit p^s multipliziert ist; da aber p^s ein willkürlicher Vektor ist, so muß der andere Faktor unter dem Integralzeichen identisch Null sein, und hieraus ergeben sich die Identitäten ($s = 1, 2, 3, 4$):

$$(5)\quad \sum_{\mu,\nu}[\sqrt{g}\,\overline{H}]_{\mu\nu}\,g_s^{\mu\nu}-2\sum_{m}\frac{\partial}{\partial w_m}\Big\{\sum_{\mu}[\sqrt{g}\,\overline{H}]_{\mu s}\,g^{\mu m}\Big\} +\sum_{\mu}[\sqrt{g}\,\overline{H}]_{\mu}\,q_{\mu s}-\sum_{\mu}\frac{\partial}{\partial w_\mu}([\sqrt{g}\,\overline{H}]_{\mu}\,q_s) = 0.$$

Diese vier Identitäten sind zugleich — genau wie Sie oben bemerkt haben — diejenigen, deren Existenz in dem von mir aufgestellten Theorem I zwischen den 14 Lagrangeschen Gleichungen unseres Problems behauptet wird.

Kehren wir nunmehr zum ursprünglichen Problem (1) zurück, indem wir vermöge (3) die Gravitationspotentiale beseitigen, und berücksichtigen die Lagrangeschen Differentialgleichungen (2), so gehen die Identitäten (5) über in

$$(6)\qquad \sum_{m}\frac{\partial}{\partial w_m}\{[\sqrt{g}\,\overline{H}]_{ms}\}_{g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}} = 0;$$

Bezeichnen wir demnach die Klammerausdrücke

$$(7)\qquad \varepsilon_{ms} = 2\{[\sqrt{g}\,\overline{H}]_{ms}\}_{g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}}$$

als die Komponenten des Energietensors, so erhalten wir

in den Divergenzgleichungen (6) die gewünschten Energiegleichungen des physikalischen Problems (1).

Nehmen wir insbesondere für H die Invariante Q in (4), so werden ε_{ms} die Komponenten des bekannten elektromagnetischen Energietensors, und wegen der Maxwellschen Gleichungen

$$\left\{[\sqrt{g}\,\overline{H}]_m\right\}_{g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}} = \mathrm{Div}_m M = r_m$$

— unter r die elektrische Viererdichte verstanden — ergeben in diesem Falle unsere Identitäten (5)

$$\mathrm{Div}_s\,\varepsilon - \sum_m r_m q_{ms} + \sum_m \frac{\partial}{\partial w_m}(r_m q_s) = 0$$

oder wegen $\mathrm{Div}\, r = 0$:

$$\mathrm{Div}_s\,\varepsilon = -r\,.\,M$$

d. h. sie liefern den bekannten Divergenzausdruck für die ponderomotorische Kraft.

Nur für den Fall der allgemeinen Relativität, d. h. wenn schon die ursprüngliche Invariante H eine allgemeine Invariante ist, versagt der angegebene Weg zur Herstellung von Energiegleichungen für das Problem (1). In der allgemeinen Relativitätstheorie haben wir als Ersatz für die fehlenden Energiegleichungen in Ihrem Sinne eben die Tatsache der vierfachen Überzähligkeit der Lagrangeschen Gleichungen (Theorem I meiner ersten Mitteilung), wie sie oben in den vier Identitäten (5) zum Ausdruck kommt. Umgekehrt erscheinen die Energiesätze der orthogonalinvarianten Theorien als das Residuum jener vier Identitäten der Gravitationstheorie.

Es sei noch bemerkt, daß der Energietensor (7) nicht nur, wie man sofort sieht, die Eigenschaften der orthogonalen Invarianz und der Symmetrie besitzt, sondern darüber hinaus jedesmal die Erfordernisse der speziellen physikalischen Theorie erfüllt: so wird derselbe im Falle der Elektrodynamik, wo H die q_{st} nur in den Verbindungen

$$M_{ks} = q_{sk} - q_{ks}$$

enthält, ebenfalls nur von diesen Komponenten des Sechservektors M, und andererseits im Falle der Elastizitätstheorie auch nur von den eigentlichen Verzerrungsgrößen abhängig, wie sie in den Fragen über Elastizität auftreten. . . . . . .

III. Aus einem weiteren Schreiben von F. Klein.

... Es liegt mir daran, den Unterschied zwischen der orthogonalinvarianten Theorie der Elektrodynamik und der die Schwerkraft mit berücksichtigenden auch meinerseits noch durch einige Worte zu kennzeichnen.

In dieser Hinsicht schafft besondere Klarheit, wenn man, wie ich das schon oben (Nr. 5) andeutete, als Zwischenglied die Behandlung der klassischen Elektrodynamik in beliebigen („krummlinigen") Weltkoordinaten einschaltet.

Ihr Hauptsatz, daß sich die Energiekomponenten des elektrodynamischen Feldes einfach durch die $Q_{\mu\nu}$ darstellen, tritt dann bereits in seiner ganzen Bedeutung in den Vordergrund; ich würde also vorziehen, bei diesem Satz sich nicht auf die moderne Gravitationstheorie zu berufen.

Auch finde ich es nützlich, die Integrale $\int K d\omega$ und $\int Q d\omega$ bei der Darstellung auseinanderzuhalten und nicht von vornherein zu einem Integral $\int H d\omega$ zu verschmelzen.

Wir haben dann für die $K_{\mu\nu}$ und die $Q_{\mu\nu}$ je vier Identitäten (die Gleichungen (12) und (14) — oder (14′) — meines ersten Briefes), im ganzen also acht, und der Gegensatz der früheren und der heutigen Theorie läßt sich dann folgendermaßen in präzise Sätze formen:

1. Beidemal haben wir neben den acht Identitäten 14 „Feldgleichungen".
2. Diese lauten in der früheren Theorie

$$\text{a)}\quad K_{\mu\nu} = 0, \qquad \text{b)}\quad Q^{\varrho} = 0.$$

Vermöge der zehn Gleichungen a) sind die vier Identitäten (12) von selbst erfüllt, die Identitäten (14) — oder (14′) — aber reduzieren sich vermöge der vier Gleichungen b) auf die vier Aussagen, welche man die vier Erhaltungssätze (Impuls-Energiesätze) nennt.

3. Dafür hat man in der neuen Theorie die Feldgleichungen

$$\text{a}')\quad K_{\mu\nu} + \alpha Q_{\mu\nu} = 0, \quad \text{mit } \alpha \neq 0, \qquad \text{b}')\quad Q^{\varrho} = 0.$$

Jetzt erscheinen die Gleichungen $Q^{\varrho} = 0$ vermöge der acht Identitäten als eine Folge der zehn Gleichungen a′).

Aus den Identitäten (14) folgen, wenn man die Q^{ϱ} wegstreicht, nach wie vor „Erhaltungssätze" für die $Q_{\mu\nu}$. Aber diese haben jetzt keine selbständige (physikalische) Bedeutung mehr, weil sie sich vermöge der zehn Glei-

chungen a′) auf die vier Identitäten (12) reduzieren; sie sind eben schon in den zehn Feldgleichungen mit enthalten.

Alles Dieses ist sachlich in voller Übereinstimmung mit den Darlegungen Ihres Briefes. Es würde mich aber sehr interessieren, die Ausführung des mathematischen Beweises zu sehen, den Sie am Ende des ersten Absatzes Ihrer Antwort in Aussicht stellen.
. . . .

Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss.

Gesammelt von **F. Klein, M. Brendel** und **L. Schlesinger.**

IV. C. F. Gauss als Zahlenrechner.

Von

A. Galle in Potsdam[1]).

(Ein Abschnitt aus dem in Vorbereitung befindlichen Aufsatze „Über die geodätischen Arbeiten von Gauss“.)

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. Dezember 1916 durch Herrn F. Klein.

Die geistige Schöpferkraft hat erfahrungsgemäß das Vorhandensein besonderer geistiger und körperlicher Gaben[2]) zur Voraussetzung. Der Zusammenhang zwischen dem Genie und den ihm zu Grunde liegenden Talenten läßt sich aber um so schwieriger erkennen, als nach dem eigenen Zeugnis großer Männer gerade die höchsten Leistungen durch blitzartige Erleuchtungen zu Stande kommen und unbewußten Eingebungen gleichen[3]). Da die

1) Ein Verzeichnis der im folgenden gebrauchten Abkürzungen findet sich auf S. 22.

2) R. Wagner, Vorstudien zu einer wissenschaftlichen Morphologie und Physiologie des menschlichen Gehirns u. s. w. Abhandl. der Kgl. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen Bd. 9, S. 59. Göttingen 1861. P. J. Möbius, Über die Anlage zur Mathematik. Leipzig 1900. S. 6. 183. L. Hänselmann, Karl Friedrich Gauß. Zwölf Kapitel aus seinem Leben. Leipzig 1878. S. 13.

3) Gauß spricht in einem Briefe an Schumacher (15. Mai 1843, Briefw. G.-Sch. Nr. 833) von „den gleichsam unbewußten Inspirationen des Genies, die niemand erzwingen kann“ und schreibt an Olbers (3. Sept. 1805, Briefw. G.-O. Nr. 133) „Alles Brüten, alles Suchen ist umsonst gewesen, traurig habe ich jedesmal die

Offenbarungen des Genies nur auf bestimmte, wenn auch manchmal weit ausgedehnte Gebiete beschränkt sind, so ist je nach dem Felde der Geistesbetätigung die Begabung eine verschiedene. Manche Gaben, wie ein hervorragendes Gedächtnis [1]), scheinen allerdings allen Schöpfernaturen gemeinsam zu sein.

Bei den mathematischen Genies findet man in der Regel eine besondere räumliche Vorstellungsgabe und einen ausgesprochenen Zahlensinn. Die Anwendungen der Mathematik bringen noch andere Anlagen zur Geltung [2]). Die Begabung für die Astronomie und Geodäsie zeigt sich vornehmlich in solchen Fähigkeiten, die beim Beobachten und beim Rechnen hervortreten [3]). In vielen Fällen überwiegt die eine die andre beträchtlich. Gauß hat sich in beiden Richtungen ausgezeichnet und die Astronomen aller Zeiten erreicht oder über-

---

Feder wieder niederlegen müssen. Endlich vor ein paar Tagen ist's gelungen — aber nicht meinem mühsamen Suchen, sondern bloß durch die Gnade Gottes möchte ich sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst; ich selbst wäre nicht im Stande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wußte, dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte — und dem, wodurch es gelang, nachzuweisen".

Ähnlich machte Goethe die Erfahrung, daß derjenige Mensch, der ein Genie in sich trägt, erfährt, daß er heut diese, morgen jene Fähigkeiten und Unfähigkeiten hat: Zeitweise ist er ein Dichter, der leicht vermag, was er sich vornimmt, und dann folgen Wochen und Monate, wo Hinz und Kunz eine poetische Aufgabe rascher und geschickter ausführen (W. Bode, Goethes Leben im Garten am Stern. Berlin 1904). Er schreibt z. B. „30. März (1780) hatt' ich den erfindenden Tag. Anfangs trüblich, ich lenkte mich zu Geschäften, bald ward's lebendiger . . Abends wenig Momente sinkender Kraft. Darauf Acht zu geben, woher?" „Die Ausübung dieser Dichtergabe", sagt Goethe ein andres Mal von sich, „konnte zwar durch Veranlassung erregt und bestimmt werden, aber am freudigsten und reichlichsten trat sie unwillkürlich, ja wider Willen hervor".

1) Bei Gauß tritt das erstaunliche Erinnerungsvermögen an vielen Stellen seiner Briefe zu Tage, wenn er eine genaue Zeitangabe über ein weit zurückliegendes Ereignis macht oder den Wortlaut einer früheren Mitteilung wiederholt (vergl. Briefw. G.-Sch. Nr. 508. 509. 679. 735. 953; Briefw. G.-G. Werke, Band X 1, S. 125/126). Ja die oft fast gleich lautenden Berichte an verschiedene Empfänger sind bereits ein Zeichen der Sicherheit seines Gedächtnisses, da er nach seiner Angabe (Briefw. G.-Sch. Nr. 713) fast niemals den Entwurf eines Briefes niederschrieb. Für sein Zahlengedächtnis zeugt die Briefstelle (Briefw. G.-Sch. Nr. 321. 10. 12. 1827): „Ich schreibe diese Zahl (443, 31 Linien) nur aus dem Gedächtnis, da ich in diesem Augenblick die auf mehrere Decimalen genaue Angabe nicht gleich auffinden kann". Der genaue Wert war 443, 29849 (Briefw. G.-Sch. Nr. 378. 18. 4. 1830). Nur das Namensgedächtnis scheint bei Gauß nicht besonders gut gewesen zu sein, worüber er gelegentlich klagt (Briefw. G.-Sch. Nr. 856).

2) Vgl. Möbius a. a. O. S. 2, 127.

3) „Wo einmal eine tüchtige mathematische Grundlage vorhanden ist, [lassen sich die eigentlich astronomischen Kenntnisse] unter gehöriger Application bald

flügelt. Wenn man aber bei ihm jene beiden Fähigkeiten gegen einander abwägt, so wird man sein Rechentalent noch höher einschätzen, als seine Beobachtungsgabe. Bei den praktischen Aufgaben des Beobachters klagt er bisweilen über Schwierigkeiten[1]), seine Erfolge auf diesem Gebiete verdankt er zu nicht geringem Teil der großen Sorgfalt und der starken Willenskraft, die ihn alle Hindernisse überwinden ließen. Bei seiner Tätigkeit als praktischer Rechner hat Gauß dagegen wohl niemals irgend welche Schwierigkeiten erwähnt oder auch nur über Ermüdung geklagt. Allerdings äußerte er bisweilen, daß die Berechnungen ihm viel Zeit kosteten[2]), aber kaum jemals hat er im Ernste daran gedacht, sie durch andre ausführen zu lassen[3]), sofern sie nicht die Kraft eines Einzelnen überstiegen.

---

ergänzen. Anders verhält es sich aber im Allgemeinen mit den übrigen Erfordernissen für die Geschäfte der practischen Astronomie, sowohl für das Beobachten, als für den Calcül; es müssen dazu gewisse natürliche Anlagen mitgebracht werden, welche selbst vielen auch ausgezeichneten Mathematikern abgehen und diese natürlichen Anlagen müssen zu Fertigkeiten ausgebildet sein". (Gauß 4. April 1851 in einem Schreiben wegen Besetzung von Goldschmidts Stelle.)

1) „Überhaupt, so sehr ich die Astronomie liebe, fühle ich doch das Beschwerliche des Lebens eines practischen Astronomen, ohne Hülfe, oft nur zu sehr". (Briefw. G.-B. Nr. 120. 28. 6. 1820. Nr. 156. 1. 4. 1827.) „Das Einziehen der Spinnefäden ist eine sehr kitzliche Arbeit, wenn von einem stark vergrößernden Instrument die Rede ist. Beim Mittagsfernrohr habe ich eine ganze Woche damit zugebracht". (Briefw. G.-B. Nr. 113. 10. 2. 1820.) „Das Einziehen von 9 Spinnefäden ist ein Stück Arbeit, wobei man in den kurzen Wintertagen die Augen zum Zerspringen angreifen muß". (Briefw. G.-O. Nr. 465. 29. 12. 1822.) „Das Aufstellen des Heliometers, das Beobachten selbst etc. kostet zu viel Mühe, als daß ich sie an ein so betrügerisch-undankbares Geschäft [Beobachtung der Sonnenflecke] verschwenden sollte". (Briefw. G.-O. Nr. 302. 24. 6. 1815.) Gauß bedauert, daß er keine Übung im Zeichnen habe; er empfindet den Mangel eines Assistenten, der ihm die Nebenarbeiten abnehmen könnte (Briefw. G.-Sch. Nr. 274. 10. 7. 1826). Die Verdienste eines Gerling (Briefw. G.-O. Nr. 313. 27. 11. 1815) und eines Wilhelm Weber (Briefw. G.-O. Nr. 718. 29. 4. 1838), die ihm in praktischen Dingen zur Hand gingen, erkennt er dankbar an.

2) „Die Rechnungen über meine vorjährigen Messungen . . . haben mir bisher viel zu thun gemacht und mich wenig zu andern Arbeiten kommen lassen". (Briefw. G.-B. Nr. 147. 15. 1. 1825.) „Die Verarbeitung der im vorigen Sommer gemachten Messungen raubt mir ganz enorm viele Zeit" (Briefw. G.-Sch. Nr. 352. 7. 12. 1828). „Alle diese Rechnungen kosten mir sehr viele Zeit" (Briefw. G.-Sch. Nr. 376. 24. 2. 1830). „Von der Langwierigkeit solcher Rechnungen [Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Bestimmung der Bilanz für Witwenkassen] haben diejenigen Herren eine sehr falsche Vorstellung, welche glauben, daß sie binnen vier Wochen vollendet werden können." (Werke, Band IV, Seite 120.)

3) Nur selten erwähnt er, daß er bei seinen Rechnungen einige fremde Hülfe benutzt habe (Briefw. G.-Sch. Nr. 1149. 16. 4. 1847). Vergl. Werke Band IX,

Daß bei Gauß das Rechentalent ursprünglich vorhanden war und nicht nur durch Übung ausgebildet wurde, zeigt die Erzählung, die Hänselmann aufgezeichnet hat[1]): „In seinem dunkeln Heimchenwinkel behorcht der kaum dreijährige Knabe die Berechnungen, die der Vater beim Wochenabschluß mit seinen Gesellen anstellt; es handelt sich um die Vergütung von Feierabendarbeit nach dem Verhältnis des Tagelohns. Als es ans Auszahlen geht, zirpt er warnend dazwischen, und siehe da, der Alte hat sich verrechnet und was der Kleine angibt, ist das Richtige". Hierdurch gewinnt der Scherz einen tieferen Sinn, mit dem Gauß von sich behauptete, er habe früher rechnen, als sprechen können[1]).

Auf die Entwicklung dieser außerordentlichen Gabe und zugleich auf die Betätigung seines Geistes dabei wirft eine andre Geschichte ein helleres Licht. Den Schülern der unter des Lehrers Büttner Leitung stehenden Rechenklasse der Katharinenschule in Braunschweig wurde die Aufgabe vorgelegt, die Summe einer Reihe auf einander folgende Zahlen zu bilden. Jeder, der die Rechnung beendet haben würde, sollte die Tafel auf einen Sammel-

---

Seite 241 und 434 noch die Bemerkungen von Krüger. (Briefw. G.-O. Nr. 329. 15. 2. 1817.) Die den Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. beigegebene Tafel für Ψ hat nach der hier folgenden Anmerkung Nicolai berechnet, während Gauß die Tafel der Π selbst hergestellt zu haben scheint. Gauß sagt: „Eidem calculatori exercitatissimo [Nicolai] etiam debetur tabulae ad finem huius Sectionis annexae pars altera, exhibens valores functionis Ψ_z ad 18 figuras pro omnibus valoribus ipsius z a 0 usque ad 1 per singulas partes centesimas. Ceterum methodi, per quas utraque tabula constructa est, innituntur partim theorematibus, quae hic traduntur, partim calculi artificiis singularibus, quae alia occasioni proferemus (Werke, Band III S. 154, vgl. S. 21 dieses Aufsatzes). Bei den Störungsrechnungen (zu Störungstafeln der Pallas hielt Gauß sechs bis acht Rechner für nötig) und bei den Hülfstafeln zur Berechnung der magnetischen Kräfte hat er die Mitarbeit verschiedener Astronomen (Westphal, Encke, Nicolai, Goldschmidt) in Anspruch genommen vgl. Werke Band VII, S. 602. Band V, S. 152, 177. Auch die Hülfe, die Bessel durch Berechnung von Sonnenörtern (Briefw. G.-B. Nr. 1 und 2. 21. 12. 1804 und 29. 12. 1804) und der Koeffizienten in der Entwicklung des reziproken Wertes der Entfernung zweier Himmelskörper lieh (Briefw. G.-B. Nr. 6. 3. 9. 1805), kann hier erwähnt werden. — Wie Gauß sich zu dem Gebrauche mechanischer Hilfsmittel gestellt haben würde, läßt sich nicht mit Deutlichkeit aus dem wohlwollenden Zeugnis entnehmen, das er dem Erfinder des Modells einer Rechenmaschine, Professor Schiereck ausgestellt hat (Werke, Band X 1, S. 6).

1) Sartorius v. Waltershausen, Gauss zum Gedächtniss, Leipzig 1856, S. 11, Hänselmann, a. a. O. S. 16. A. Binet gibt eine Zusammenstellung (Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échecs, Paris 1894, S. 190/191), welche die Frühreife vieler hervorragender Zahlenrechner zeigt. Vergl. D. Katz, Psychologie und mathematischer Unterricht, Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland, herausgeg. von F. Klein, Band III Heft 8, Leipzig und Berlin 1913, S. 68.

tisch legen. Kaum war die Aufgabe gestellt, so legte der damals neunjährige Gauß seine Tafel mit den Worten: Dar licht se! hin. Der alte Büttner musterte den schnellfertigen Knaben mit spöttischem Mitleid, während die andern Schüler die Stunde hindurch weiter rechneten. Auf der Tafel von Gauß stand nur eine Zahl, das richtige Ergebnis. Er hatte das Summationsprinzip für die arithmetischen Reihen auf den ersten Blick herausgefunden [1]).

Daß der Lehrer ein dauerndes Interesse an diesem Schüler nahm, ihm ein neues Rechenbuch aus Hamburg verschaffte, und daß auch andre auf ihn aufmerksam wurden, sei nebenbei bemerkt. Mit einem Hilfslehrer derselben Schule, Bartels, der zwar acht Jahre älter war, aber bald sein Freund wurde, widmete sich Gauß der niederen Analysis, aber in wie weit rechnerische Übungen ihn in jener Zeit beschäftigten, wird nicht berichtet. Auch die Anerkennung des Mathematiklehrers, Professor Hellwig, der von dem dreizehnjährigen Primaner sagte „es sei überflüssig, daß ein solcher Mathematiker noch in seinen Stunden erscheine“ nimmt nicht besonders auf sein Rechentalent Bezug. Dagegen stammen umfangreiche Tafeln zur Zahlentheorie und rechnerische Arbeiten für die Funktionentheorie aus den vier Jahren seines Besuchs des Carolinums [2]).

Aus dem Anfang der Studienzeit in Göttingen hören wir, daß Gauß, nachdem er im Alter von 17 Jahren die Methode der kleinsten Quadrate erfunden hatte, sie zu seinem Privatgebrauch in den folgenden Jahren häufig angewandt habe. Ein im Nachlaß vorhandenes Oktavblatt enthält ein Beispiel ihres Gebrauchs, das nach einer Bemerkung von Gauß aus dem Jahre 1799 stammt und zeigt, daß er damals schon eigene Wege einschlug [3]).

Aus demselben Jahre ist uns die Berechnung einer Sternbedeckung erhalten, die er an v. Lecoq übersandte und die uns ihn gleichfalls als fertigen Rechner vor Augen stellt [4]). Er fügt dem Beispiel eine Anmerkung hinzu, die darauf hindeutet, daß er häufig praktische Rechnungen ausführte und die seine Art, zu rechnen, kennzeichnet: „Übrigens bemerke ich noch, daß ich mich bei meinen eigenen Rechnungen mancher Kunstgriffe bediene. Bei Aufsuchung

---

1) Sartorius, a. a. O. Seite 12, Hänselmann, a. a. O. Seite 16, 17.

2) Vergl. hierüber Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß, P. Bachmann, Werke, Band X 2, Seite 4 und L. Schlesinger, diese Nachrichten 1912, Heft III, Seite 10.

3) Vergl. Werke, Band X 1, Seite 445.

4) Werke, Band X 1, Seite 539.

der Sinus und der Tangenten z. B. von kleinen Winkeln wird das Interpolieren wegen der Größe und Veränderlichkeit der Differenzen sehr beschwerlich; da verfahre ich gewöhnlich so: Es sei n ein kleiner Bogen in Secunden ausgedrückt, c das Complement des Logarithmen seines Cosinus. Dann ist $\log\sin n = \log n - \frac{1}{3}c$, $\log\operatorname{tang} n = \log n + \frac{2}{3}c$[1]. Der Fehler kann in der 7ten Decimalstelle keine Einheit betragen, so lange n kleiner als $3^0 10' 7''$".

Bereits im Alter von 14 oder 15 Jahren hatte Gauß begonnen, sich mit der Zahlentheorie zu beschäftigen und 1799 hatte er im Wesentlichen die Disquisitiones arithmeticae vollendet, die bei ihrem Erscheinen im Jahre 1801 seine Beherrschung des Zahlensystems aller Welt zeigten. Dieser Beschäftigung mit der höheren Arithmetik schrieb Gauß einen wesentlichen Einfluß auf seine große Gewandtheit im Zahlenrechnen zu. Er spricht sich darüber in einem Briefe an Schumacher vom 6. Januar 1842 aus[2]: „Meine jetzt fast 50-jährigen Beschäftigungen mit der höheren Arithmetik haben allerdings insofern einen großen Anteil [an der mir zugeschriebenen Fertigkeit im numerischen Rechnen], als dadurch von selbst vielerlei Zahlenrelationen in meinem Gedächtnis unwillkürlich hängen geblieben sind, die beim Rechnen oft zu Statten kommen. Z. B. solche Producte, wie $13 \times 29 = 377$, $19 \times 53 = 1007$ und dergleichen, schaue ich unmittelbar an, ohne mich zu besinnen, und bei andern, die sich aus solchen sogleich ableiten lassen, ist des Besinnens so wenig, daß ich mir desselben kaum selbst bewußt werde. Übrigens habe ich Rechnungsfertigkeit niemals absichtlich irgendwie cultivirt, sonst hätte sie sich ohne Zweifel viel weiter treiben lassen; ich lege darauf gar keinen Werth, außer in so fern sie Mittel nicht aber Zweck ist".

Aus diesen Bemerkungen geht bereits hervor, worin die durch die Beschäftigung mit der Zahlentheorie erworbene Rechenfertigkeit zunächst bestand. Man könnte nach der Äußerung, daß Gauß die Zahlenprodukte unmittelbar anschaute, vermuten, daß ihm die Rechnung, wie sie auf dem Papier ausgeführt wird, unmittelbar vor Augen stand[3], etwa in derselben Weise, wie Klopstock, wenn er beim Schlittschuhlaufen eine Schachpartie spielte, die Figuren des Brettes in seinem Geiste erblickte. In diesem Fall könnte man daran denken, daß Gauß das Verfahren der symmetrischen Multi-

---

1) In der Handschrift steht $\frac{1}{3}c$.
2) Briefw. G.-Sch. 760.
3) Vergl. Binet a. a. O. Seite 93.

plikation angewandt habe[1]). Indessen legt die Wahl der Beispiele den Gedanken nahe, daß er $13 \times 29 = 390 - 13 = 377$, $53 \times 19 = 1060 - 53 = 1007$ bildete, wobei ihm das Einschlagen gerade dieses Weges zur andern Natur geworden war und garnicht zur Überlegung Anlaß gab. Zunächst werden es, wie in diesen Beispielen, Produkte von Primzahlen gewesen sein, die sich bei der Zerlegung der Zahlen in Primfaktoren seinem Gedächtnis eingeprägt hatten. Unter den daraus abgeleiteten Produkten wird man dann solche verstehen dürfen, die das 2-fache, 5-fache u. s. w. derselben sind[2]), also z. B. $13 \times 58 = 2 \times 377 = 754$, $265 \times 19 = 5 \times 1007 = 5035$. Wie dem aber auch sei, jedenfalls geht aus den voranstehenden Worten deutlich hervor, daß bei zwei- oder mehrstelligen Zahlenrechnungen bei Gauß die Erinnerungskraft eine ähnliche Rolle spielte, wie beim einfachen Einmaleins für den Durchschnitt der Menschen, die etwa $6 \times 7 = 42$ auch ohne jede Überlegung als Besitz in ihrem Gedächtnis festhalten.

Auf seine außergewöhnliche Fähigkeit, im Kopfe zu rechnen, legte aber Gauß nicht den entscheidenden Nachdruck. Als ihm die Hülfe des Rechenkünstlers Dase angeboten wurde, lehnte er sie entschieden ab: er könne sich bei den vielen und großen Rechnungen, die er in seinem Leben ausgeführt habe, kaum eines Falles erinnern, wo die Hülfe von jemand, der blos mechanische Rechnungsfertigkeit gehabt hätte, ihm von irgend einem Nutzen hätte sein können (Briefw. G.-Sch. Nr. 1149). „Was [über Dase] zu meiner Kenntnis gekommen ist, enthält eigentlich noch gar kein Zeugnis für eine ganz außerordentliche Rechnensfähigkeit“,

1) $(a_0 + a_1 . 10 + a_2 . 10^2)(b_0 + b_1 . 10 + b_2 . 10^2) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) 10 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) . 10^2$. Vgl. J. Fourier, Analyse des équations déterminées, Paris 1831, Seite 190, siehe auch Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 127, übersetzt von A. Loewy, Seite 183 und die zugehörige Bemerkung von Loewy, Seite 262. Über dieses von Ferrol neu erfundene Verfahren, das bis zu den Indern zurückreicht, vergl. u. a. Maennchen, Mathem. Bibl. XIII, Leipzig-Berlin 1913, Seite 34 ff. Noch weniger wird man bei Gauß an Vorstellungen von Diagrammen denken dürfen, wenn auch Synopsien häufiger vorzukommen scheinen, als man anzunehmen geneigt ist, vergl. Katz a. a. O. Seite 51.

2) Hierauf deutet auch die folgende von Gauß herrührende Berechnung des Lebensalters von Eisenstein (geb. 10. 4. 1823, gest. 11. 10. 1852) in Tagen mit Berücksichtigung der 8 Schaltjahre, die sich von Gauß' Hand unter dem Briefe findet, mit dem ihm Encke am 11. Okt. 1852 den Tod Eisensteins meldete:

1823	100		10585
1852	284		8
29	184		184
			10777

schreibt er an Schumacher (Briefw. G.-Sch. Nr. 1146). „Man muß hier zwei Dinge unterscheiden; ein bedeutendes Zahlengedächtniß und eigentliche Rechnungsfertigkeit. Dies sind eigentlich zwei ganz von einander unabhängige Eigenschaften, die verbunden sein können, aber es nicht immer sind. Es kann einer ein sehr starkes Zahlengedächtniß haben, ohne gut rechnen zu können, wie z. B. der Hirsch Dänemark, auch ein andrer wandernder Jude, dessen Namen ich vergessen habe. Umgekehrt kann jemand eine superiöre Rechnungsfähigkeit haben, ohne ein ungewöhnlich starkes Zahlengedächtnis. Das letztere besitzt Herr Dase ohne Zweifel in eminentem Grade; ich gestehe aber, daß ich darauf sehr wenig Werth legen kann. Rechnensfertigkeit kann nur darnach taxiert werden, ob jemand auf dem Papier ebenso viel oder mehr leistet als andere. Ob dies bei Herrn Dase der Fall ist, weiß ich nicht; nur wenn er um zwei Zahlen, jede von 100 Ziffern mit einander im Kopfe zu multipliciren 8³/₄ Stunden bedarf, so ist dies doch am Ende eine thörichte Zeitverschwendung, da ein einigermaßen geübter Rechner dasselbe auf dem Papier in viel kürzerer, in weniger als der halben Zeit würde leisten können. Als Beweis eines stupenden Zahlengedächtnisses — aber hat man denn die Richtigkeit seiner Rechnung controllirt? — ist allerdings jene Leistung etwas außerordentliches, aber psychologisch interessant würde es erst dadurch werden können, wenn man sich ein ganz adäquates Bild von dem, was dabei in seinem Geiste vorgeht, machen könnte. Schwerlich wird Herr Dase uns dazu nöthige Erklärung geben können, worüber ich aber weit entfernt sein würde, ihm einen Vorwurf zu machen“ [1]).

Schon allein aus dem großen Umfang der Rechnungen, die

---

1) Die Fertigkeit im Rechnen und die Freude, die er offenbar daran hatte (vergl. die oben S. 7, Fußnote 2 erwähnte Rechnung, vergl. Sartorius, a. a. O. S. 89), war Gauß eine ganz selbstverständliche Sache. Er äußerte zwar einmal, daß er bei sich selbst manche Erfahrungen gemacht habe, die ihm psychologisch rätselhaft wären. Er führt aber nur eine davon an, die weder für ihn besonders kennzeichnend ist, noch eigentlich auf seine Rechenfertigkeit sich bezieht (Briefw. G.-Sch. Nr. 1146). Es dürfte viel eher mit seiner astronomischen Beobachtungstätigkeit zusammenhängen, wenn er beim taktmäßigen Gehen die Schritte unbewußt bis 100 zählte und dann von neuem anfing, ganz ebenso wie er die Sekunden, dann allerdings bis 60 durchzählte, und dabei allerhand andre Beschäftigungen vornehmen, auch eine zweite von den Sekunden ganz unabhängige Zählung machen, ein Buch oder einen Brief lesen (Briefw. G.-Sch. Nr. 602), nur nicht sprechen konnte. Diese Fähigkeit haben aber bis zu einem gewissen Grade viele Astronomen.

Gauß ausgeführt hat, kann man schließen, daß er sehr schnell[1]) und sicher rechnete. Dies beruhte zu einem wesentlichen Teile darauf, daß er die zweckmäßigste Art, zu rechnen, sich in jedem Falle zurechtlegte[2]). Nicht immer war ihm das willkommen, was andre als bequem empfanden, da die Art der Gewöhnung bei ihm eine große Rolle spielte. Darauf weist eine Bemerkung, die zugleich die große Leichtigkeit, mit Brüchen umzugehen, zeigt, von der ein noch zu erwähnendes Beispiel[3]) eine Probe gibt: „Ich meinerseits rechne lieber mit den Brüchen in ihrer ursprünglichen Gestalt, wo sie nur sehr einfach sind, während man bei den Decimalbrüchen teils (nach meiner Gewöhnung) garnichts an Bequemlichkeit gewinnt, teils an Schärfe etwas aufopfert“[4]).

Noch merkwürdiger ist es, daß ihm eine entschiedene Erleichterung der Rechnung nicht die Gewöhnung an eine bestimmte Form der von ihm benutzten Tafeln aufwog: „Wie sehr die Gewohnheit oft Kleinigkeiten ein Gewicht beilegt, erläutere ich noch durch einen andern Umstand oder ein Beispiel. In den von mir (ausschließlich) gebrauchten Logarithmen der Zahlen, nämlich den Shervin'schen, steht der Proportionalteil für 37 so:

1	4	Bessel wünscht dafür die vollen Multipla	37
2	7		74
3	11		111
4	15		&
5	18	Ich lege darauf gar keinen Werth, nicht weil ich beim Interpoli-	
6	22	ren die Ziffer vernachläßigte, sondern weil ich sie ganz mechanisch	
7	26	in Gedanken (und doch ohne selbst zu denken) von selbst supplire,	
8	30	bei 7 weiß ich *von selbst*, da die letzte Ziffer 9 sein muß,	
9	33	daß 26 anstatt 25,9 steht und so bei den übrigen. Aber dieser	

Mechanismus hört auf, sobald ich ein andres Exemplar, z. B. die Calletschen brauchen soll, wo bei 5 nicht 18, sondern 19 steht. An sich hat man ebenso viel Recht 19 wie 18 zu schreiben, aber ich bin einmal an die Art gewöhnt, wo der Decimalbruch, wenn er genau 0,5 ist, weggelassen wird, ohne die vorhergehende Ziffer zu erhöhen. Anstatt 18 das 18,5 zu lesen, ist mir einmal völlig

1) Mit welcher Schnelligkeit Gauß rechnete, erhellt am besten aus seinem Journal über die Rechnungen an den Pallasstörungen, Werke Band VII, Seite 605 ff. Die ersten Elemente von Vesta erhielt er, nach der Entdeckung dieses Planeten, durch nur 10stündige Arbeit (Mon. Corr. Bd. XVI, S. 84). Vergl. Sartorius, a. a. O. S. 42.

2) „Diejenigen, die *wirklich* rechnen, finden leicht selbst, was zu ihrem Frieden dient“ (Briefw. G.-Sch. 496. 10. 10. 1835).

3) Seite 10, Anm. 2).

4) Briefw. G.-Sch. Nr. 1277. 22. 2. 50.

mechanisch, so wie bei 25,9 anstatt 26, d. i. ich werde mir der Verwandlung nicht bewußt. Aber Mechanismus hört auf, so bald ich mich, um das rechte zu treffen, erst ein kleines besinnen muß, ob ich meinen guten Shervin oder andere vor mir habe, und lediglich aus diesem Grunde brauche ich andre Exemplare nicht"[1]). Die erwähnte Abrundung einer mit 5 endenden Zahl nach unten übte Gauß nicht in allen Fällen, sondern wählte im Falle einer nachfolgenden Halbierung die gerade Zahl, da jeder gute Rechner, wo es möglich ist, solche Entscheidung entre deux foins zu vermeiden suche (Briefw. G.-Sch. Nr. 913. 21. 7. 1844)[2]).

Bisweilen wirkte Gauß auch erziehlich durch Empfehlung eines Verfahrens, das er als vorteilhaft erprobt hatte. So ist sein Vorschlag, die Additionen und Subtraktionen zweier über einander stehender Zahlen von links nach rechts vorzunehmen, in die Gewohnheit der meisten Astronomen übergegangen. „Für mich ist immer das Subtrahiren etwas bequemer, als das Addiren (beim Rechnen, auch mitunter in andern Dingen). Obgleich der Unterschied sehr gering ist, so steht er doch als Factum bei mir seit 50 Jahren fest, aber erst heute [3. 10. 1844]: da Sie sagen, daß es bei Ihnen umgekehrt sei, habe ich darüber nachgedacht, was wohl bei mir der Grund davon sein möge: Ich glaube es ist folgender. Ich bin gewohnt, wenn zwei übereinanderstehende Zahlen addirt oder subtrahirt werden sollen, immer die Summe oder die Differenz sogleich von der Linken zur Rechten niederzuschreiben[3]). Allen meinen Schülern, die sich Rechnungsfertigkeit erwerben wollten, habe ich immer gleich Anfangs empfohlen, sich daran zu gewöhnen (was in sehr kurzer Zeit geschieht) und alle ohne Ausnahme haben es mir nachher sehr Dank gewußt. Der Vortheil davon besteht darin, daß jeder, der kein Jude ist, viel geläufiger und calligraphischer von der Linken nach der Rechten schreibt als umgekehrt, und auf ein zierliches Ziffernschreiben, und daß sie immer recht ordentlich unter einander und neben einander stehen, kommt ja sehr viel an.

Cela posé, beantwortet sich obige Frage nun so: Während man Summe oder Differenz von der Linken zur Rechten schreibt,

---

1) Briefw. G.-Sch. Nr. 986. 29. 4. 1845.

2) „Die Zwischenrechnung, nemlich $\frac{5}{24}$. 1316 = 274, $\frac{3}{16}$. 60468 = 11338, $\frac{1}{8}$. 10272698 = 1284087, mache ich auf einem besonderen Papier. Statt der letzten am nächsten kommenden Zahl habe ich 1284088 deswegen gesetzt, weil sonst eine ungerade Summe kommen, und man entre deux foins keinen Grund hätte, beim Halbiren zwischen 9,7054688745 und 9,7054688746 zu wählen."

3) Vergl. A. Binet a. a. O. Seite 201, nach dem auch Inaudi ebenso verfuhr.

muß man immer zugleich die folgenden Ziffern berücksichtigen, die beim Addiren nöthig machen können, eine um 1 größere, beim Subtrahiren eine, um 1 kleinere Zahl zu schreiben. Diese Berücksichtigung wird nun zwar bald so mechanisch, daß man garnicht daran denkt, immer aber bleibt sie beim Subtrahiren ein klein wenig einfacher, als beim Addiren: z. B. wird addirt
387 . . .
218 . . . so kann die Summe sein 605 oder 606;
wird subtrahirt, so kann die Differenz sein 169 oder 168; allein die Entscheidung hängt beim Subtrahiren nur von Gleichheit oder Ungleichheit der übereinanderstehenden folgenden Ziffern ab, beim Addiren aber ob Summe der übereinanderstehenden die 9 überschreitet, und das erstere ist einfacher, als das andere. Mit Worten ausgedrückt, würde die ratio decidendi sein:

Beim Subtrahiren: Wenn (von der betreffenden Stelle nach der Rechten fortschreitend, und die übereinanderstehenden Ziffern immer als ein Paar bildend, betrachtet) — das erste ungleiche Paar die größere Ziffer $\left\{\begin{matrix}\text{oben}\\ \text{unten}\end{matrix}\right\}$ hat, tritt $\left\{\begin{matrix}\text{keine}\\ \text{eine}\end{matrix}\right\}$ Veränderung um eine Einheit ein.

Beim Addiren, wenn das erste Paar, welches eine von 9 verschiedene Summe gibt, diese Summe $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ ist als 9, tritt $\left\{\begin{matrix}\text{eine}\\ \text{keine}\end{matrix}\right\}$ Vergrößerung um eine Einheit ein“ [1]).

Diese Briefstellen zeigen auch, daß Gauß trotz der Schnelligkeit, mit der er rechnete, große Sorgfalt auf die Anordnung der Rechnung und auf die Schrift der Zahlen verwandte, die er sehr klar und deutlich, offenbar auch niemals hastig niederschrieb. Er legte Wert darauf, daß man auf dem Papier alles präzis und genügend vorfinde, was zu wissen nötig ist (Briefw. G.-Sch. Nr. 879). Dagegen durfte das Rechenblatt nicht mit überflüssigen Nebenrechnungen belastet sein, damit der wesentliche Kern im möglich kleinsten Raume und in der übersichtlichsten Form vorliege (Briefw. G.-Sch. Nr. 913, Werke Band IV, S. 312). Im Gauß-Schumacherschen Briefwechsel findet sich ein Beispiel (Berechnung von Länge, Breite, Meridianrichtung aus den Koordinaten eines Punktes) einmal in Delambrescher Breite [2]), ein zweites Mal als konzise Musterrechnung.

1) Briefwechsel G.-Sch. Nr. 932. 3. 10. 1844.

2) Briefw. G.-Sch. Nr. 378. 18. 4. 1830 und Werke Band IX, Seite 211, 212. Gauß schreibt an einer andern Stelle (Briefw. G.-Sch. Nr. 953. 18. 11. 1844):

Bei den Nebenrechnungen kam ihm seine Fähigkeit, vieles im Kopfe zu rechnen, sehr zu statten. „Ich kann" sagt er, „sehr gut mit einer durch Addition, Subtraktion, Halbirung, Duplizirung entstandenen Zahl, ohne sie selbst vor mir zu haben, sogleich in eine Tafel eingehen; aber ich würde mich leicht verrechnen, wenn ich mit der Zahl, die ich nicht vor mir habe, erst noch eine Operation im Kopf vornehmen und mit dem Resultat, ohne es aufzuschreiben, eingehen soll, wenigstens würde mich dies sehr fatiguiren .... Hat man statt [des] log dessen Komplement wirklich schon vor sich, so geht es übrigens allerdings sehr bequem, im Kopfe Addiren und Halbiren zugleich zu machen"[1]). Vielfach führte aber Gauß kleine Rechnungen auch auf Nebenblättern aus[2]).

Wie bei seinen eigenen Rechnungen, so verlangte Gauß auch von den Tafeln, die er benutzte, vor allem eine übersichtliche Anordnung. Deshalb störte ihn auch hier alles unnötige Beiwerk. Er wünschte in den trigonometrischen Tafeln nur die Logarithmen der Sinus, Kosinus, Tangenten und Kotangenten von Sekunde zu Sekunde (Briefw. G.-Sch. Nr. 973). Alles sollte sich ihm so bequem und rein, wie möglich, darbieten. Alles übrige hatte für ihn keinen Wert. Die Proportionalteile wollte er entbehren, obgleich er nicht unbedingt dagegen war. Dagegen war es ihm nur störend, wenn die Verwandlung von Bogen in Zeit angegeben war, die er gewissermaßen à vue im Kopfe ausführte. Auch andre Tafeln, wie die Verwandlung der Kompaßstriche, erschienen ihm höchst überflüssig und deshalb unerwünscht, weil sie das Tafelwerk umfangreicher machten, als nötig war. Kleinigkeiten, wie die Andeutung, daß die letzte der in der Tafel nicht wiederholten Ziffern erhöht werden soll, durch einen Stern oder Rhombus war ihm eher störend, als förderlich. Jedenfalls kam es ihm darauf an, daß in einer neuen Tafel dieselbe Bezeichnung angewandt war, an die er sich gewöhnt hatte, z. B. daß eine regelmäßige Abtei-

---

„Die Bedingung, daß die Preisbewerber (einer den Kometen von 1585 betreffenden Preisfrage) die Rechnungen in angemessenem Detail geben, halte ich für nothwendig, nicht einen ekelhaft Delambre-schen Detail, wo jeder einzelne Logarithmus aufbewahrt wird, aber doch so, daß man an jeder beliebigen Stelle, ohne gar zu viele Mühe, nachzurechnen im Stande sei".

1) Briefw. G.-O. Nr. 289. 7. 1. 1815.

2) Daß Gauß kleine Rechnungen vielfach ausführte, ohne sie aufzubewahren, geht auch daraus hervor, daß ihm eine aus Porzellan oder Biscuit hergestellte Tafel, die ihm Schumacher empfohlen hatte, sehr angenehm für Nebenrechnungen war. Er schreibt darüber: „Die Rechentafeln haben mir bei meinen jetzigen Rechnungen über die im vorigen Jahre im Bremischen gemachten Messungen nützliche Dienste geleistet" (Briefw. G.-Sch. Nr. 692. 25. 4. 1840).

lung von 5 zu 5 Zeilen durch horizontale Striche vorgesehen war (Briefw. G.-Sch. Nr. 161). Jede kleine Abweichung, z. B. wenn 15° 02′ statt 15° 2′ da stand, war nicht nach seinem Geschmack, wenn er auch anerkannte, daß diese oder jene Einrichtung für einen andern Rechner bequemer sein konnte. Gauß hat sich über diese Dinge ausführlich bei Besprechung von verschiedenen Tafeln geäußert [1]).

Es ist natürlich, daß sich auch in den Rechnungen von Gauß trotz seiner Sicherheit im Rechnen Fehler gefunden haben. Doch sind gröbere Fehler oder Versehen sehr selten. Zu den ersteren gehört ein von Schlesinger bemerkter Subtraktionsfehler Werke Band X 1, Seite 427. Er hat, um einen Fall letzterer Art zu erwähnen, versehentlich mit einem andern Wert der Abplattung der Erde statt des von Walbeck angegebenen längere Zeit gerechnet [2]). Man findet die Abweichungen in den Zahlenrechnungen der Theoria motus in Werke, Band VII, Seite 281 ff. ausführlich von Brendel angegeben, ebenso sind in Band IX von Krüger überall die Abweichungen in den Bemerkungen aufgeführt und in den Rentenrechnungen Werke Band IV, S. 188 Unrichtigkeiten von Schering bemerkt worden. Auch im Breitenunterschied sind bereits zu Gauß' Lebzeiten einige Versehen entdeckt worden [3]).

Die meisten Fehler betreffen die letzten Stellen. Ein Teil von ihnen wird Gauß nicht zur Last gelegt werden dürfen, da die Logarithmentafeln selbst nicht immer genau waren [4]). Andrerseits hat Gauß oft mit einer größeren Stellenzahl als notwendig war, gerechnet [5]), wobei ihm die Mitführung einiger Ziffern weniger Unbequemlichkeit als die Abrundung gemacht zu haben scheint.

---

1) Vergl. Werke, Band III, Seite 231—264 und Band VIII, Seite 121.

2) Vergl. Werke, Band IX, Seite 71. Briefw. G.-O. Nr. 448 und 609.

3) Vergl. Briefw. G.-Sch. Nr. 362 und 381. Werke, Band IX, Seite 63.

4) Vergl. Werke, Band VII, Seite 281, Theoria motus Art. 30, 31. Briefw. G.-Sch. Nr. 986.

5) Die Elemente der Theorie des Erdmagnetismus (Werke Band V, S. 150 ff.) wurden genau so angesetzt, wie die Rechnung sie gegeben hat, ohne die Dezimalbrüche wegzulassen. Gauß fügt hinzu: „Für jeden Rechnungskundigen ist die Bemerkung überflüssig, daß diese Bruchteile an sich keinen Wert haben, da wir noch weit davon entfernt sind, nur die ganzen Einer mit Zuverlässigkeit ausmitteln zu können: allein es ist von Wichtigkeit, daß die Beobachtungen mit einem und demselben System von Elementen scharf verglichen werden, und da war kein Grund vorhanden, an dem, was die Rechnung ergeben hatte, etwas zu verändern, weil durch Weglassung der Dezimalbrüche für die Bequemlichkeit der Vergleichsrechnungen gar nichts gewonnen worden sein würde“.

Dies steht nur scheinbar im Widerspruch mit dem von Hammer (Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Stuttgart 1907 S. 603) erwähnten

Weniger über das Vorkommen von Fehlern, als vielmehr über die Seltenheit von wesentlichen Unrichtigkeiten ist man erstaunt, wenn man aus den handschriftlichen Aufzeichnungen den Eindruck gewonnen hat, daß Gauß wohl fast niemals Kontrollen angewendet, auch kaum eine Rechnung durch Wiederholung geprüft hat. Nur selten findet man korrigierte Zahlen, noch seltener durchstrichene Rechnungen. Wenn er eine Rechnung auf verschiedene Weise geführt hat, so hatte er nicht, wenigstens nicht in erster Linie den Wunsch, das Ergebnis zu sichern, sondern andre Wege auszuprobieren und er hatte offenbar Freude daran, auch bei kleinen Aufgaben sein Erfindertalent zur Geltung zu bringen. Das blos mechanische Rechnen machte ihm zwar keine Anstrengung, aber nahm doch sein Interesse wenig in Anspruch[1]. Dadurch lassen sich auch die oft auf den Rechenblättern zerstreuten Bemerkungen erklären, die häufig mathematische Entwicklungen ganz fern liegender Art enthalten, oder auch ganz andre Dinge betreffen.

In weitgehender Weise hat sich Gauß die Arbeiten durch Tafeln erleichtert, die er selbst berechnete, und bei deren Anlage und Anordnung sich ebenfalls eine besondere Begabung offenbarte. Da in solchen Tafeln, die nur bei völliger Korrektheit ihren Zweck erreichen, eine nicht geringe Arbeit steckt, dürfen sie gleichfalls als Beweis der Sicherheit und Schnelligkeit gelten, mit der Gauß rechnete.

Als die bekanntesten und verbreitetsten können die Tafeln der Gaußschen Additions- und Subtraktionslogarithmen angesehen werden. Gauß hat sie als „Tafel zur bequemern Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweyer Größen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind“ in Zachs Monatlicher Correspondenz Band 26, 1812, S. 498—528 zuerst veröffentlicht, von wo sie dann zunächst in Prasses fünfstellige Logarithmentafeln (neu bearbeitet von Mollweide, Leipzig 1825) und später in sehr viele andre Tafelwerke übergingen[2].

Hinweis von Gauß, daß sich der Mangel an mathematischer Bildung durch nichts so auffallend dokumentiere, wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.

1) Gauß schreibt am 6. Juli 1802: „Ich sehne mich selbst recht nach einer solchen für den Geist interessanteren Arbeit und freue mich darauf als auf eine Erholung von den bisherigen Zahlenrechnungen, die, wenn man sich den Weg, den man nehmen will, einmal vorgezeichnet hat, eigentlich bloß eine mechanische Beschäftigung sind“ (Briefw. G.-O. Nr. 32) und am 10. Mai 1805: „Das gar zu viele mechanische todte Rechnen, was ich dabei [bei einer Methode die Ceres-Störungen zu berechnen] vor mir sah, hat mich abgeschreckt“ (Briefw. G.-O. Nr. 130).

2) Gauß schreibt darüber: „Meine Tafel für Logarithmen von Summen etc., die mir schon so vielen Nutzen geschafft hat und noch täglich schafft, ist von

Ein Gegenstück zu den Additionslogarithmen ist eine Tafel für den Unterschied der Summe und Differenz zweier Zahlen, die nur durch ihre Logarithmen gegeben sind, die ein Schüler von Gauß, v. Weidenbach, auf seine Veranlassung berechnet hat. Sie ist dem 7. Bande der Astronomischen Nachrichten 1829 (zu S. 384) beigefügt und absolut komplett, da die Relation zwischen Argument und Tafelwert gegenseitig ist [1]). Die Tafel ist mit einem Vorwort von Gauß eingeleitet, das wir als Anhang folgen lassen [2]).

Außer diesen zur allgemeinen Verwendung bestimmten Tafeln hat Gauß noch sehr viele Tafeln für besondere Zwecke berechnet.

Der Theoria motus hat er drei umfangreiche Tafeln beigefügt, von denen die erste, die für Kometenbahnen, deren Exzentrizität

---

mehreren Personen auf 7 Decimalen und den zehnfachen Umfang erweitert. Einmal von dem Senator Mathisson in Altona, dann von Werner. Letztere läßt Zach, wie mir Lindenau erzählte, zugleich mit einer neuen Ausgabe der gewöhnlichen Logarithmen drucken" (Briefw. G.-O. Nr. 289. 7. 1. 1815).

Gauß hat den Gedanken, solche Tafeln zu berechnen, bereits in einer Schrift von Leonelli (1806) vorgefunden, die er in der allgemeinen Literaturzeitung 1808 besprochen hat (Werke, Band VIII, Seite 121—127. Über ältere Versuche, das Logarithmieren von Summen und Differenzen zu vereinfachen, vergl. Wieleitner, Geschichte der Mathematik, Leipzig 1911. Sammlung Schubert LXIII Seite 10). Dabei hat er an den Vorschlägen von Leonelli zur wirklichen Ausführung einer solchen Tafel scharfe Kritik geübt. Die Tafel von Gauß bestand aus 3 Spalten, die den Werten $A = \log m$, $B = \log(1 + 1/m)$, $C = \log(1 + m)$ entsprechen, die auch als die doppelten Logarithmen der Tangenten, Kosekanten und Sekanten der Winkel von 45° bis 90° betrachtet werden können. Gauß bemerkt jedoch in dem erwähnten Briefe an Olbers (a. a. O. Nr. 289): „Wenn man statt derselben die Sinustafeln anwendet, so hat man 1. bei gleicher Anzahl von Decimalen nur die halbe Genauigkeit meiner Tafel, 2. eine Division mit 2, die dazu zwingt, wenigstens das Argument $\log b/a$, wirklich hinzuschreiben, was ich bei meiner Tafel niemals thue".

1) Vergl. Briefw. G.-Sch. Nr. 359. 4. 3. 1829.

2) Diese beiden Tafeln von Gauß und v. Weidenbach, ferner die Werke Band IX, Seite 456 abgedruckten sind auch in Jerome de La Landes logarithmisch-trigonometrische Tafeln, herausgegeben (und Herrn Hofrath Gauß aus innigster Verehrung gewidmet) von H. G. Köhler, Leipzig 1832, aufgenommen, letztere unter dem Titel: Des Herrn Hofrath Gauß Hülfstafel zum Höhenmessen mit dem Barometer (mit Gebrauchsanweisung und 2 Beispielen).

Ferner enthält die von Warnstorff besorgte zweite Auflage von Schumachers Sammlung von Hülfstafeln (Altona 1845) außer den Grundformeln und Differentialgleichungen der sphärischen Trigonometrie und der Interpolationsmethode für halbe Intervalle des Argumentes eine Tafel zur Verwandlung von Stundenwinkel und Deklination in Azimut und Höhe und die eben genannten Tafeln, um Höhenunterschiede aus Barometerbeobachtungen zu bestimmen, nach den Angaben von Gauß, worüber der Briefwechsel G.-Sch. Nr. 919—932 Aufschluß gibt. Vergl. den Aufsatz von Stäckel: Gauß als Geometer.

nur wenig von der Einheit abweicht, den Übergang von der wahren auf die mittlere Anomalie vermittelt, auch jetzt noch Verwendung findet[1]). Die zweite und dritte Tafel[2]) dienen zur Ermittlung des Verhältnisses vom Sektor zum Dreieck.

Umfangreiche Tafeln zur parabolischen Bewegung sind dann noch im Nachlaß aufgefunden, über deren Verwendung Gauß an Encke 1815 Mitteilungen gemacht hat[3]).

Auch für das geplante Werk über die Grundlagen der Triangulation von Hannover hatte Gauß eine Anzahl von Tafeln in Aussicht genommen, über deren Anordnung die im Nachlaß veröffentlichten einen Anhalt geben können, von denen etwa ein Dutzend in Werke, Band IX enthalten sind. In den Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie hat Gauß selbst Tafeln veröffentlicht. Der ersten Abhandlung ist eine Tafel für die Übertragung vom Sphäroid auf die Kugel angehängt[4]). Der zweiten Abhandlung folgt eine Tafel, die bei der Übertragung von Breite, Länge und Azimut (beziehungsweise der umgekehrten Aufgabe) für eine Breitenzone von drei Grad die von der Breite abhängigen Hilfsgrößen mit Bessels Abplattung gerechnet enthält[5]).

Wie man aus Band IX der Werke ersieht (S. 82 und 84) haben die Formeln und Tafeln erst allmählich die in der Abhandlung ihnen gegebene Gestalt angenommen. Von den übrigen geodätischen Tafeln seien nur noch die häufig gebrauchten für $\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$ hervorgehoben (Bd. IX, S. 77, $\log 1/\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$ S. 139, $\log 1/(1-e^2\sin^2\varphi)$ S. 160). Alle diese Tafeln sind im Wesentlichen auf das Gebiet der hannoverschen Gradmessung beschränkt, so daß sie zunächst nur für die eigenen Zwecke von Gauß bestimmt waren.

Tafeln zur Theorie des Erdmagnetismus, welche sowohl die von 5 zu 5° Breite und von 10 zu 10° Länge berechneten Werte von $\frac{V}{R}$, X, Y, Z, als auch die Deklination, Inklination, die ganze und die horizontale Intensität enthalten, sind mit Karten zusammen unter dem Titel: Atlas des Erdmagnetismus nach den Elementen der Theorie entworfen als Supplement zu den Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, unter Mitwirkung von

1) Bauschinger hat in seinen Tafeln zur theoretischen Astronomie die Gaußsche Tafel mit einer geringen Modifikation aufgenommen, während allerdings v. Oppolzer das Verfahren ganz umgestaltet hat.

2) Vergl. Werke, Band VII, Seite 300. Berliner astronom. Jahrb. für 1814. S. 256.

3) Werke, Band VII, Seite 357 ff. und Seite 368. Vergl. Briefw. G.-O. Nr. 299. 29. 5. 1815.

4) Werke, Band IV, Seite 291 ff.

5) Werke, Band IV, Seite 335 ff.

C. W. B. Goldschmidt, von Carl Friedrich Gauß und Wilhelm Weber in Leipzig 1840 herausgegeben. (Vergl. Werke, Band V S. 150 ff.).

Eine vollständige Aufzählung aller, zumal der nur brieflich erwähnten Tafeln würde einen großen Raum beanspruchen, doch seien noch die Tafeln zur Bestimmung des Zeitwertes von einfachen Leibrenten und von Verbindungsrenten (Werke, Band IV, S. 173—183) genannt.

Wie Gauß bei den von ihm entworfenen und von ihm benutzten Tafeln einen großen Wert auf die Anordnung legte und bei letzteren sich an eine bestimmte Form gewöhnt hatte, so war dies auch bei der Aufstellung der Formeln der Fall. Hierdurch und durch eine sorgfältig durchdachte Bezeichnungsweise[1]) vermied er unnötige Überlegungen bei der Anwendung der Formeln. Er schrieb die Formeln in einer bestimmten Reihenfolge, wie dies z. B. bei den nach ihm benannten Gleichungen, die in der Theoria motus art. 34 und etwas verändert in Werke Bd. IV, S. 405 stehen, ersichtlich ist[2]). Dieselbe Bemerkung macht man bei der Vergleichung der Formeln der sphärischen Trigonometrie, bei denen die Reihenfolge der Funktionen und Buchstaben sich ihm wie ein musikalischer Klang eingeprägt haben mochte[3]). Auch hierbei hat

1) Gauß schreibt an Encke (Briefw. G.-E. Nr. 30. 9. 7. 1826): „Was mir bei dieser Ansarbeitung [Supplementum theoriae combinationis observationum] vorzüglich viel Plage macht, ist die Wahl der Bezeichnungen. Ihnen ist es nicht unbekannt, daß ich bei allen meinen Arbeiten darauf immer große Sorgfalt gewandt habe, gewöhnlich viel größere, als man nachher der Arbeit ansieht. Wenn das griechische Alphabet durchweg dem lateinischen correspondirte und die großen griechischen Buchstaben dann auch durchweg von den lateinischen verschieden wären, würde man den Zweck der größten elegantesten Übersichtlichkeit viel leichter erreichen. Das deutsche Alphabet ist mir immer nur ein Notbehelf, zu dem ich mich ungern entschließe, und ebensowenig mag ich die oben und unten zugleich accentuirten Buchstaben leiden. In dem gegenwärtigen Fall vergrößert sich die Schwierigkeit durch einen Nebenumstand. Nemlich fast alle Relationen in der 2ten Behandlung haben eine bewundernswürdige Analogie zu denen der ersten [theoria comb.], so daß sich analytisch betrachtet, fast ganz dieselben Gleichungen ergeben, obwohl hier die darin vorkommenden Größen etwas ganz andres bedeuten. Aber hin und wieder reichen die Alphabete nicht aus, immer eine symmetrische Bezeichnung zu gewinnen".

2) Aus einer dieser (von Delambre unabhängig aufgestellten) Gleichungen findet man die andern durch die mechanische Regel, daß man die Vorzeichen auf der einen Seite, die Funktionen auf der andern Seite wechselt, so lange es geht.

3) Vergl. Werke, Band VIII, Seite 290 und Briefw. G.-Sch. Nr. 930, wo er noch hinzufügt: „Wenn ich sage, daß ich diese Form für die beste halte, so meine ich damit nicht, daß andere Stellungen, die unwesentlich davon abweichen, nicht völlig eben so gut sind.

er auf seine Nachfolger einen Einfluß ausgeübt, den man unschwer bei Encke, Schreiber, Brünnow u. a. herausfindet.

Wollte man die rechnerische Begabung von Gauß in ihrem vollen Umfange würdigen, so dürfte man nicht seine Rechnungen mit Buchstabengrößen und insbesondere seine große Gewandtheit in der Entwicklung von Reihen übersehen, bei denen die oft komplizierten Zahlenkoeffizienten eine wichtige Rolle spielen. Während hierbei aber die Darstellung der mathematischen Methoden in den Vordergrund treten müßte, sind bei der Würdigung des praktischen Rechners doch einige Hinweise auf die besondern Verfahrungsweisen und Kunstgriffe geboten, die Gauß nur allein im Hinblick auf die numerische Berechnung ausgebildet hat. Hierbei ist es bewundernswert, wie mit mathematischer Zierlichkeit, um einen von Gauß selbst oft angewandten Ausdruck zu benutzen, und treffenden Bezeichnungen die unmittelbare Verwendbarkeit für die Zahlenrechnung oder für die logarithmische Rechnung vereinigt sind.

Durch die Gewohnheit des Gebrauchs abgestumpft würdigt man wohl kaum vollkommen die musterhafte Anordnung des Gaußschen Algorithmus bei der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, und die vorteilhaften Bezeichnungen, wie sie in der Disquisitio de elementis Palladis zuerst angegeben sind und die sich dem Gedächtnis mühelos einprägen.

Ein Punkt, auf den Gauß in seinen Vorlesungen großes Gewicht zu legen pflegte, betrifft die Einführung von Näherungswerten für die gesuchten Größen. Hierdurch wird z. B. in der Ausgleichungsrechnung die Beschränkung auf eine geringere Stellenzahl in den Koeffizienten der Normalgleichungen und bei der Auflösung erreicht.

Bei vielen Aufgaben empfiehlt Gauß ein Verfahren allmählicher Annäherung, wenn eine direkte Methode zu weitläufig oder überhaupt nicht möglich ist. Dieses Verfahren hat die bekannteste Anwendung bei der Auflösung des Keplerschen Problems gefunden (Theoria motus art. 11, Werke, Band VII, S. 23). Zugleich ist dabei ein auch sonst von Gauß geübtes Bestreben bemerkenswert, die Beachtung der Vorzeichen (in diesem Falle bei den Verbesserungen des Näherungswertes) durch eine mechanische Regel zu erleichtern. Zu den approximativen Methoden gehört auch die indirekte Auflösung der Normalgleichungen, auf die Gauß in seinen Vorlesungen über die Methode der kleinsten Quadrate besonders hinzuweisen pflegte[1]), und von der ein Beispiel in Werke, Band IX, S. 265

1) Siehe: R. Dedekind, Gauß in seiner Vorlesung über die Methode der

gegeben ist. Ferner berührt sich mit diesen Gedankengängen die abwechselnde Auflösung der Winkel- und Seiten-Bedingungsgleichungen bei Ausgleichungen von Dreiecksnetzen, wobei aber die Umgestaltung der Gleichungen der zweiten Art wesentlich zur Erzielung einer rascheren Konvergenz beiträgt[1]).

Für die Ermittlung von u aus der Gleichung $g' \sin(G' + u) = g'' \sin(G'' + u)$ hat Gauß ebenfalls einen indirekten Weg gezeigt, obwohl er zwei elegante direkte Lösungen angegeben hat. Er benutzt dabei wieder wie beim Keplerschen Problem die logarithmischen Inkremente zur Verbesserung des Näherungswertes.

Die Aufgabe der ebenen Trigonometrie, aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die andern Stücke des Dreiecks zu berechnen, hat Gauß öfter beschäftigt. Die erwähnte Weidenbachsche Tafel wird hierbei mit Nutzen angewendet, wenn die Lösung auf die Form gebracht wird:

$$\frac{a+b}{a-b} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C = \operatorname{tang} (B + \tfrac{1}{2} C).$$

Auch eine andre Art, die genannte Dreiecksaufgabe zu lösen, ist auf Gauß zurückzuführen, indem sie durchaus den Stempel seines Geistes trägt[2]): Hat man nämlich etwa mit fünfstelligen Logarithmen Näherungswerte der Winkel A und B auf die obige Art gefunden (Gauß stand nur die 5stellige Weidenbachsche Tafel für $\log \frac{1+x}{1-x}$ zur Verfügung), so wird die Winkelsumme $A + B + C$ auf ihren theoretischen Betrag (180^0 bezw. $180^0 +$ Exzeß) genau abgestimmt. Der Widerspruch, der sich bei strenger Rechnung nach dem Sinussatz zwischen den gegebenen Seiten ergibt, wird den logarithmischen Sinusdifferenzen proportional verteilt und man findet damit die Verbesserungen, die an die beiden Näherungswerte für A und B angebracht werden müssen, um ihre richtigen Werte der angewandten Stellenzahl entsprechend zu erhalten.

Der praktische Sinn von Gauß zeigt sich in einer Anzahl von Rechnungsvorschriften, von denen hier einige Erwähnung finden mögen[3]). Bei der Interpolation in die Mitte teilt er Schumacher

kleinsten Quadrate, Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Berlin 1901, Seite 45—59.

1) Vergl. L. Krüger, Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen. Potsdam 1905.

2) Gerling hat diese Auflösung als von Gauß herrührend an O. Börsch mitgeteilt, wie L. Krüger von diesem erfahren hat.

3) Hier könnte auch auf die Vorschriften zur Berechnung der Ceres- und Pallas-Störungen hingewiesen werden, die in Werke Band VII enthalten sind, die

Briefw. G.-Sch. 913, 21. 7. 1844) ein Schema mit, nach dem die Interpolation zu machen sei. In Bezug auf die gleichzeitig mitgeteilte Formel bemerkt er: „Es versteht sich, daß die Zeichen der betreffenden Größen gehörig beachtet werden müssen: ich habe zwar einen Kunstgriff, die Aufmerksamkeit darauf zu ersparen". Man kann vermuten, daß er bei dieser Bemerkung die von Encke (Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen Berlin, 1888, Band 1, Seite 17) erwähnte Vorschrift gemeint hat, wie er auch wohl die von Encke benutzte „Strichregel" gefunden haben dürfte [1]). (Vergl. Bruns, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens, Leipzig 1903, Leipzig 1903, Seite 46.)

Eine sehr leistungsfähige Interpolationsformel für Logarithmen, deren Verwendung bei Tafeln mit hoher Stellenzahl in Betracht kommt, findet man in Werke, Band VII, Seite 369. Es wird hier ähnlich, wie bei der Musterrechnung, um p und P aus $A = p \cos P$, $B = p \sin P$ zu finden [2]) (Werke, Band VIII, Seite 130), das geo-

---

aber vielfach von M. Brendel für eine zusammenhängende Darstellung ergänzt werden mußten.

1) Daß der Inhalt von Enckes Abhandlungen über Interpolation (Gesammelte Abhandlungen, Seite 1), über mechanische Quadratur (ebenda, Seite 21) und über die Berechnung der speciellen Störungen (Berliner astronomisches Jahrbuch für 1837 und für 1838) auf Vorträgen von Gauß aus den Jahren 1811 und 1812 beruht, geht aus Briefen von Encke an Gauß hervor. Über die Grundlagen, die Encke hierbei benützte, schreibt er aus Berlin den 28. März 1826 an Gauß (Briefw. G.-E. Nr. 50; C. Bruhns, Johann Franz Encke. Sein Leben und Wirken. Leipzig 1869. Seite 20): „Obgleich ich damals leider fast in allen Punkten sehr zurück war und besonders eine klare Vorstellung von der Differential- und Integralrechnung mir abging, so ersetzte doch mein sehr gutes Gedächtniss etwas diesen Mangel. Sobald die Vorlesung geschlossen war, eilte ich nach Hause und warf mit Hülfe Ihrer Formeln, die Sie mir auf einem besondern Zettel stündlich aufschrieben, den Gang Ihrer Vorträge flüchtig auf das Papier. Der Abend ward dann angewandt, um diese rohen Entwürfe so vollständig als es gehen wollte, auszuarbeiten und auf diese Weise entstand, wenn auch mit manchen Lücken, ein Heft, was indessen von dem Gepräge Ihres Geistes nur zu weit sich entfernte. Demungeachtet ist dieses Heft in Verbindung mit Ihren einzelnen eigenhändigen Papieren, die ich in der genauen Ordnung mir zusammengestellt habe, fast einzig das leitende Buch mir geblieben, und ich wüßte selten eine etwas allgemeinere Untersuchung, wo es mir nicht genügenden Aufschluß verschafft hätte. Noch jetzt wird es immer mehr vervollständigt, jemehr es mir gelingt, aus einzelnen Andeutungen den wahren Sinn Ihrer Behandlung mir deutlich zu machen".

2) Gauß schrieb immer zuerst den Kosinus, dann den Sinus, bei logarithmischer Rechnung subtrahierte er dann die obere von der unteren Zahl, um den Tangens zu erhalten. Hatte er aus $p \cos P = A$, $p \sin P = B$ auf diese Weise P gefunden, so ging er von $\log \tan P$ auf $\log \sin$ oder $\log \cos$ über, und zwar zu dem größeren, in der Tafel rechts stehenden Logarithmus, um p zu berechnen.

metrische Mittel aus der gegebenen und der gesuchten Zahl eingeführt, wobei Gauß wahrscheinlich sich dem gesuchten Werte durch Wiederholung der Rechnung näherte.

Nicht eigentlich in den Bereich der Kunstgriffe, sondern mehr in das mathematische Gebiet gehören die Vorschriften, um den Logarithmus Sinus eines kleinen Bogens zu finden, die aus dem Nachlaß in Band VII, Seite 299 und Band VIII, Seite 128 abgedruckt sind [1]). Sie verdienen aber deshalb hier eine Erwähnung, weil die Rechnung mit den eingeführten Hilfsgrößen sich durch sehr schnelle Konvergenz auszeichnet.

F. Klein hat in den Vorbemerkungen zum Gaußischen Tagebuch (Werke, Band X 1, Seite 486) die Eigenart des mathematischen Genius von Gauß hervorgehoben: „induktiv an der Hand von Zahlenrechnungen die Resultate zu finden, um hinterher langsam, in härtester Arbeit, die Beweise zu zwingen“.

Auf ein Beispiel, das diesen Weg seines hell blickenden Erfindungsgeistes, durch Zahlenrechnungen mathematische Tatsachen aufzuspüren, besonders überraschend zeigt, weist die Tagebuchbemerkung Nr. 63 vom 29. März 1797 (Werke, Band X 1, Seite 517) hin. Bei seinen ersten Untersuchungen über lemniskatische Funktionen gelang es Gauß, durch zahlenmäßige Ausrechnung besonderer Werte von sin lemn und cos lemn die zwischen Lemniskatenlänge und Kreisumfang bestehende Beziehung aufzustellen, die er nach der Aufzeichnung Nr. 92 des Tagebuchs (Werke, Band X 1, Seite 535) erst im Juli 1808 beweisen konnte. Man darf vermuten, daß allein der Anblick der Zahl 4,81048 (= $N\varpi$ Werke, Band X 1, Seite 158) ihn darauf führte, daß ihr natürlicher Logarithmus mit $\frac{\pi}{2}$ übereinstimmt.

Ebenso bewundernswert ist es, wenn Gauß die Exponentialform der Koeffizienten einer (Werke, Band X 1, Seite 203 angegebenen) nach den Kosinus der Vielfachen eines Winkels φ fortschreitenden Reihe aus ihren Zahlenwerten errät und 1, $e^{-\frac{1}{2}\pi}$, $e^{-2\pi}$, $e^{-\frac{9}{2}\pi}$, $e^{-8\pi}$, $e^{-\frac{25}{2}\pi}$, $e^{-18\pi}$ ... dafür findet. Auf ein Beispiel der Verschmelzung numerischer Rechnungen mit zahlentheoretischen Unter-

1) S. a. G. Witt Über Näherungsdarstellungen von Funktionen. Astron. Nachr. Bd. **202**, 1916, 217—226.

suchungen weisen die Erläuterungen zur Tagebuchbemerkung 112 hin (Werke, Band X 1, S. 551), wozu Werke, Band III S. 426 ff. zu vergleichen ist.

Verzeichnis der bei den Anführungen benützten Abkürzungen.

Briefwechsel G.-Sch. bezeichnet den Briefwechsel zwischen Gauß und Schumacher. Herausgegeben von C. A. F. Peters. Altona 1860—1865.
Band I: Nr. 1—237,
„ II: „ 238—510 und 226 a,
„ III: „ 511—729,
„ IV: „ 730—986,
„ V: „ 987—1237,
„ VI: „ 1238—1319.

Briefwechsel G.-O. zwischen Gauß und Olbers in W. Olbers, sein Leben und seine Werke, herausgegeben von C. Schilling. Berlin, 1894—1909.
Band II. 1. Abteilung: Nr. 1—380.
„ „ 2. „ : „ 381—767.

Briefwechsel G.-B. zwischen Gauß und Bessel. Herausgegeben auf Veranlassung der Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften. Leipzig 1880.

Briefw. G.-G. zwischen Gauß und Gerling ist nicht veröffentlicht.

Briefw. G.-E. zwischen Gauß und Encke, ebenfalls nicht veröffentlicht.

Die Nummerierung bezieht sich überall auf die fortlaufenden Nummern (nicht auf die noch hinzugefügten der von Gauß allein verfaßten Briefe).

Anhang.

Vorwort von Herrn Hofrath Gauß zu der „Tafel um den Logarithmen von $\frac{x+1}{x-1}$ zu finden, wenn der Logarithme von x gegeben ist, von Herrn v. Weidenbach berechnet. Für die astronomischen Nachrichten [7, 1829, zu S. 384]. Copenhagen, 1829".

Gegenwärtige Tafel ist das Seitenstück zu der zuerst im Jahr 1812 bekannt gemachten und seitdem oft wieder abgedruckten Tafel für die Logarithmen von Summen und Differenzen, und von einer fast ebenso häufigen Brauchbarkeit. Der Zusammenhang der beiden Columnen ist der, daß, wenn die eine den Logarithmen von x darstellt, die andere den Logarithmen von $\frac{x+1}{x-1}$ giebt. Diese Beziehung ist eine gegenseitige, und daher die Tafel absolut vollständig, indem man jeden positiven Logarithmen entweder in der einen oder andern Columne antrifft. Anstatt die Argumente mit 0,382 anfangen zu lassen, hätte man sie auch von 0 anfangen und

mit 0,383 schließen lassen können; die Tafel würde dann aber nicht so bequem für den Gebrauch ausgefallen sein.

Die Tafel ist von Hrn. v. Weidenbach ursprünglich auf sieben Decimalen berechnet, um die fünfte auf eine halbe Einheit verbürgen zu können; in den Fällen, wo zu der Entscheidung selbst sieben Ziffern noch nicht zureichten, sind sogar noch mehrere zugezogen.

Man sieht leicht, daß eine Hauptanwendung der Tafel bei der so häufig vorkommenden Aufgabe Statt findet, wo zwei unbekannte Größen p, P durch zwei Gleichungen

$$p\cos(P+A) = a$$
$$p\cos(P+B) = b$$

oder

$$p\sin(P+A) = a$$
$$p\sin(P+B) = b$$

oder

$$a\cos(P+A) = b\cos(P+B) = p$$

oder

$$a\sin(P+a) = b\sin(P+B) = p$$

bestimmt werden sollen. Es gehört dahin der Fall der ebenen Trigonometrie, wo aus zwei Seiten eines Dreiecks a, b und dem eingeschlossenen Winkel C die beiden andern Winkel A, B bestimmt werden sollen, und wo man bekanntlich

$$\frac{a+b}{a-b}\cdot \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \operatorname{tang}(B+\tfrac{1}{2}C)$$

hat; indem man hier a die größere gegebne Seite bedeuten läßt giebt die Tafel, wenn man in sie mit $\log a - \log b$ eingeht, ohne weiteres den Logarithmen von $\frac{a+b}{a-b}$, wozu man sonst, wenn man erst a und b aus den Logarithmen berechnen wollte, vier Aufschlagungen, oder wenn man nach der Form $\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1}$ rechnete, drei, oder wenn man den Hülfswinkel einführte, dessen Tangente $\frac{a}{b}$ ist, doch zwei Aufschlagungen nöthig hätte. Beispiele in Zahlen hier beizufügen würde wohl überflüssig sein.

Gauß.

Inhaltsübersicht.

Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss.

Gesammelt von **F. Klein, M. Brendel** und **L. Schlesinger.**

V. C. F. Gauss als Geometer.

Von

P. Stäckel in Heidelberg.

Vorgelegt in der Sitzung vom 26. Oktober 1917 durch Herrn F. Klein.

Verzeichnis der Abkürzungen.

W. für C. F. Gauß, Werke I—XI.

T. für das Wissenschaftliche Tagebuch, W. X 1, S. 488—572.

Br. G.-Sch. für Briefwechsel zwischen Gauß und Schumacher I—VI, Altona 1860—1865.

Br. G.-O. für Briefwechsel zwischen Gauß und Olbers, in W. Olbers, Sein Leben und seine Werke II 1 und II 2, Berlin 1900 und 1909.

Br. G.-Bessel für Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel, Leipzig 1880.

Br. G.-Bolyai für Briefwechsel zwischen Gauß und W. Bolyai, Leipzig 1899.

P. Th. für P. Stäckel und F. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, Leipzig 1895.

Bol. für W. und J. Bolyai, Geometrische Untersuchungen herausgegeben von P. Stäckel; I. Leben und Schriften der beiden Bolyai, II. Stücke aus den Schriften der beiden Bolyai, Leipzig 1913.

Lob. für N. Jw. Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von F. Engel, Leipzig 1898—99.

Sartorius für W. Sartorius v. Waltershausen, Gauß zum Gedächtniß, Leipzig 1856.

Bachmann für P. Bachmann, Über Gauß' zahlentheoretische Arbeiten, diese Materialien, Heft 1, 1911; W. X 2, S. 1.

Schlesinger für L. Schlesinger, Über Gauß' Arbeiten zur Funktionentheorie, diese Materialien, Heft III, 1912; W. X 2, S. 77.

1.
Einleitung.

Gauß gehört zu den großen Mathematikern, deren eigentümliche Begabung schon in der ersten Jugend durch ungewöhnliche Leistungen im Zahlenrechnen hervortrat. Auch während er das Collegium Carolinum zu Braunschweig besuchte (1792—1795), hat er viel gerechnet; schon im Jahre 1794 erfand er die Methode der kleinsten Quadrate. Auf umfangreiches numerisches Beobachtungsmaterial gründen sich auch die 1795 beginnenden Untersuchungen in der höheren Arithmetik, die 1801 in den Disquisitiones arithmeticae einen ersten Abschluß erhalten. Neben die zahlentheoretischen Untersuchungen treten in diesen Jahren höchster Schaffenskraft die Entdeckungen auf dem Gebiete der elliptischen Funktionen, und auch die Algebra gehört, wie das Tagebuch[1]) zeigt und die Dissertation (1799) bestätigt, zu den mathematischen Gegenständen, denen sich der junge Gauß zuwendet. Im Vergleich zur Analysis steht die Geometrie im Hintergrunde; doch läßt eine Aufzeichnung im Tagebuch vom September 1799 (T. Nr. 99) schon die große Frage nach den Gründen der Geometrie anklingen.

Die nun einsetzende astronomische Periode, die sich bis etwa 1816 erstreckt, bringt nach Außen hin keine wesentliche Änderung, denn unter den Veröffentlichungen kommen nur Beiträge zur elementaren Geometrie in Betracht. Nachlaß und Briefwechsel zeigen jedoch, daß die Forschungen über die Grundlagen der Geometrie nicht geruht haben, und gerade in der Zeit zwischen 1810 und 1816 ist Gauß zu den grundlegenden Begriffen und Sätzen aus der Lehre von den krummen Flächen gelangt.

Mit dem Jahre 1816 beginnt die Zeit der Geodäsie. Vorbereitet durch theoretische Arbeiten über die kürzesten Linien auf dem Sphäroide, betätigt sich Gauß 1821 bis 1825 bei den Messungen im Felde. Den Weg zu Größerem bahnend, verfaßt er 1822 die Kopenhagener Preisschrift über die konforme Abbildung krummer Flächen, und 1828 erscheinen, als reife Frucht langer Mühen, die Disquisitiones generales circa superficies curvas, in denen aus

---

1) Das von Gauß während der Jahre 1799 bis 1815 geführte wissenschaftliche Tagebuch oder Notizenjournal ist abgedruckt W. X 1, S. 488—572; es wird im Folgenden mit T. angeführt.

den Anwendungen heraus ein neuer Zweig der reinen Mathematik selbständiges Leben gewinnt.

Noch zu einer zweiten Reihe von Untersuchungen hat die geodätische Tätigkeit den Anstoß gegeben, zu sehr eingehenden Forschungen über die Grundlagen der Geometrie. Hier ist Gauß nicht dazu gelangt, seine Gedanken ausführlich niederzuschreiben, und wir sind auf spärliche Notizen und einzelne Stellen in Briefen angewiesen.

Es folgt die Periode der mathematischen Physik. Als diese etwa 1841 geendet hat, kommt es zu einer Nachblüte der geometrischen Forschung. Es entstehen die beiden Abhandlungen über Gegenstände der höheren Geodäsie (1843 und 1846); die Grundlagen der Geometrie werden wieder aufgenommen und erweiterte Auffassungen gewonnen, geometrische Aufgaben verschiedener Art werden behandelt, und Gauß kehrt auch zu zwei Gebieten zurück, die ihn von jeher angezogen hatten und denen er hohe Bedeutung beimaß: zur Geometria situs und zur geometrischen Versinnlichung der komplexen Größen.

Wie Sartorius[1]) berichtet (S. 80), hat Gauß sich dahin geäußert, „in seiner frühesten Jugend habe ihm die Geometrie wenig Interesse eingeflößt, welches sich erst später bei ihm in hohem Maße entwickelt habe“. Die Arithmetik war und blieb ihm die „Königin der Mathematik“, deren Hofstaat die andern Zweige der Analysis angehörten. Gewiß war ihm das geometrisch-anschauliche Denken nicht fremd, aber bei seinen geometrischen Untersuchungen hat er fast überall die analytischen Methoden bevorzugt. „Es ist nicht zu leugnen“, heißt es in der Besprechung der Beschreibenden Geometrie von Monge (W. IV, S. 359), „daß die Vorzüge der analytischen Behandlung vor der geometrischen, ihre Kürze, Einfachheit, ihr gleichförmiger Gang und besonders ihre Allgemeinheit sich gewöhnlich um so entschiedener zeigen, je schwieriger und verwickelter die Untersuchungen sind“. Er war sich jedoch dessen wohl bewußt, daß „die logischen Hilfsmittel für sich nichts zu leisten vermögen und nur taube Blüten treiben, wenn nicht die befruchtende, lebendige Anschauung des Gegenstandes überall waltet“ (W. IV, S. 366). Die Pflege der rein geometrischen Methoden hielt er für „unentbehrlich beim frühern jugendlichen Studium, um Einseitigkeiten zu verhüten, den Sinn für Strenge und Klarheit zu schärfen und den Einsichten eine Lebendigkeit und Unmittelbarkeit zu geben, welche durch die analytischen Methoden

1) Sartorius von Waltershausen, Gauß zum Gedächtniß, Leipzig 1856; im Folgenden mit Sartorius angeführt.

weit weniger befördert, mitunter eher gefährdet werden" (W. IV, S. 360), und er wünschte, „daß auch die rein geometrischen Behandlungen fortwährend kultiviert werden und daß die Geometrie wenigstens einen Teil der neuen Felder, die die Analyse erobert, sich aneigne" (W. II, S. 186).

Abschnitt I

Die Grundlagen der Geometrie.

2.

Allgemeines über die Arbeitsweise von Gauß.

Bei den Grundlagen der Geometrie zeigt sich in hohem Maße eine Erscheinung, der wir bei Gauß wiederholt begegnen: der Reichtum der Gedanken, die ihm, besonders in der Jugend, in solcher Fülle zuströmten, daß er ihrer kaum Herr werden konnte (Sartorius, S. 78), steht in Gegensatz zu dem geringen Umfang dessen, was er aufgezeichnet, ausgearbeitet und veröffentlicht hat. Wenn daher auch der folgende Bericht über die Arbeitsweise von Gauß mehr in eine (noch fehlende) Schilderung seiner gesamten wissenschaftlichen Persönlichkeit als in eine Darlegung seiner Arbeiten auf einem Teilgebiet der Mathematik zu gehören scheint, so dürfte er doch als Grundlage für das Verständnis der folgenden Ausführungen nützlich sein, zumal dabei der Zusammenhang mit den Grundlagen der Geometrie nicht aus dem Auge verloren wurde.

Ein erster Grund für die Erscheinung, auf die wir hingewiesen haben, liegt darin, daß die Größe des mathematischen Genies, das sich in Gauß offenbarte, in der Vereinigung schöpferischer und kritischer Kraft wurzelt. Diese Eigentümlichkeit erkennt man schon in der Dissertation, und sie zeigt sich nicht weniger in den Disquisitiones arithmeticae. In den späteren Veröffentlichungen tritt die Kritik an den Leistungen anderer zurück, aber es bleibt als auszeichnendes Merkmal die „Gaußsche Strenge".

Die Gaußsche Strenge erkennen wir schon äußerlich in der Form der Darstellung. „Es war zu aller Zeit Gauß' Streben, seinen Untersuchungen die Form vollendeter Kunstwerke zu geben; eher ruhete er nicht, und er hat daher nie eine Arbeit veröffentlicht, bevor sie diese von ihm gewünschte, durchaus vollendete Form erhalten hatte. Man dürfe einem Bauwerke, pflegte er zu sagen, nach seiner Vollendung nicht mehr das Gerüste ansehen" (Sar-

torius, S. 82). Dieser Grundsatz spricht sich auch in dem Siegel aus, das Gauß benutzte; es zeigt einen Baum mit wenigen Früchten und der Umschrift: Pauca, sed matura.

In Briefen an Schumacher, Encke und Bessel hat Gauß sich darüber geäußert, warum er von dieser klassischen Darstellungs art nicht abgehen wollte und konnte.

Als er nach Abschluß der geodätischen Messungen im Felde im Winter 1825/26 seine theoretischen Arbeiten wieder aufnimmt, klagt er am 21. November 1825 Schumacher gegenüber: „Der Wunsch, den ich immer bei meinen Arbeiten gehabt habe, ihnen eine solche Vollendung zu geben, ut nihil amplius desiderari possit[1]), erschwert sie mir freilich außerordentlich“ (W. VIII, S. 400). Schumacher antwortet am 2. Dezember 1825: „In Bezug auf ihre Arbeiten und den Grundsatz, ut nihil amplius desiderari possit, möchte ich fast wünschen, und zum Besten der Wissenschaft wünschen, Sie hielten nicht so strenge daran. Von dem unendlichen Reichtum Ihrer Ideen würde dann mehr uns werden als jetzt, und mir scheint die Materie wichtiger als die möglich vollendetste Form, deren die Materie fähig ist. Doch schreibe ich meine Meinung mit Scheu hin, da Sie gewiß längst das pro und contra möglichst erwogen haben“ (Br. G.-Sch. II, S. 41). Gauß erwiedert am 12. Februar 1826: „Ich war etwas verwundert über Ihre Äußerung, als ob mein Fehler darin bestehe, die Materie zu sehr der vollendeten Form hintanzusetzen. Ich habe während meines ganzen wissenschaftlichen Lebens immer das Gefühl gerade vom Gegenteil gehabt, d. i. ich fühle, daß oft die Form vollendeter hätte sein können und daß darin Nachlässigkeiten zurückgeblieben sind. Denn so werden Sie es doch nicht verstehen, als ob ich mehr für die Wissenschaft leisten würde, wenn ich mich damit begnügte, einzelne Mauersteine, Ziegel etc. zu liefern, anstatt eines Gebäudes, sei es nun ein Tempel oder eine Hütte, da gewissermaßen das Gebäude auch nur Form der Backsteine ist. Aber ungern stelle ich ein Gebäude auf, worin Hauptteile fehlen, wenngleich ich wenig auf den äußeren Aufputz gebe. Auf keinen Fall aber, wenn Sie sonst mit Ihrem Vorwurf auch Recht hätten, paßt er auf meine Klagen über die gegenwärtigen Arbeiten, wo es nur das gilt, was ich Materie nenne; und ebenso kann ich Ihnen bestimmt versichern, daß, wenn ich gern auch eine gefällige Form gebe, diese vergleichungsweise nur sehr wenig Zeit und Kraft in Anspruch nimmt oder bei früheren Arbeiten genommen hat“ (Br. G.-Sch. II, S. 46).

1) Diese Wendung findet sich bei Euler, siehe z. B. Nova acta acad. sc. Petrop. 4 (1786), 1789, S. 73.

Als Gauß bald darauf an Schumacher eine kleine Abhandlung über den Heliotropen für die Astronomischen Nachrichten sendet (W. IX, S. 472), fügt er hinzu: „Diesmal habe ich gewiß den Vorwurf nicht verdient, als ob ich der Form auf Kosten der Materie zuviel eingeräumt hätte, sondern eher das Gegenteil“ (Brief vom 28. November 1826, Br. G.-Sch. II, S. 81), und Schumacher sieht sich jetzt veranlaßt, seine Meinung ausführlich auseinanderzusetzen. Am Schluß heißt es: „Ich glaubte, dies Ausfeilen könne ebenso gut ein anderer tun, und darin kann ich mich geirrt haben; worin ich mich aber nicht geirrt habe, ist die Behauptung, daß Sie das Erfinden nicht einem andern übertragen können. Jedes Jahr Ihres Lebens mehrt die Ihnen nur verständlichen Andeutungen neuer Ideen. Soll alles dieses verloren sein?“ (Brief vom 2. Dezember 1826, Br. G.-Sch. II, S. 83).

Gauß verhielt sich solchen Anregungen gegenüber durchaus ablehnend.

„Ich weiß“, schreibt er am 18. August 1832 an Encke, „daß einige meiner Freunde wünschen, daß ich weniger in diesem Geiste arbeiten möchte: das wird aber nie geschehen; ich kann einmal an Lückenhaftem keine rechte Freude haben, und eine Arbeit, an der ich keine Freude habe, ist mir nur eine Qual. Möge auch jeder in dem Geiste arbeiten, der ihm am meisten zusagt“ (W. XI 1, S. 84).

Am 15. Januar 1827 berichtet er seinem Freunde Schumacher, er sei mit der Ausarbeitung der Abhandlung über die krummen Flächen ein gut Stück vorgerückt. „Ich finde dabei viele Schwierigkeiten, allein das, was man Ausfeilen oder Form mit Recht nennen könnte, ist doch keineswegs, was erheblich aufhält (wenn ich die Sprödigkeit der lateinischen Sprache ausnehme), vielmehr ist es die innige Verkettung der Wahrheiten in ihrem Zusammenhange, und eine solche Arbeit ist erst dann gelungen, wenn der Leser die große Mühe, die bei der Ausführung stattgefunden hat, gar nicht mehr erkennt. Ich kann daher nicht leugnen, daß ich keinen recht klaren Begriff davon habe, wie ich meine Arbeiten solcher Art anders, als ich gewohnt bin, ausführen könnte, ohne, wie ich mich schon einmal ausgedrückt habe, Mauersteine anstatt eines Gebäudes zu liefern. Ich habe wohl zuweilen versucht, über diesen oder jenen Gegenstand bloß Andeutungen ins Publikum zu bringen; entweder aber sind sie von Niemand beachtet oder wie z. B. einige Äußerungen in einer Reeznsion G. G. Anz. 1816, p. 619 [W. IV, S. 364, VIII, S. 170], es ist mit Kot darnach geworfen. Also, insofern von wichtigen Gegenständen die Rede ist,

etwas im Wesen Vollendetes oder gar nichts“ (Br. G.-Sch. II, S. 93). Solche Andeutungen finden sich zahlreich in den Jugendwerken, sie fehlen aber auch nicht in den späteren Schriften. Wie sorgfältig Gauß dabei verfuhr, zeigt der Brief an Encke vom 18. August 1832, wo es heißt: „Es ist von jeher mein gewissenhaft befolgter Grundsatz gewesen, solche Andeutungen, die aufmerksame Leser in jeder meiner Schriften in großer Menge finden (sehen Sie z. B. meine Disquis. Arithmet. pag. 593 [art. 335]) stets dann erst zu machen, wenn ich den Gegenstand für mich selbst ganz abgemacht habe“ (W. XI 1, S. 84). Hiernach wird man im besonderen die vorher erwähnten Andeutungen in den Göttinger Anzeigen vom Jahre 1816 zu bewerten haben, die sich auf die Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms beziehen.

Es ist ein merkwürdiger Zufall, daß Gauß bald, nachdem er sich bei Schumacher über die Erfolglosigkeit seiner Andeutungen beklagt hatte, am 24. Juli und 14. August 1827 (Br. G.-Sch. II, S. 105, 111) durch seinen Freund die beiden Briefe Jacobis erhielt, mit denen dessen Untersuchungen über die elliptischen Funktionen beginnen (Jacobi, Werke I, S. 29), und daß er nicht lange danach Abels Recherches kennen lernte, die ihm von seinen eigenen Untersuchungen „wohl ein Drittel vorwegnahmen“ (Brief vom 30. Mai 1828, Br. G.-Sch. II, S. 177). Der ausschlaggebende Einfluß, den die berühmte Stelle im art. 335 der Disquisitiones arithmeticae (W. I, S. 412) auf Abel und Jacobi geübt hat, ist anerkannt. Hier hat ein von Gauß ausgestreutes Samenkorn hundertfältige Frucht getragen, und auch andere Andeutungen sind nicht auf steinigen Boden gefallen.

Fast ein Vierteljahrhundert später ist derselbe Streitpunkt zwischen den beiden Freunden noch einmal aufgetaucht, als nämlich Schumacher in den Astronomischen Nachrichten Jacobis Bearbeitung der Carlinischen Abhandlung über die Keplersche Gleichung abdruckte und Gauß jenem mitteilte (Brief vom 4. Dezember 1849, Br. G.-Sch. VI, S. 51), er habe die Aufgabe schon vor langer Zeit „auf eine ohne allen Vergleich kürzere Art aufgelöst“ (W. X 1, S. 420—428). „Wenn ich nicht wüßte“, hatte Schumacher geantwortet, „wieviel Zeit Ihnen die letzte Feile Ihrer Arbeiten kostet, so würde ich um Ihre Abhandlung bitten“ (Brief vom 5. Dezember 1849, Br. G.-Sch. VI, S. 52). Gauß erwiedert, er sei nicht abgeneigt, eine ihm zu Teil werdende Muße zur Ausarbeitung einer Abhandlung über den Gegenstand zu verwenden; es werde aber erhebliche Zeit erfordert werden, um die ganze Theorie in einer ihm selbst genügenden Gestalt auszuführen. „Sie sind

ganz im Irrtum, wenn Sie glauben, daß ich darunter nur die letzte Politur in Beziehung auf Sprache und Eleganz der Darstellung verstehe. Diese kosten vergleichungsweise nur unbedeutenden Zeitaufwand; was ich meine, ist die innere Vollkommenheit. In manchen meiner Arbeiten sind solche Inzidenzpunkte, die mich jahrelanges Nachdenken gekostet haben, und deren in kleinem Raum konzentrierte Darstellung nachher niemand die Schwierigkeit anmerkt, die erst überwunden werden muß" (Brief vom 5. Februar 1850, Br. G.-Sch. VI, S. 58).

Ähnliche Äußerungen finden sich in dem Briefe an Bessel vom 28. Februar 1839 (Br. G.-Bessel, S. 524); ihnen gegenüber vertritt Bessel in dem Briefe vom 28. Juni 1839 (Br. G.-Bessel, S. 526) mit großer Wärme den Standpunkt, den Schumacher in dem Briefe vom 2. Dez. 1826 eingenommen hatte.

Die vollendete Darstellung, bei der Archimedes und Newton für Gauß die Vorbilder waren, sollte nur das äußere Zeichen der inneren Vollkommenheit sein, und hier erst gewinnt das Wort von der Gaußschen Strenge seine wahre Bedeutung. Von den Geometern des 18. Jahrhunderts war in der Freude über die Fülle neuer Entdeckungen, zu denen die Infinitesimalrechnung die Mittel bot, die Sicherung der Grundlagen außer Acht gelassen worden. Sehr stark tritt das bei Euler hervor, bei dem gerade die grundlegenden Betrachtungen viel zu wünschen übrig lassen[1]). Dagegen finden sich schon bei d'Alembert Ansätze zu einer kritischen oder besser skeptischen Auffassung, und Lagrange hat in der Théorie des fonctions analytiques geradezu das Ziel erstrebt, den Beweisen den Charakter einleuchtender Gewißheit und Strenge zu geben, der die Lösungen der Alten auszeichnet[2]). Der „rigor apud veteres consuetus" ist es, den der junge Gauß im bewußten Gegensatz zu den Gepflogenheiten des 18. Jahrhunderts auf seine Fahne geschrieben hat[3]). Im hohen Alter hat er Schumacher gegenüber seine Ueberzeugung mit folgenden Worten ausgesprochen: „Es ist der Charakter der Mathematik der neueren Zeit (im Gegensatz gegen das Altertum), daß durch unsere Zeichensprache und Namengebungen wir einen Hebel besitzen, wodurch die verwickeltsten Argumentationen auf einen gewissen Mechanismus reduziert

1) Vgl. etwa L. Schlesinger und F. Engel in der Vorrede zu Eulers Institutiones calculi integralis, Opera omnia, ser. I, vol. 11, Leipzig 1913, S. XIII.

2) J. L. Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, Paris 1797; Oeuvres, t. 9, S. 184.

3) C. F. Gauß, Disquisitiones arithmeticae, Lipsiae 1801, Praefatio; W. I, S. 5.

werden. An Reichtum hat dadurch die Wissenschaft unendlich gewonnen, an Schönheit und Solidität aber, wie das Geschäft gewöhnlich betrieben wird, eben so sehr verloren. Wie oft wird jener Hebel eben nur mechanisch angewandt, obgleich die Befugnis dazu in den meisten Fällen gewisse stillschweigende Voraussetzungen impliziert. Ich fordere, man soll bei allem Gebrauch des Kalküls, bei allen Begriffsverwendungen sich immer der ursprünglichen Bedingungen bewußt bleiben, und alle Produkte des Mechanismus niemals über die klare Befugnis hinaus als Eigentum betrachten. Der gewöhnliche Gang ist aber der, daß man für die Analysis einen Charakter der Allgemeinheit in Anpruch nimmt und dem Andern, der so herausgebrachte Resultate noch nicht für bewiesen anerkennt, zumutet, er solle das Gegenteil nachweisen. Diese Zumutung darf man aber nur an den stellen, der seinerseits behauptet, ein Resultat sei falsch, nicht aber dem, der ein Resultat nicht für bewiesen anerkennt, welches auf einem Mechanismus beruhet, dessen ursprüngliche, wesentliche Bedingungen in dem vorliegenden Fall gar nicht zutreffen" (Brief an Schumacher vom 1. September 1850, W. X 1, S. 434).

Ein zweiter Grund für das Missverhältnis zwischen dem Reichtum an Gedanken, die „bei der unglaublichen Produktivität in dem mächtigen Gehirn auftauchten" (Sartorius, S. 79), und dem verhältnismäßig geringen Umfang der mathematischen Veröffentlichungen von Gauß liegt in Hemmungen innerer und äußerer Art, die bei seiner Art des Arbeitens dem Druckfertigmachen entgegenstanden.

In dem schon erwähnten Briefe an Bessel vom 28. Februar 1839 hatte Gauß mit einer bei ihm ungewöhnlichen Heftigkeit des Tones hervorgehoben, er brauche zum Ausarbeiten „Zeit, viel Zeit, viel mehr Zeit, als Sie sich wohl vorstellen mögen. Und meine Zeit ist vielfach beschränkt, sehr beschränkt". Solche Klagen über Mangel an Zeit für die theoretischen Untersuchungen wiederholen sich beständig in den Briefen. Die glücklichste Zeit seines Lebens sind wohl jene neun Jahre von 1799 bis 1807 gewesen, die er als Schützling des „edlen Fürsten, dem er alles, was er war, verdankte" (Brief an Olbers vom 23. Februar 1802, Br. G.-O. 1, S. 14) in Braunschweig zugebracht hat. Noch im Alter hat er dieser Jahre mit Rührung und Dankbarkeit gedacht. So schreibt er am 15. Februar 1845 an Encke über Eisenstein, der damals mit Unterstützung des Königs von Preußen in freier Muße seinen mathematischen Forschungen nachging: „Er lebt noch in der glücklichen Zeit, wo er sich ganz seiner Begabung hingeben kann, ohne daß er nötig

hätte, sich durch irgend etwas Fremdartiges stören zu lassen. Ich werde lebhaft an die — längt verflossenen — Jahre erinnert, wo ich in ähnlichen Verhältnissen lebte. Von der andern Seite erfordern auch gerade die rein mathematischen Spekulationen eine unverkümmerte und unzerstückelte Zeit" (Brief im Gauß-Archiv).

Die Pflichten der Professur haben schwer auf Gauß gelastet, zunächst sein Amt als Leiter der Göttinger Sternwarte. „So sehr ich die Astronomie liebe", schreibt er am 28. Juni 1820 an Bessel (Br. G.-Bessel S. 353), „fühle ich doch das Beschwerliche des Lebens eines praktischen Astronomen, ohne Hilfe, oft nur zu sehr, am peinlichsten aber darin, daß ich darüber fast gar nicht zu irgend einer zusammenhängenden größeren theoretischen Arbeit kommen kann."

Hierzu traten seit 1821 die geodätischen Messungen, und wenn auch die mühsamen und zeitraubenden Arbeiten im Felde für Gauß selbst mit dem Jahre 1825 beendet waren, so behielt er doch die Oberaufsicht über die Triangulationen und führte die abschließenden Rechnungen. „Mehr als zwanzig Jahre hindurch", sagt Gaede[1]), „hat Gauß unter der ermüdenden Last dieses Geschäftes gelebt und gelitten, welches, wenn einmal in Gang gebracht und in zweckmäßiger Weise schematisch organisiert, von jedem andern ebenso gut hätte besorgt werden können, während Gauß durch die massenhafte, und sobald die Methode feststand, im Wesentlichen nur noch mechanische Rechen-Arbeit der Muße verlustig ging, deren er für seine schöpferische Tätigkeit auf spekulativem Gebiet, nach seinem eigenen Zeugnis, in hohem Maße bedurfte".

Dazu kam die Verpflichtung, Vorlesungen zu halten. „Für eine mathematische Lehrstelle hat er eine ganz entschiedene Abneigung", hatte Olbers am 3. November 1802 an Heeren in Göttingen geschrieben, als es sich um eine Berufung von Gauß an die dortige Universität handelte, „sein Lieblingswunsch ist, Astronom bei irgend einer Sternwarte zu werden, um seine ganze Zeit zwischen Beobachtungen und feinen, tiefsinnigen Untersuchungen zur Erweiterung der Wissenschaft teilen zu können" (Sartorius, S. 31). Allein seine Stellung an der Universität brachte es mit sich, daß er „das Handwerk eines Professors" (Sartorius, S. 96) ausüben mußte. Er hat es mit der ihm eigenen Gewissenhaftigkeit getan, aber schon in dem Briefe an Bessel vom 27. Januar 1816

1) Gaede, Beiträge zur Kenntniß von Gauß' praktisch-geodätischen Arbeiten, Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. 14, 1885; auch als selbständiges Werk, Karlsruhe 1885, erschienen, S. 68.

(Br. G.-Bessel, S. 232) nennt er das Kollegienlesen „ein sehr lästiges, undankbares Geschäft“, und ganz besonders bitter werden seine Klagen, als die Last der geodätischen Messungen hinzukommt. Die in Aussicht stehende Berufung nach Berlin veranlaßt ihn 1824 zu dem Ausruf: „Ich bin ja hier so weit davon entfernt, Herr meiner Zeit zu sein. Ich muß sie teilen zwischen Kollegia lesen (wogegen ich von jeher einen Widerwillen gehabt habe, der, wenn auch nicht entstanden, doch vergrößert ist durch das Gefühl, welches mich immer dabei begleitet, meine Zeit wegzuwerfen) und praktisch astronomische Arbeiten. . . Was bleibt mir also für solche Arbeiten, auf die ich selbst einen höhern Wert legen könnte, als flüchtige Nebenstunden? Ein anderer Charakter als der meinige, weniger empfindlich für unangenehme Eindrücke, oder ich selbst, wenn manches andere anders wäre, als es ist, würde vielleicht auch solchen Nebenstunden noch mehr abgewinnen, als ich es im allgemeinen kann“ (Brief an Bessel vom 14. März 1824, Br. G.-Bessel, S. 428). Es ließen sich den Briefen an die vertrauten Freunde noch zahlreiche Klagen dieser Art entnehmen. Hier möge nur noch eine Stelle aus dem Briefe an Olbers vom 19. Februar 1826 (Br. G.-O. 2, S. 438) angeführt werden: „Unabhängigkeit, das ist das große Losungswort für die Geistesarbeiten in die Tiefe. Aber wenn ich meinen Kopf voll von in der Luft schwebenden geistigen Bildern habe, die Stunde heranrückt, wo ich Kollegien lesen muß, so kann ich Ihnen nicht beschreiben, wie angreifend das Abspringen, das Anfrischen heterogener Ideen für mich ist, und wie schwer mir oft Dinge werden, die ich unter andern Umständen für eine erbärmliche ABC-Arbeit halten würde. . . . Inzwischen, lieber Olbers, will ich Sie nicht mit Klagen über Dinge [er]müden, die nicht zu ändern sind; meine ganze Stellung im Leben müßte eine andere sein, wenn dergleichen Widerwärtigkeiten nicht öfter eintreffen sollten“.

Aus den vorstehenden Aeußerungen klingt heraus, daß es nicht nur Mangel an Muße war, der den Fortgang der theoretischen Forschungen hemmte, sondern daß in der Gemütsverfassung von Gauß Hinderungen lagen. „Es ist wahr“, schreibt er am 20. April 1848 an seinen Jugendfreund Bolyai (Br. G.-Bolyai, S. 132), „mein Leben ist mit Vielem geschmückt gewesen, was die Welt für beneidenswert hält. Aber glaube mir, lieber Bolyai, die herben Seiten des Lebens, wenigstens des meinigen, die sich wie der rote Faden dadurch ziehen und denen man im höheren Alter immer wehrloser gegenübersteht, werden nicht zum hundertsten Teil aufgewogen von dem Erfreulichen. Ich will gern zu-

geben, daß dieselben Schicksale, die zu tragen mir so schwer geworden ist und noch ist, manchem andern viel leichter gewesen wären, aber die Gemütsverfassung gehört zu unserm Ich, der Schöpfer unserer Existenz hat sie uns mitgegeben, und wir vermögen wenig daran zu ändern". Es ist hier nicht der Ort, von dem Leid zu sprechen, das Gauß mehr als einmal in seinem Hause betroffen hat. Es hat „die Heiterkeit des Geistes", die er zur wissenschaftlichen Arbeit nötig hatte, „nur zu sehr und zu vielfach getrübt" (Brief an Bessel vom 28. Februar 1839, Br. G.-Bessel, S. 524).

Die Empfindlichkeit für unangenehme Eindrücke, von der Gauß in dem Brief an Bessel vom 14. März 1824 spricht, hat sicherlich dazu beigetragen, daß er es vermied, in seinen Veröffentlichungen Gegenstände zu berühren, die zu Streitigkeiten Anlaß geben konnten. Wie behutsam geht er in seiner Dissertation mit den imaginären Größen um, und gar ihre geometrische Deutung, die er nach seinem Zeugnis schon vor 1799 besaß, hat er damals unterdrückt und erst 1831 bekannt gemacht. Ebenso hat er seine antieuklidische Geometrie nicht zur Veröffentlichung ausgearbeitet. „Vielleicht wird dies auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Böoter scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte" (Brief an Bessel vom 27. Januar 1829, W. VIII, S. 200).

Diese Scheu war verstärkt worden durch böse Erfahrungen, die Gauß machen mußte, als er 1816 in der Besprechung der Parallelentheorien von Schwab und Metternich (W. IV, S. 364, VIII, S. 170) Andeutungen über die Unbeweisbarkeit des elften Euklidischen Axioms gewagt hatte: „Es ist mit Kot darnach geworfen", schreibt er am 15. Januar 1827 an Schumacher (Br. G.-Sch. II, S. 94)[1]. Solche Angriffe hatte Gauß wohl im Auge, wenn er am 25. August 1818 an Gerling schrieb: „Ich freue mich, daß Sie den Mut haben, sich [in Ihrem Lehrbuch] so auszudrücken, als wenn Sie die Möglichkeit, daß unsere Parallelentheorie, mithin unsere ganze Geometrie, falsch wäre, anerkennten. Aber die Wespen, deren Nest Sie aufstören, werden Ihnen um den Kopf fliegen" (W. VIII, S. 179).

Dazu kam die geringe Meinung, die Gauß von der großen Mehrzahl der Mathematiker hatte. Bereits am 16. Dezember 1799 schreibt er an Wolfgang Bolyai, der ihm einen Versuch, das

1) Von wem der bösartige Angriff ausgegangen ist, hat sich noch nicht ermitteln lassen.

Parallelenaxiom zu beweisen, übersandt hatte: „Mach' doch ja Deine Arbeit bald bekannt; gewiß wirst Du dafür den Dank zwar nicht des großen Publikums (worunter auch mancher gehört, der für einen geschickten Mathematiker gehalten wird) einernten, denn ich überzeuge mich immer mehr, daß die Zahl der wahren Geometer äußerst gering ist und die meisten die Schwierigkeiten bei solchen Arbeiten weder beurteilen noch selbst einmal sie verstehen können — aber gewiß den Dank aller derer, deren Urteil Dir allein wirklich schätzbar sein kann" (W. VIII, S. 159). Als Wolfgang Bolyai dann im Jahre 1832 seinem Jugendfreunde die Scientia spatii absolute vera seines Sohnes Johann übersandt hatte, in der das Rätsel der Parallelenfrage gelöst war, antwortete dieser am 6. März 1832: „Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenige Menschen gefunden, die das, was ich ihnen mitteilte, mit besonderem Interesse aufnahmen. Um das zu können, muß man erst recht lebendig gefühlt haben, was eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen ganz unklar" (W. VIII, S. 221). Noch schärfer äußert sich Gauß in einem Briefe an Gerling vom 25. Juni 1815: „Mir däucht, es ist in mehr als einer Rücksicht wichtig, bei den Schülern den Sinn für Rigor wach zu erhalten, da die meisten Menschen nur gar zu geneigt sind, zu einer laxen Observanz überzugehen. Selbst unsere größten Mathematiker haben meistenteils in dieser Rücksicht etwas stumpfe Fühlhörner" (Brief im Gauß-Archiv). Ein gut Teil Menschenverachtung aber steckt in dem Rat, den Gauß am 29. September 1837 seinem jüngeren Freunde Möbius erteilt: „Man muß immer bedenken, daß, wo die Leser, für welche man schreibt, keinen Anstoß nehmen, es vielleicht gar nicht wohlgetan wäre, tiefer einzudringen, als ihnen frommt" (W. XI 1, S. 19).

Gauß hat bei seinen Klagen über mangelndes Verständnis wohl auch an die Briefe gedacht, die er im Jahre 1831 mit Schumacher gewechselt hatte, als dieser glaubte, das Parallelenaxiom bewiesen zu haben (W. VIII, S. 210—219). Schumacher ließ sich von der Unzulänglichkeit seines Verfahrens nicht überzeugen und sandte den ausführlichen Brief Gaußens vom 12. Juli 1831 an Bessel. „Eine tolle Geschichte", anwortete dieser am 1. Aug. 1831, „ist doch die im Gaußschen (hier zurückfolgenden) Briefe vorkommende, daß die Peripherien zweier Kreise von den Halbmessern r und r' nicht im Verhältnis $r:r'$ stehen sollen. Ich bezweifele dieses nicht, weil Gauß es sagt; allein diese Ungleichheit ist mir so wenig anschaulich, daß ich mir, nach dem alten Kulen-

kampschen Ausdruck[1]) kein Denkbild davon machen kann“ (Abschrift des Briefes im Gauß-Archiv).

Die Zurückhaltung, die Gauß übte, brachte die Gefahr mit sich, daß andere ihm zuvorkamen, und das ist auch wiederholt geschehen. Aber in diesem Punkte war Gauß unempfindlich. Am 30. Januar 1812 schreibt er an Laplace: „J'ai dans mes papiers beaucoup de choses dont peut-être je pourrai perdre la priorité de la publication, mais soit, j'aime mieux, faire mûrir les choses (W. X 1, S. 374), und als Abel seine Recherches veröffentlicht hatte, begnügt er sich damit festzustellen, daß der Norweger ihn in Bezug auf etwa ein Drittel der Sachen der Mühe überhoben habe, sie auszuarbeiten, „zumal da er alle Entwickelungen mit vieler Eleganz und Konzision gemacht“ habe (Brief an Bessel vom 30. März 1828, Br. G.-Bessel, S. 477). Bei Johann Bolyais Scientia spatii fand er es sogar höchst erfreulich, daß gerade der Sohn seines alten Freundes ihm auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen sei (Brief vom 6. März 1832, W. VIII, S. 221).

A. Von den Anfängen der nichteuklidischen Geometrie bis zur Entdeckung der transzendenten Trigonometrie (1792—1817).

3.

Einleitendes. Die Jugendzeit (1792—1795).

Als Jacobi am 5. August 1827, auf Grund eines Briefes, den Schumacher an ihn gerichtet hatte, Legendre mitteilte, Gauß habe schon 1808 einen Teil der von Jacobi in den Astronomischen Nachrichten veröffentlichten Sätze besessen (Jacobi, Werke, I, S. 394), antwortete Legendre am 30. November: „Comment se fait-il que M. Gauß ait osé vous faire dire que la plupart de vos théorèmes lui étaient connus et qu'il en avait fait la découverte dès 1808? Cet excès d'impudence n'est pas croyable de la part d'un homme qui a assez de mérite personel pour n'avoir pas besoin de s'approprier les découvertes des autres“ (S. 398), und am 14. April 1828 setzt er hinzu: „Il y a des gens comme M. Gauß, qui ne se feraient pas scrupule de vous ravir, s'ils le pouvaient, le fruit de vos recherches, et de prétendre qu'elles sont depuis longtemps en leur possession. Prétention bien absurde

---

1) Andreas Gottlieb Kulenkamp hieß der Inhaber des Handelshauses in Bremen, bei dem Bessel von 1799 bis 1806 tätig gewesen war.

assurément; car si M. Gauß était tombé sur de pareilles découvertes qui surpassent, à mes yeux, tout ce qui a été fait jusqu'ici en analyse, bien sûrement il se serait empressé de les publier" (S. 418).

Der Nachlaß von Gauß hat demgegenüber gezeigt, daß dieser bereits im Jahre 1797 begonnen hatte, die lemniskatischen Funktionen zu untersuchen, daß er bis zum Jahre 1800 die wesentlichen Eigenschaften der allgemeinen elliptischen Funktionen erkannt hatte und daß er im Jahre 1808 diese Untersuchungen wieder aufgenommen und sich dem Problem der Teilung zugewandt hatte, auf das sich jene von Jacobi entdeckten Sätze beziehen.

Ebenso sind in anderen Fällen die Angaben, die Gauß über seine mathematischen Entdeckungen gemacht hat, durch Aufzeichnungen im Nachlaß oder durch Briefe bis in die Einzelheiten hinein bestätigt worden. Wie konnte es auch anders sein bei einem Manne von so großer Wahrheitsliebe und Gewissenhaftigkeit? Dazu wurde Gauß durch ein ungewöhnlich treues Gedächtnis unterstützt. Auch hat er häufig die Aufzeichnungen aus den Jahren 1796 bis 1815 benutzt, die er sich in einem Notizenjournal oder Tagebuch gemacht hatte (W. X 1, S. 488—572); in der späteren Zeit pflegte er in Handbücher kurze Bemerkungen über die mathematischen Sätze einzutragen, die er in Briefen erwähnt hatte. Gewiß kommen gelegentlich Angaben vor, die einander zu widersprechen scheinen, allein in den allermeisten Fällen haben sie sich bei sorgfältiger Deutung in Uebereinstimmung bringen lassen, und so wird man den Äußerungen von Gauß über die Entstehung seiner Gedanken volles Vertrauen entgegenbringen dürfen.

Hiernach sind auch die Äußerungen zu beurteilen, die Gauß über die Anfänge seiner Beschäftigung mit den Grundlagen der Geometrie gemacht hat.

Am 28. November 1846 schreibt Gauß an Schumacher, er habe schon im Jahre 1792, also mit 15 Jahren, an eine Geometrie gedacht, „die stattfinden müßte und strenge konsequent stattfinden würde, wenn die Euklidische Geometrie nicht die wahre ist", das heißt, wenn das elfte Axiom nicht gilt (W. VIII, S. 238). Hiermit ist jedenfalls nur das erste Aufblitzen des Gedankens gemeint. Denn unmittelbar vorher, am 2. Oktober 1846, hatte Gauß zu Gerling geäußert, der Satz, daß in jeder vom Parallelenaxiom unabhängigen Geometrie der Flächeninhalt eines Vielecks der Abweichung der Summe der Außenwinkel von 360° proportional ist, sei „der erste, gleichsam an der Schwelle liegende Satz der Theorie, den ich schon im Jahr 1794 als notwendig erkannte" (W.

VIII, S. 266). Wir werden sehen, daß diese Beziehung zwischen dem Inhalt und der Winkelsumme eines Vielecks einen Angelpunkt der Gaußschen Theorie gebildet hat, und dürfen daher annehmen, daß der Zeitpunkt, wo er zu einer solchen grundlegenden Einsicht gelangt war, sich ihm fest eingeprägt hatte.

Als Wolfgang Bolyai seinem Jugendfreunde die Scientia spatii absolute vera seines Sohnes Johann übersandt hatte, bemerkte Gauß am 6. März 1832, der ganze Inhalt der Schrift komme fast durchgehends überein „mit seinen eigenen, zum Teile schon seit 30 bis 35 Jahren angestellten Meditationen" (W. VIII, S. 221). Man wird damit bis auf die Jahre von 1797 bis 1802 zurückgeführt. Zu dieser Zeit hat Gauß also angefangen, in weiterem Umfange die Folgen zu entwickeln, die sich ergeben, wenn man die Wahrheit des elften Euklidischen Axioms leugnet. In der Tat bringt das Tagebuch unter dem September 1799 (T. Nr. 99) die Eintragung: „In principiis geometriae egregios progressus fecimus". Worin diese ausgezeichneten Fortschritte bestanden haben, wird noch zu erörtern sein.

Gehen wir in der Reihe der Zeugnisse weiter. Kurz vorher, am 17. Mai 1831, hatte Gauß an Schumacher berichtet, er abeh „angefangen, einiges von seinen Meditationen über die Parallellinien aufzuschreiben, die zum Teil schon gegen 40 Jahr alt sind" (W. VIII, S. 213). Er geht also hier bis auf die keimhaften Ursprünge zurück, für die er die Jahre 1792 und 1794 genannt hatte. Dieselbe Datierung findet sich in dem Briefe an Taurinus vom 8. November 1824: „Ich vermute, daß Sie sich noch nicht lange mit diesem Gegenstande [der Parallelentheorie] beschäftigt haben. Bei mir ist es über 30 Jahr, und ich glaube nicht, daß jemand sich eben mit diesem zweiten Teil [wo die Winkelsumme des Dreiecks kleiner als zwei Rechte ist] mehr beschäftigt haben könne als ich, obgleich ich niemals darüber etwas bekannt gemacht habe" (W. VIII, S. 186).

4.

Fortschritte in den Grundlagen der Geometrie (1795—1799).

Als Gauß im Oktober 1795 seine Studien in Göttingen begann, hatte er bereits, wie wir bemerkten, die schwache Stelle des Euklidischen Lehrgebäudes erkannt und war wenigstens bei dem Inhalt der Vielecke den Folgerungen nachgegangen, die sich aus der Verwerfung des Parallelenaxioms ergeben.

Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie haben gegen das Ende des achzehnten Jahrhunderts die Mathematiker und darüber hinaus weite Kreise der Gebildeten lebhaft beschäftigt. Von zwei Seiten waren Anregungen dazu gekommen.

Seit dem Ende des 17. Jahrhunderts hatten, um nur einige wichtige Namen zu nennen, Hume, Leibniz, d'Alembert die Frage nach dem Wesen der mathematischen Erkenntnis aufgeworfen, und durch Kants Kritik der reinen Vernunft (1781, 1787) war diese Frage geradezu in den Mittelpunkt der philosophischen Erörterungen gestellt worden. Dabei war es besonders die Parallelentheorie, an der sich Berufene und Unberufene versuchten, denn dem elften Euklidischen Axiom fehlte jenes Merkmal der einleuchtenden Gewißheit, die dem Apriorischen eigen sein sollte[1]); es ist deutlich zu erkennen, wie mit dem Jahre 1781 die Flut der Veröffentlichungen anschwillt, die sich auf die Parallelenfrage beziehen.[2])

Noch von einer anderen Seite kamen Einwirkungen. Der französische Umsturz führte zur Gründung neuer Hochschulen in Paris, der École polytechnique und der École normale, an die die bedeutendsten Mathematiker des Landes berufen wurden. Dies veranlaßte sie, zu den Elementen ihrer Wissenschaft zurückzukehren. Lagrange verschmähte es nicht, Vorlesungen über die Elemente der Arithmetik und Algebra zu halten[3]), und Legendre ließ 1794 seine Elemente der Geometrie erscheinen, die einen ungewöhnlichen Erfolg hatten und 1823 ihre zwölfte Auflage erlebten[4]). In der Parallelentheorie war Legendre bemüht gewesen, die bei Euklid vorhandenen Mängel zu beseitigen, aber die beständigen Änderungen bei den auf einander folgenden Auflagen zeigen, daß er auf schwankendem Boden stand; wie seine letzte, zusammenfassende Veröffentlichung vom Jahre 1833 erkennen läßt[5]), hat er sich niemals zu

---

1) I. Kant, Kritik der reinen Veruunft, 1. Aufl. 1781, S. 25, 2. Aufl. 1877 S. 39: „So werden auch alle geometrischen Grundsätze . . . niemals aus allgemeinen Begriffen . . ., sondern aus der Anschauung, und zwar a priori mit apodiktischer Gewißheit hergeleitet".

2) Vgl. das Literaturverzeichnis bei P. Stäckel und F. Engel, die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, Leipzig 1895; im Folgenden angeführt mit P. Th.

3) J. L. Lagrange, Leçons élémentaires sur les mathématiques, données à l'École normale en 1795, Oeuvres t. 7, S. 183.

4) A. M. Legendre, Eléments de géométrie, Paris 1794, 12. éd. Paris 1823.

5) A. M. Legendre, Réflexions sur les différentes manières de démontrer la théorie des parallèles, Mém. de l'Acad., t. 12, année 1828, Paris 1833, S. 367.

dem Gedanken der Unbeweisbarkeit des elften Axioms erheben können[1]).

Die Universität Göttingen nahm lebhaften Anteil an der Bewegung, deren Hervortreten soeben geschildert wurde. Professor der Mathematik war damals Kaestner (1719—1800). Er hat die Literatur über die Parallelentheorie eifrig gesammelt und eine noch heute wertvolle Dissertation, Klügels Recensio conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi vom Jahre 1763, veranlaßt. In dem Nachwort meint Kaestner, ein Beweis des Parallelenaxioms sei nur zu erhoffen durch eine genauere Ausbildung der Geometrie der Lage, die mit Leibniz untergegangen sei. Gegenwärtig bleibe nur übrig, offen die Forderung Euklids als solche auszusprechen; niemand, der bei gesunden Sinnen sei, werde sie bestreiten wollen. In seinen späteren Vorlesungen hat Kaestner „an der Möglichkeit der Lösung verzweifelnd mit unbegreiflicher Resignation, anstatt nach der wahren Demonstration zu forschen, ein blindes Annehmen angeraten" (P. Th. S. 139—141). Aehnlich wie Kaestner dachte auch sein Kollege an der Nachbar-Universität Helmstedt, Joh. Friedr. Pfaff (1765—1825), der meinte,

---

1) In dem Briefe an Olbers vom 30. Juli 1806 (W. VIII, S. 139, 165) bemerkt Gauß, es scheine sein Schicksal zu sein, in fast allen seinen theoretischen Arbeiten mit Legendre zu konkurrieren, und führt dafür an: die höhere Arithmetik, die transzendenten Funktionen, welche mit der Rektifikation der Ellipse zusammenhängen, die ersten Gründe der Geometrie und die Methode der kleinsten Quadrate.

Für die höhere Arithmetik kommt in Betracht Legendres Essay sur la théorie des nombres, Paris 1798, dessen Verhältnis zu den Disquisitiones arithmeticae Tschebyscheff in seiner Theorie der Kongruenzen (deutsch von Schapira, Berlin 1889) gut gekennzeichnet hat; im Besonderen ist noch das Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste zu nennen; vgl. Bachmann W. X 2, S. 14. Die elliptischen Integrale hat Legendre in dem grundlegenden Mémoire sur les transcendantes elliptiques, Paris 1794 behandelt und ihnen dann zwei umfangreiche Werke gewidmet: Exercices de calcul intégral, 3 Bände, Paris 1811—1816; Traité des fonctions elliptiques, 3 Bände, Paris 1825—1832. Die Methode der kleinsten Quadrate entwickelt Legendre in den Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, Paris 1805, während die Theoria motus corporum coelestium von Gauß erst 1809 erschienen ist (vgl. auch W. VIII, S. 136—141 und X 1, S. 373 und 380).

Hinzuzufügen wäre noch, daß Gauß und Legendre sich mit der Theorie und Praxis der Geodäsie beschäftigt haben und daß Legendres Satz über die Zurückführung eines kleinen sphärischen Dreiecks auf ein ebenes Dreieck mit ebenso langen Seiten auf die Untersuchungen von Gauß zur allgemeinen Lehre von den krummen Flächen anregend gewirkt hat. Auch bei der Anziehung der homogenen Ellipsoide sind beide zusammengetroffen; für Legendre sind hier zu nennen die Abhandlungen in den Mémoires des savants étrangers, t. 10, Paris

alles was sich tun ließe sei, das Parallelenaxiom durch ein einfacheres zu ersetzen, es zu simplifizieren (P. Th. S. 215).

Als Gauß nach Göttingen kam, habilitierte sich gerade für Mathematik J. Wildt (1770—1844) mit einer Probeschrift über die Parallelentheorie[1]). Ein Liebhaber auf diesem Gebiete war auch der außerordentliche Professor der Astronomie Carl Felix Seyffer (1762—1822). Im Jahre 1801 hat er zwei Besprechungen von Versuchen, das Parallelenaxiom zu beweisen, in den Göttinger Gelehrten Anzeigen veröffentlicht; sie zeigen, daß er die Schriften mit Verständnis und Urteil gelesen hatte; ja Seyffer war zu der Einsicht gekommen, daß „es mehr als zweifelhaft scheine, ob es überhaupt möglich sei, das elfte Axiom zu beweisen, ohne ein neues Axiom zu Hilfe zu nehmen“ (P. Th. S. 214).

Während Gauß zu Kaestner und Wildt in kein näheres Verhältnis getreten ist, hat er mit Seyffer verkehrt und ist mit ihm bis zu dessen Tode im Briefwechsel geblieben. Ihre Unterhaltungen haben auch die Parallelentheorie betroffen, denn am 26. Juni 1801 schreibt Seyffer an Gauß: „Vielleicht ist es Ihnen nicht uninteressant, daß die Rezension in der hiesigen Zeitung [den Gött. Gel. Anzeigen] über die Theorie der Parallelen von Schwab von mir war. Ich wünschte, daß Sie mir Ihre lehrreichen Ideen hierüber gelegentlich sagten“ (Brief im Gauß-Archiv).

Im Hause Seyffers hat Gauß seinen besten Jugendfreund, den Ungarn Wolfgang Bolyai kennen gelernt. „Als Wolfgang nach Göttingen kam“, erzählt sein Sohn Johann, „traf er mit Gauß zufällig bei dem Professor [Seyffer] zusammen und äußerte sich da freimütig und entschieden über die Leichtfertigkeit der Behandlung der Mathematik; kurz darauf begegnete er Gauß am Walle beim Spazierengehen; sie näherten sich einander. Mein

---

1785 und in den Mémoires de l'Institut, année 1810, 2. partie, Paris 1814. Endlich sind noch die Arbeiten über das von Gauß mit Π, von Legendre mit Γ bezeichnete Eulersche Integral zu erwähnen (Exercices, t. I. S. 222—307).

Die Vergleichung der Leistungen zeigt, daß Legendre mit scharfem Blick die Stellen erkannt hatte, an denen die mathematische Forschung mit Erfolg einsetzen konnte. Seinem unermüdlichen Fleiß und analytischen Geschick ist eine Reihe schöner Erfolge zu Teil geworden, jedoch blieb er überall auf einer Stufe stehen, die zu überschreiten erst dem Genie von Gauß vergönnt war. Mit besonderer Deutlichkeit tritt dies bei den Grundlagen der Geometrie hervor.

1) J. Wildt, Theses quae de lineis parallelis respondent, Göttingen 1795. Wildt hat in den Göttinger Gelehrten Anzeigen, Jahrgang 1800, S. 1769—1772 drei „auf reiner Anschauung beruhende Beweise“ des elften Axioms veröffentlicht.

Vater sprach unter anderem von seinen Gedanken behufs Erklärung der geraden Linie und der etwaigen Wege zum Beweise des elften Axioms, und der damals schon zum Koloß in den höheren Regionen der Wissenschaft, besonders der Zahlenlehre, emporgewachsene Gauß brach ergötzt, überrascht in die lakonischen Worte aus: Sie sind ein Genie; Sie sind mein Freund!, worauf sogleich das Band der Brüderschaft erfolgte“ [1]). Über den Verkehr zwischen den beiden Freunden berichtet Wolfgang: „Er war sehr bescheiden und zeigte wenig; nicht drei Tage, wie mit Plato, jahrelang konnte man mit ihm zusammen sein, ohne seine Größe zu erkennen. Schade, daß ich dieses titellose, schweigsame Buch nicht aufzumachen und zu lesen verstand. Ich wußte nicht, wie viel er weiß, und er hielt, nachdem er meine Art sah, viel von mir, ohne zu wissen, wie wenig ich bin. Uns verband die wahre (nicht oberflächliche) Leidenschaft für die Mathematik und unsere sittliche Uebereinstimmung, so daß wir oft, mit einander wandernd, mit den eigenen Gedanken beschäftigt stundenlang wortlos waren“ (Bol. S. 9).

Was Bolyai und Gauß über das Parallelenaxiom mit einander verhandelt haben, wissen wir nicht. Wohl aber wissen wir, daß Wolfgang, nachdem sein Freund im Herbst 1798 nach Braunschweig zurückgekehrt war, sich angestrengt bemüht hat, das Axiom zu beweisen und daß er im Mai 1799 sein Ziel erreicht zu haben glaubte. Ehe nämlich der Ungar Deutschland verließ, ist er noch einmal mit Gauß zusammengetroffen. Am 24. Mai 1799 haben die beiden zu Klausthal im Harz von einander Abschied genommen, und bei dieser Zusammenkunft hat Wolfgang von seiner „Göttinger Parallelentheorie“ erzählt. Hierauf bezieht sich eine Stelle des Briefes von Gauß an Wolfgang vom 16. Dezember 1799: „Es tut mir sehr leid, daß ich unsere ehemalige größere Nähe nicht benutzt habe, um mehr von Deinen Arbeiten über die ersten Gründe der Geometrie zu erfahren; ich würde mir gewiß dadurch manche vergebliche Mühe erspart haben und ruhiger geworden sein, als jemand wie ich es sein kann, so lange bei einem solchen Gegenstande noch so viel zu desiderieren ist. Ich selbst bin in meinen Arbeiten darüber weit vorgerückt (wiewohl mir meine andern ganz heterogenen Geschäfte wenig Zeit dazu lassen); allein der Weg, den ich eingeschlagen habe, führt nicht so wohl zu dem Ziele, das man wünscht und welches Du erreicht zu haben versicherst, als viel-

---

1) Wolfgang und Johann Bolyai, Geometrische Untersuchungen, herausgegeben von P. Stäckel, Leipzig 1913, 1. Teil: Leben und Schriften der beiden Bolyai, S. 8; im Folgenden angeführt mit Bol.

mehr dahin, die Wahrheit der Geometrie zweifelhaft zu machen" (W. VIII, S. 159).

Die Ergebnisse, zu denen Gauß, wie das Tagebuch (T. Nr. 99) zeigt, im September 1799 gelangt war, hat er in dem Briefe nur angedeutet. Er fährt fort: „Zwar bin ich auf manches gekommen, was den meisten schon für einen Beweis gelten würde, aber was in meinen Augen so gut wie Nichts beweist, z. B. wenn man beweisen könnte, daß ein geradliniges Dreieck möglich sei, dessen Inhalt größer wäre als jede gegebene Fläche, so bin ich im Stande die ganze Geometrie völlig strenge zu beweisen. Die meisten würden nun wohl jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht; es wäre ja wohl möglich, daß, so entfernt man auch die drei Eckpunkte des Dreiecks im Raume von einander annähme, doch der Inhalt immer unter (infra) einer gegebenen Grenze wäre. Dergleichen Sätze habe ich mehrere, aber in keinem finde ich etwas Befriedigendes" (W. VIII, S. 159).

Aufzeichnungen über die Untersuchungen, von denen Gauß spricht, sind uns nicht erhalten. Es ist jedoch sehr wahrscheinlich, daß der Brief an Bolyai vom 6. März 1832 (W. VIII, S. 220) einen Teil dieser Untersuchungen wiedergibt. In diesem wiederholt angeführten Briefe sagt Gauß, daß er schon vor 30 bis 35 Jahren Meditationen über die Grundlagen der Geometrie angestellt habe und daß zu seiner Überraschung die Ergebnisse der Scientia spatii Johann Bolyais fast durchgehends damit übereinstimmten. In manchem Teile habe er etwas andere Wege eingeschlagen und als ein Specimen füge er in den Hauptzügen einen rein geometrischen Beweis des Lehrsatzes bei, daß in der antieuklidischen Geometrie die Differenz der Winkelsumme eines Dreiecks von 180^0 dem Flächeninhalte proportional ist. Der Beweis beginnt mit dem Satze, daß das asymptotische Dreieck, bei dem die drei Ecken im Unendlichen liegen, eine bestimmte endliche Area habe. Eine Herleitung wird nicht angegeben[1]. Für den Inhalt eines Dreiecks, bei dem eine Ecke im Endlichen liegt, während die Gegenseite zu den beiden anderen Seiten asymptotisch ist, ergibt sich dann eine Funktionalgleichung, die im Gebiete der stetigen Funktionen leicht gelöst werden kann, und weil ein ganz im Endlichen liegendes Dreieck aus solchen Drei-

1) Man kann durch eine einfache, nur die allerersten Eigenschaften der asymptotischen Geraden benutzende Zeichnung ein solches Dreieck in ein inhaltgleiches, ganz im Endlichen liegendes Viereck verwandeln. Vgl. H. Liebmann, Zur nichteuklidischen Geometrie, Leipziger Berichte, Bd. 58, 1906, S. 560; Nichteuklidische Geometrie, 2. Aufl., Leipzig 1912, S. 53.

ecken, bei denen eine Ecke im Endlichen liegt, zusammengesetzt werden kann, so folgt schließlich die zu beweisende Behauptung.

Wie immer auch Gauß im Jahre 1799 vorgegangen sein mag, so zeigt sein Brief vom 16. Dezember 1799 auf jeden Fall, daß er sich damals auf dem Wege befand, den vor ihm Saccheri (1733) und Lambert (1766) eingeschlagen hatten, nämlich planmäßig die Folgerungen zu entwickeln, die sich aus der Annahme ergeben, das Euklidische Parallelenaxiom sei nicht erfüllt. Da Gauß hierbei auf keinen Widerspruch kam, wurde ihm die Wahrheit der Euklidischen Geometrie zweifelhaft. Den Gedanken, daß die nichteuklidische Geometrie „wahr“ sein könne, hatte übrigens schon Lambert offen ausgesprochen (P. Th. S. 200).

Hierbei erheben sich die Fragen, ob Gauß jene Arbeiten gekannt und wann er sie möglicher Weise kennen gelernt hat. Gewiß sind sie ihm in der Göttinger Universitätsbibliothek, die er als Student fleißig benutzt hat, zugänglich gewesen. Allein man muß bedenken, daß diese Schriften Wolfgang Bolyai unbekannt geblieben sind; dies geht mit voller Sicherheit aus den Äußerungen seines Sohnes hervor (Bol. S. 221—223).

Daß andererseits später in den Kreisen der Schüler von Gauß von Lamberts Theorie der Parallellinien gesprochen wurde, zeigen Briefe von Bessel an Encke vom 9. Juli 1821 und von Encke an Bessel vom 13. Oktober 1821 (Abschriften im Gauß-Archiv). Auch wird Lambert in dem Briefe Bessels an Gauß vom 10. Februar 1829 erwähnt (W. VIII, S. 201). Endlich besaß Gauß die Mathematischen Abhandlungen von J. W. H. Lehmann, Zerbst 1829, in denen Saccheri und Lambert angeführt werden; Randbemerkungen und Spuren des Gebrauches lassen schließen, daß Gauß darin gelesen und die auf die Parallelentheorie bezüglichen Stellen beachtet hat[1]).

Entscheidend für die Beurteilung der Leistung von Gauß ist der Umstand, daß weder Saccheri noch Lambert bis zur nichteuklidischen ebenen Trigonometrie vorgedrungen sind, wenn ihr auch Lambert durch den Gedanken, „die dritte Hypothese komme bei einer imaginären Kugelfläche vor“ (P. Th. S. 203) nahe gekommen war; denn erst die Trigonometrie sichert für die Ebene die Widerspruchslosigkeit der absoluten Geometrie und führt damit zu der Überzeugung, daß alle Versuche, das Parallelenaxiom durch Konstruktionen in der Ebene zu beweisen, vergeblich sein müssen.

1) Vgl. den Aufsatz von P. Stäckel: F. A. Taurinus, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Heft 9, Leipzig 1899, S. 427.

5.

Schwanken und Zweifel (1799—1805).

Wir kehren zu den Beziehungen zwischen Gauß und Bolyai zurück. Im Sommer 1799 nach Siebenbürgen zurückgekehrt, war Wolfgang zunächst durch andere Geschäfte in Anspruch genommen worden und hatte die Mathematik liegen lassen. Erst nachdem er im Frühjahr 1804 die Professur für Mathematik und Physik am evangelisch-reformierten Kollegium zu Maros-Vásárhely angetreten hatte, nahm er die „Göttingische Parallelentheorie“ wieder vor, feilte sie aus und sandte den Entwurf am 16. September 1804 an Gauß. „Ich kann den Fehler nicht entdecken, prüfe Du der Wahrheit getreu und schreibe mir so bald als nur möglich. ... Wenn Du dieses Werkchen davor wert hieltest (ich setze den Fall), so schicke es einer würdigen Akademie hin, daß es beurteilt werde“ (Br. G.-Bolyai, S. 65).

Wie stellte sich Gauß zu den Bemühungen seines Freundes, das Parallelenaxiom zu beweisen? Anders, als man es nach seinem Briefe vom 16. Dezember 1799 erwarten durfte. Er schreibt am 25. November 1804: „Ich habe Deinen Aufsatz mit großem Interesse und Aufmerksamkeit durchgelesen und mich recht an dem echten gründlichen Scharfsinne ergötzt. Du willst aber nicht mein leeres Lob, das auch gewissermaßen schon darum parteiisch scheinen könnte, weil Dein Ideengang sehr viel mit dem meinigen Ähnliches hat, worauf ich ehemals die Lösung dieses Gordischen Knotens versuchte und vergebens bis jetzt versuchte. Du willst nur mein aufrichtiges, unverhohlenes Urteil. Und dies ist, daß Dein Verfahren mir noch nicht Genüge leistet. Ich will versuchen, den Stein des Anstoßes, den ich noch darin finde (und der auch wieder zu derselben Gruppe von Klippen gehört, woran meine Versuche bis jetzt scheiterten) mit so vieler Klarheit, als mir möglich ist, ans Licht zu ziehen. Ich habe zwar noch immer die Hoffnung, daß jene Klippen einst, und noch vor meinem Ende eine Durchfahrt erlauben werden. Indeß habe ich jetzt so manche andere Beschäftigungen vor der Hand, daß ich gegenwärtig daran nicht denken kann, und glaube mir, es soll mich herzlich freuen, wenn Du mir zuvorkommst und es Dir gelingt, alle Hindernisse zu übersteigen. Ich würde dann mit der innigsten Freude alles tun, um Dein Verdienst gelten zu machen und ins Licht zu stellen, so viel in meinen Kräften steht“ (W. VIII, S. 160).

Bolyai hat diese Aeußerungen als eine Ermunterung aufgefaßt, sich weiter um den Beweis zu bemühen, und mit Recht. „Meine Ideen gefielen ihm überhaupt gar sehr, und er machte mich [in dem Brief vom 25. November 1804] darauf aufmerksam, welch' hochwichtige Sache die Materie der Parallelen sei, obwohl er davon [von der Göttingischen Parallelentheorie] doch keineswegs befriedigt war“ (Bol. S. 90). Am 27. Dezember 1808 sandte er an Gauß einen Nachtrag (Br. G.-Bolyai, S. 96, vgl. Bol. S. 223). Als dieser keine Antwort gab, ist der Briefwechsel bis zum Jahre 1816 unterbrochen worden. Etwa bis zu diesem Jahre hat Wolfgang hart mit dem zweitausendjährigen Problem gerungen, und hat schließlich nichts davon getragen, als die Einsicht, daß er alle seine Mühe verschwendet habe. „Schauderhafte, riesige Arbeiten habe ich vollbracht, habe bei Weitem Besseres geleistet, als bisher [geleistet wurde], aber keine vollkommene Befriedigung habe ich je gefunden; hier aber gilt es: si paullum a summo discessit, vergit ad imum“ (Bol. S. 77).

Als Johann Bolyai von Wien aus, wo er seit 1818 Schüler der militärischen Ingenieur-Akademie war, im Frühjahr 1820 dem Vater mitteilte, daß er versuche, das elfte Axiom zu beweisen. war dieser aufs äußerste erschrocken und beschwor ihn mit den beweglichsten Worten, die Lehre von den Parallelen in Frieden zu lassen. „Verliere keine Stunde damit. Keinen Lohn bringt es, und es vergiftet das ganze Leben. Selbst durch das Jahrhunderte dauernde Kopfzerbrechen von hundert großen Geometern ist es schlechterdings unmöglich, [das elfte] ohne ein neues Axiom zu beweisen. Ich glaube doch alle erdenklichen Ideen diesfalls erschöpft zu haben. Hätte Gauß auch fernerhin seine Zeit mit Grübeleien über dem elften Axiom zugebracht, so wären seine Lehren von den Vielecken, seine Theoria motus corporum coelestium und alle seine sonstigen Arbeiten nicht zum Vorschein gekommen, und er ganz zurückgeblieben. Ich kann es schriftlich nachweisen, daß er seinen Kopf über die Parallelen zerbrach. Er äußerte mündlich und schriftlich, daß er fruchtlos darüber nachgedacht habe“ (Bol. S. 90).

Durch die nachdrücklichen Warnungen seines Vaters wurde Johann nicht abgeschreckt, im Gegenteil, seine Begierde, um jeden Preis durchzudringen, wuchs auf das heftigste (Bol. S. 79). Gegen Ende des Jahres 1823 gelang es ihm, den Gordischen Knoten zu durchhauen. Die unerwartete Lösung, die er fand, war damals bereits im Besitz von Gauß, der, wie wir sehen werden, nach langen Zweifeln um das Jahr 1816 zur Gewißheit gekommen war.

Am Eingang des Briefes vom 25. November 1804 hatte Gauß

angedeutet, daß sein Ideengang Ähnlichkeit mit dem Wolfgangs habe. Dieser hatte die Linie betrachtet, die entsteht, wenn man in gleichweit von einander abstehenden Punkten einer Geraden nach derselben Seite Lote derselben Länge errichtet und die auf einander folgenden Endpunkte durch Gerade verbindet. Während man in der euklidischen Geometrie auf solche Art eine Parallele zur Grundlinie erhält, ergibt sich in der nichteuklidischen Geometrie ein gebrochener Linienzug, der aus gleich langen, unter gleichen Winkeln an einander stoßenden Strecken besteht. Bolyai hatte zu zeigen versucht, daß ein Linienzug der angegebenen Art, wenn man weit genug auf ihm fortgehe, die Grundlinie schneiden müsse; damit wäre nachgewiesen, daß die Annahme, das elfte Axiom gelte nicht, auf einen Widerspruch führt. Daß Gauß sich nach derselben Richtung hin versucht hat, wird durch eine Bemerkung bezeugt, die sich auf der letzten Seite des Handbuches „Mathematische Brouillons“ findet (W. VIII, S. 163); allerdings beginnen die Aufzeichnungen des Handbuches erst mit dem Oktober 1805.

In der Zeit zwischen 1799 und 1804 hatte Gauß aber noch auf einem anderen Wege vorzudringen versucht. Notizen aus dem Jahre 1803 (W. X 1, S. 451) geben mehrere Ansätze, mittels geometrischer Konstruktionen und daraus abgeleiteter Funktionalgleichungen, also durch dasselbe Verfahren, das Gauß auch bei dem Dreiecksinhalt angewandt hat (siehe S. 45), die zwischen den Stücken eines Dreiecks geltenden Beziehungen herzuleiten. Damals sind seine Anstrengungen vergeblich gewesen; vielleicht liegt hierin der Grund, warum er gegenüber dem 1799 geäußerten Zweifel an der Wahrheit der Geometrie im Jahre 1804 von der Hoffnung spricht, noch vor seinem Ende eine Durchfahrt nach dem Hafen des Beweises für das Parallelenaxiom zu finden.

6.

Die Entdeckung der transzendenten Trigonometrie (1805—1817).

Schumacher ist im Wintersemester 1808/9 in Göttingen gewesen, um sich bei Gauß zum Astronomen auszubilden; während dieser Zeit hat er Aufzeichnungen über seine Gespräche mit Gauß gemacht. Diese „Gaussiana“ bringen unter dem November 1808 die Bemerkung: „Gauß hat die Theorie der Parallellinien darauf zurückgebracht, daß wenn die angenommene Theorie nicht

wahr wäre, es eine konstante, a priori der Länge nach gegebene Linie geben müßte, welches absurd ist. Doch hält er selbst diese Arbeit noch nicht für hinreichend“ (W. VIII, S. 165). Hieraus geht hervor, daß Gauß auch im Jahre 1808 noch schwankte. „Auf die Worte: « welches absurd ist » wollen wir dabei noch nicht einmal das geringste Gewicht legen, denn es ist höchst wahrscheinlich, daß die Schumacher aus seinem Eigenen hinzugefügt hat, wohl aber legen wir Gewicht auf den nachfolgenden Satz. Wenn Gauß selber seine Untersuchungen noch nicht für abgeschlossen hielt, so muß er noch immer halb und halb an Euklid geglaubt haben; auf alle Fälle war er auch damals noch nicht vollständig von der Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms überzeugt“.[1])

Daß in der nichteuklidischen Geometrie, in der, ebenso wie in der Sphärik, die Ähnlichkeit von Figuren aufhört, eine a priori gegebene Einheit der Länge vorhanden ist, hatte schon 1766 Lambert erkannt (P. Th. S. 200), und Legendre hatte 1794 auf die angebliche Widersinnigkeit eines solchen absoluten Maßes einen Beweis des Parallelenaxioms gegründet.

Auch eine Bemerkung von Gauß aus dem Jahre 1813 ist wohl in demselben Sinne aufzufassen: „In der Theorie der Parallellinien sind wir jetzt noch nicht weiter als Euklid war. Dies ist die partie honteuse der Mathematik, die früh oder spät eine ganz andere Gestalt bekommen muß“ (W. VIII, S. 166). Man wird dabei an den Ausspruch d'Alemberts vom Jahre 1759 erinnert: „Die Erklärung und die Eigenschaften der geraden Linie sowie der parallelen Geraden sind die Klippe und sozusagen das Ärgernis (le scandale) der Elementargeometrie“.[2])

Ein anderer Ton wird in der Besprechung von zwei Beweisversuchen angeschlagen, die Gauß in den Göttinger Gelehrten Anzeigen vom 20. April 1816 veröffentlicht hat (W. IV, S. 364, VIII, S. 170). Hier spricht er von dem „eitelen Bemühen, die Lücke, die man nicht ausfüllen kann, durch ein unhaltbares Gewebe von Scheinbeweisen zu verbergen“. Daß Gauß damit auf seine Überzeugung von der Unbeweisbarkeit des elften Axioms hindeuten wollte, wird durch den S. 30 angeführten Brief an Schumacher vom 15. Januar 1827 bestätigt. Ein weiteres Zeugnis

---

1) F. Engel, Lobatschefskijs Leben und Schriften, in dem Werke: N. I. Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen, herausgegeben von F. Engel, Leipzig 1898—99, S. 380; im Folgenden angeführt mit Lob.

2) J. d'Alembert, Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie, t. V., 4. éd. Amsterdam 1767, S. 200.

dafür, daß er jetzt zur Gewißheit durchgedrungen war, ist der Brief an Gerling vom 11. April 1816, also gerade aus der Zeit, in der er jene Besprechung verfaßt hatte (W. VIII, S. 168). Gauß äußert sich hier, auf Gerlings Wunsch, zu dem vorher erwähnten Beweisversuch Legendres und sagt: „Es scheint etwas paradox, daß eine konstante Linie gleichsam a priori möglich sein könne; ich finde aber darin nichts Widersprechendes. Es wäre sogar wünschenswert, daß die Geometrie Euklids nicht wahr wäre, weil wir dann ein allgemeines Maß a priori hätten, z. B. könnte man als Raumeinheit die Seite desjenigen gleichseitigen Dreiecks annehmen, dessen Winkel $= 59^0\ 59'\ 59'', 99999$“.

Gauß durfte sich mit solcher Entschiedenheit äußern, denn er war jetzt im Besitz der Trigonometrie, die in der nichteuklidischen Geometrie gilt. Wir wissen dies nicht aus Aufzeichnungen oder Briefen von Gauß, sondern durch einen glücklichen Zufall. Ebenfalls im April 1816 hatte Gauß den Besuch seines Schülers Wachter erhalten, der auf der Reise nach Danzig, wo er Professor am Gymnasium illustre geworden war, Göttingen berührte[1]). Wachter hatte kurz vorher in der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften eine Besprechung derselben Parallelentheorie von Metternich veröffentlicht, mit der Gauß sich in den Göttinger Nachrichten vom 20. April 1816 beschäftigt hat, und so ist es erklärlich, daß die Unterhaltung sich auch den Grundlagen der Geometrie zuwandte. Hierauf bezieht sich ein Brief von Wachter an Gauß vom 12. Dezember 1816, in dem jener über Untersuchungen berichtet, die er, angeregt durch das Gespräch, über die „anti-euklidische Geometrie“ angestellt hatte (W. VIII, S. 175). Wir erfahren hieraus, daß Gauß ihm von seiner transzendenten Trigonometrie gesprochen hatte; Wachter hatte sich vergeblich bemüht, einen Eingang in diese zu finden. Man wird daher annehmen dürfen, daß Gauß damals, wie er in einem bald darauf, am 16. März 1819, an Gerling geschriebenen Briefe sagt, die nichteuklidische Geometrie „so weit ausgebildet hatte, daß er alle Aufgaben vollständig lösen konnte, sobald die Konstante $= C$ gegeben wird“ (W. VIII, S. 182).

Die jetzt gewonnene feste Stellung gibt sich kund in dem Briefe an Olbers vom 28. April 1817: „Ich komme immer mehr zu der Ueberzeugung, daß die Notwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom mensch-

1) Vgl. hierfür wie für die folgenden Angaben den Aufsatz von P. Stäckel: F. L. Wachter, Math. Annalen, Bd. 54, 1901, S. 49—85.

lichen Verstande noch für den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem andern Leben zu andern Einsichten in das Wesen des Raums, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müßte man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen" (W. VIII, S. 177).

Auf welchem Wege Gauß zur nichteuklidischen Trigonometrie gelangt ist, läßt sich nicht mit Sicherheit sagen. Im Nachlaß findet sich eine Herleitung der Formeln, die wahrscheinlich im Jahre 1846 niedergeschrieben ist (W. VIII, S. 255). In ihr wird das Verfahren der geometrischen Konstruktionen und daraus hergeleiteten Funktionalgleichungen angewandt, das Gauß, wie wir gesehen haben, schon im Jahre 1803, freilich ohne Erfolg, benutzt hatte, und es liegt daher nahe anzunehmen, daß er in der Zeit zwischen 1813 und 1816 auf diesem Wege vorgegangen ist; allein man darf hierin nicht mehr als eine Vermutung erblicken.

B. Der Ausbau der nichteuklidischen Geometrie (seit 1817).

7.

Die Zeit der Geodäsie und der Flächentheorie; Schweikart und Taurinus (1817—1831).

Die Andeutungen über die Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms in der Anzeige vom Jahre 1816 hatten nicht den von Gauß erwarteten Erfolg gehabt, und er hatte, das Geschrei der Böoter scheuend, sich entschlossen, bei Lebzeiten nichts über seine Ansichten bekannt zu machen. Um so mehr sehen wir ihn überrascht und erfreut, wenn er auf seinem einsamen Wege Gleichstrebende antrifft. Das ereignete sich mit Schweikart und Taurinus.

Der Rechtsgelehrte Schweikart (1780—1859) hatte 1807 eine Schrift zur Parallelentheorie veröffentlicht[1]), in der er beanstandete, daß man bei der üblichen Erklärung der Parallelen als einander nicht schneidender Geraden das Unendliche hereinziehe, und forderte, man soll beim Aufbau der Geometrie von der

1) F. C. Schweikart, Die Theorie der Parallellinien, nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie, Jena und Leipzig 1807. Vgl. P. Th. S. 243—246.

Existenz der Quadrate ausgehen[1]). Später, zwischen 1812 und 1816, hatte er „ohne Hilfe des elften Euklidischen Axioms eine Geometrie, die er Astralgeometrie nannte, entwickelt" (Brief von Gerling an W. Bolyai vom 31. Oktober 1854, P. Th. S. 243) und, nachdem er 1816 aus Charkow an die Universität Marburg berufen worden war, 1818 mit seinem Kollegen Gerling darüber gesprochen. „Ich erzählte ihm darauf, wie Sie vor einigen Jahren [1816] öffentlich geäußert hätten, daß man seit Euklids Zeiten im Grunde hiermit nicht weiter gekommen sei; ja daß Sie gegen mich mehrmals geäußert hätten, wie Sie durch vielfältige Beschäftigung mit diesem Gegenstand auch nicht zum Beweis von der Absurdität einer solchen Annahme [einer nichteuklidischen Geometrie] gekommen seien" (Brief von Gerling an Gauß vom 25. Januar 1819, W. VIII, S. 180). Schweikart bat darauf Gerling, er möge eine kurze Aufzeichnung über seine „Astralische Größenlehre" (W. VIII, S. 180) an Gauß weitergeben und diesen ersuchen, ihn gelegentlich sein Urteil wissen zu lassen. In seiner Antwort erklärt Gauß, es sei ihm fast alles aus der Seele geschrieben (Brief vom 16. März 1819, W. VIII, S. 181). Er fand hier die Auffassung wieder, die er in dem Brief an Olbers vom 28. April 1817 ausgesprochen hatte und die er in dem Brief an Bessel vom 9. April 1830 (W. VIII, S. 201) noch stärker betont hat, daß der Raum eine außerhalb von uns vorhandene Wirklichkeit sei, der wir ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können, deren Eigenschaften vielmehr nur auf Grund der Erfahrung vollständig festzustellen sind.[2])

Das von Schweikart gewählte Beiwort „astralisch" sollte ausdrücken, daß erst bei Abmessungen der Größe, wie sie in der Sternenwelt vorkommen, Abweichungen von der Euklidischen Geometrie beobachtet werden könnten. Es scheint Gauß gefallen zu haben, denn er hat es in späteren Aufzeichnungen angewendet (W. VIII, S. 232).

Ein Neffe von Schweikart, ebenfalls ein Rechtsgelehrter, Taurinus (1794—1874) hatte sich als junger Mann, angeregt durch die Schrift seines Onkels, mit der Parallelentheorie beschäftigt und im Oktober 1824 einen Beweisversuch an Gauß gesandt[3]);

1) In ähnlicher Weise war Clairaut, Éléments de Géométrie, Paris 1741, davon ausgegangen, daß das Vorhandensein von Rechtecken durch die Anschauung gegeben sei, und hatte daraus mit großer Klarheit die Sätze des ersten Buches der Euklidischen Elemente abgeleitet.

2) Vgl. auch die gegen Kant gerichteten Bemerkungen W. II, S. 177 und W. VIII, S. 224.

3) Für die folgende Darstellung vgl. P. Th. S. 246—252 und den Aufsatz

daß dieser sich mit den Grundlagen der Geometrie beschäftige, wußte er seit 1821 durch seinen Onkel. Gauß, der in Taurinus „einen denkenden mathematischen Kopf“ erkannt hatte, antwortete in einem längeren Schreiben vom 8. November 1824; er hat darin seine Ansichten über das Parallelenaxiom ausführlich dargelegt, aber zugleich dem Empfänger des Briefes zur Pflicht gemacht, von dieser „Privat-Mitteilung auf keine Weise einen öffentlichen oder zur Öffentlichkeit führen könnenden Gebrauch zu machen“ (W. VIII, S. 186—188).

Es muß hier genügen, aus dem Briefe die Hauptstellen anzuführen. „Die Annahme, daß die Summe der drei Winkel [des Dreiecks] kleiner sei als 180°, führt auf eine eigene, von der unsrigen (euklidischen) ganz verschiedene Geometrie, die in sich selbst durchaus konsequent ist und die ich für mich selbst ganz befriedigend ausgebildet habe, so daß ich jede Aufgabe in derselben auflösen kann mit Ausnahme der Bestimmung einer Konstante, die sich a priori nicht ausmitteln läßt. Je größer man diese Konstante annimmt, desto mehr nähert man sich der euklidischen Geometrie und ein unendlich großer Wert macht beide zusammenfallen. . . . Wäre die nichteuklidische Geometrie die wahre, und jene Konstante in einigem Verhältnisse zu solchen Größen, die im Bereich unserer Messungen auf der Erde oder am Himmel liegen, so ließe sie sich a posteriori ausmitteln“.

Die freundliche Antwort, die der erste Mathematiker der Zeit ihm zukommen ließ, hat Taurinus gewiß angespornt, seine Untersuchungen mit erhöhtem Eifer fortzusetzen. In seiner 1825 veröffentlichten Theorie der Parallellinien ist er zwar von der unbedingten Giltigkeit des Parallelenaxioms überzeugt, aber er beginnt die Folgen zu entwickeln, die sich aus dessen Verwerfung ergeben, und gelangt so seinerseits zu jener Konstanten, die einer nichteuklidischen Geometrie eigen sein müßte; in der gleichzeitigen Möglichkeit unendlich vieler solcher Geometrien, die jede für sich genommen widerspruchslos sind, sieht er jedoch einen ausreichenden Grund, sie alle abzuweisen.

Gauß, dem die Schrift zugesandt wurde, hat sich eben so wenig dazu geäußert wie zu einer zweiten, den 1826 veröffentlichten Geometriae prima elementa[1]). Hier ist Taurinus

---

von P. Stäckel: F. A. Taurinus, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Heft 9, Leipzig 1899, S. 397.

1) Dies geht aus dem Briefe von Taurinus an Gauß vom 29. Dezember 1829 hervor (Brief im Gauß-Archiv). Vermutlich hatte Gauß daran Anstoß genommen,

auf die „neue Geometrie“ genauer eingegangen und hat die Formeln der zugehörigen Trigonometrie sozusagen mit einem Schlage gewonnen, indem er in den entsprechenden Formeln der sphärischen Trigonometrie den Halbmesser der Kugel imaginär setzte. Aber noch mehr, er hat diese Formeln sogleich zur Lösung einer Reihe von Aufgaben angewandt und zum Beispiel den Umfang und den Inhalt des Kreises, die Oberfläche und das Volumen der Kugel richtig berechnet.

Die Gedanken von Taurinus sind unbeachtet geblieben. „Der Erfolg bewies mir“, schreibt er am 29. Dezember 1829 an Gauß, „daß Ihre Autorität dazu gehört, ihnen Anerkennuug zu verschaffen, und dieser erste schriftstellerische Versuch ist, anstatt, wie ich gehofft hatte, mich zu empfehlen, für mich eine reiche Quelle von Unzufriedenheit geworden“ (Brief im Gauß-Archiv).

Im fünften Abschnitt dieses Aufsatzes wird ausführlich über die Untersuchungen berichtet werden, die Gauß in der Zeit von 1816 bis 1827 über die allgemeine Lehre von den krummen Flächen angestellt hat. Erst dort soll auf die Zusammenhänge mit den Grundlagen der Geometrie eingegangen und im Besonderen die Frage erörtert werden, ob Gauß die Beziehung zwischen der absoluten Geometrie und der Geometrie auf den Flächen konstanten Krümmungsmaßes gekannt hat. Auch die Ansichten Gaußens über mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten werden dann zur Sprache kommen.

Bald nach der Vollendung der Disquisitiones generales circa superficies curvas (Oktober 1827), die, wie Gauß am 11. Dezember 1825 an Hansen schrieb, „tief in vieles Andere, ich möchte sogar sagen, in die Metaphysik der Raumlehre eingreifen“ (Brief im Gauß-Archiv), hat sich Gauß erneut den Grundlagen der Geometrie zugewandt. Am 27. Januar 1829 berichtet er an Bessel: „Auch über ein anderes Thema, das bei mir fast schon 40 Jahr alt ist, habe ich zuweilen in einzelnen freien Stunden wieder nachgedacht, ich meine die ersten Gründe der Geometrie. . . . Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird dies auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Böoter scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte“ (W. VIII, S. 200).

daß er von Taurinus in der Vorrede zur Theorie der Parallellinien (S. XIII) und in der Vorrede der Elementa (S. V—VI) erwähnt worden war.

Von den Untersuchungen, auf die Gauß hindeutet, ist uns nur eine kurze Notiz vom November 1828 erhalten, in der unabhängig vom elften Axiom bewiesen wird, daß die Winkelsumme des Dreiecks nicht größer sein kann, als zwei Rechte (W. VIII, S. 190)[1]). Aber im April 1831 hat er begonnen, einiges von seinen Meditationen aufzuschreiben. „Ich wünschte doch, daß es nicht mit mir unterginge" (Brief an Schumacher vom 17. Mai 1831, W. VIII, S. 213).

Als diese Niederschriften darf man drei Zettel ansprechen, die aus dem Nachlaß W. VIII, S. 202—209 abgedruckt sind. In der Notiz [3], die wohl die früheste ist, und von der [1] und [2] nur genauere Ausführungen sind[2]), werden die grundlegenden Eigenschaften der parallelen oder, nach Johann Bolyai, asymptotischen Geraden hergeleitet, und in der letzten Nummer gelangt Gauß zu dem Parazykel, der Kurve, in die der Kreis übergeht, wenn der Halbmesser unendlich wird. Er nennt sie Trope, also Wendekreis (cercle tropique), ein deutliches Zeichen, daß er den Parazykel als den Uebergang von den eigentlichen Kreisen zu den Hyperzykeln aufgefaßt hat. Der Gang der Entwicklung hat große Ähnlichkeit mit dem von Johann Bolyai in der Scientia spatii.

Ein Ersatz für weitere Aufzeichnungen, freilich ein spärlicher, ist der Brief an Schumacher vom 12. Juli 1831, in dem Gauß die Folgen bespricht, die das Aufhören der Ähnlichkeit in der nichteuklidischen Geometrie nach sich zieht und die dort geltende Formel für den Umfang des Kreises angibt (W. VIII, S. 215). Es ist leider nur wenig, was wir von jenen sehr ausgedehnten Untersuchungen wissen, und auch aus den folgenden Jahren wird nur wenig hinzukommen.

8.

Die weitere Entwicklung bei Gauß; Johann Bolyai und Lobatschefskij (1831 — 1846).

Am 3. November 1823 hatte Johann Bolyai aus Temesvar, wo er als Pionierleutnant stand, seinem Vater mitgeteilt, er habe „aus Nichts eine neue, andere Welt geschaffen". Im Februar 1825 konnte er ihm den ersten Entwurf seiner absoluten Raumlehre

1) Dasselbe Verfahren hatte schon Legendre in der zweiten Auflage der Éléments de géométrie (1798) angewandt.

2) Nach einer brieflichen Mitteilung von H. S. Carslaw (Sydney) ist in Nr. 4 der Notiz [3] der Fall übersehen, daß die Geraden cb und l einander nicht schneiden; diese Lücke ist in der Notiz [1], Nr. 4, Fall II ausgefüllt.

vorlegen. Wolfgang war jedoch damit nicht einverstanden; besonders nahm er Anstoß an dem Auftreten der an sich unbestimmten Konstanten und der dadurch bedingten Vielheit der möglichen hypothetischen Systeme (Bol. S. 87). Vater und Sohn konnten sich nicht einigen, und schließlich kam man überein, Johann möge das Wesen der Sache in lateinischer Sprache darstellen, die kleine Abhandlung solle dem von Wolfgang geplanten Tentamen[1]) beigegeben und einer der herzustellenden Abzüge an Gauß gesandt werden; seinem Urteil über Wert oder Unwert wollten sich beide unterwerfen.

Im Juni 1831 wurden die Sonderabzüge des Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens fertig, und am 20. Juni wurde einer davon an Gauß abgesandt. Jedoch gelangte „der fatalen Choleraumstände wegen“ nur der gleichzeitig abgegangene Brief an Gauß in dessen Hände, an dessen Schluß Wolfgang, wie er an Johann schrieb, „eine kleine, klare Idee der Arbeit gab, damit er nicht im voraus sich grause vor der Materie“. Der Sonderabzug selbst kam nach längerer Zeit an Wolfgang zurück und ist Anfang Februar 1832 durch einen Bekannten der Bolyais, dem in Göttingen studierenden Baron v. Zeyk, Gauß übergeben worden (Bol. S. 91—92).

Unter dem ersten Eindruck, den die Schrift auf ihn machte, schrieb dieser am 14. Februar 1832 an Gerling: „Noch bemerke ich, daß ich dieser Tage eine kleine Schrift aus Ungarn über die nichteuklidische Geometrie erhalten habe, worin ich alle meine eigenen Ideen und Resultate wiederfinde, mit großer Eleganz entwickelt, obwohl in einer für jemand, dem die Sache fremd ist, wegen der Konzentrierung etwas schwer zu folgenden Form. Der Verfasser ist ein sehr junger österreichischer Offizier, Sohn eines Jugendfreundes von mir, mit dem ich 1798 mich oft über die Sache unterhalten hatte, wiewohl damals meine Ideen noch viel weiter von der Ausbildung und Reife entfernt waren, die sie durch das eigene Nachdenken dieses jungen Mannes erhalten haben. Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Größe“ (W. VIII, S. 220).

Am 6. März folgte der wiederholt angeführte Brief an Wolfgang, in dem Gauß seine Überraschung über das Zusammentreffen mit Johann ausdrückt und bittet, diesen herzlich von ihm zu grüßen und ihm seine besondere Hochachtung zu versichern

1) W. Bolyai, Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos . . . introducendi, t. I, Maros Vásárhely 1832, ed. secunda, Budapest 1897.

(W. VIII, S. 220—224). „Gaußens Antwort hinsichtlich Deines Werkes“, schrieb Wolfgang an den Sohn, „ist sehr schön und gereicht unserem Vaterlande und unserer Nation zur Ehre. Ein guter Freund sagt, es wäre eine große Satisfaktion“ (Bol. S. 72). Johann selbst hat es als eine große Enttäuschung und Kränkung empfunden, daß Gauß den Appendix keiner öffentlichen Anerkennung würdigte und das Vorrecht der ersten Entdeckung für sich in Anspruch nahm (Bol. S. 95—97).

Wie schon erwähnt wurde, gibt Gauß in dem Briefe als Probe ihm eigentümlicher Untersuchungen einen einfachen Beweis für den Satz, daß in der nichteuklidischen Geometrie der Inhalt des Dreiecks der Abweichung der Winkelsumme von zwei Rechten proportional ist; der Umstand, daß damals die Erinnerungen an den Verkehr mit Wolfgang in ihm wiederauftauchten, macht es wahrscheinlich, daß wir hierin einen Teil der Untersuchungen vor uns haben, die er im September 1799 angestellt hatte. Er schließt daran die Aufforderung, Johann möge sich mit der entsprechenden Aufgabe für den Raum beschäftigen, nämlich „den Kubikinhalt des Tetraeders (von vier Ebenen begrenzten Raumes) zu bestimmen“. Dieser hatte, wie sein Vater am 20. April 1835 an Gauß schreibt (Br. G.-Bolyai, S. 115), die Auflösung der Aufgabe bereits ein Jahr vor der Herausgabe des Appendix gefunden. Der Nachlaß Johanns enthält in der Tat sogar mehrere Verfahren, die zur Lösung dienen können (Bol. S. 109—118), darunter auch genau die Methode, die Gauß im Auge hatte und die er, seiner Gewohnheit gemäß, bei der Absendung des Briefes an Wolfgang vom 6. März 1832 in einem seiner Handbücher angedeutet hat (W. VIII, S. 228).

Auf das Volumen des Tetraeders bezieht sich noch eine zweite Aufzeichnung von Gauß, die etwa aus dem Jahre 1841 stammt. Sie steht auf einem Zettel, der sich in dem Sonderabdruck der Abhandlung Lobatschefskijs vom Jahre 1836 über die Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale gefunden hat; unter imaginärer Geometrie versteht der russische Mathematiker die nichteuklidische Geometrie.

Lobatschefskij (1793—1856) hatte in den Vorlesungen über Geometrie, die er 1815/16 an der Universität Kasan hielt, noch ganz auf dem Boden der euklidischen Geometrie gestanden und darin verschiedene Versuche zum Beweise des Parallelenaxioms gemacht (Lob. S. 362, 378). Verraten schon diese Vorlesungen eine eingehende Beschäftigung mit Legendres Elementen der Geometrie (Lob. S. 454), so lassen die späteren Schriften Lobatschefskijs erkennen, daß er sich in den folgenden Jahren in tief ein-

dringender Kritik mit Legendre auseinander gesetzt und, indem er es wagte, Folgerungen aus der Annahme des Nichtbestehens des Parallelenaxioms zu ziehen, sich allmählich mit dem Gedanken seiner Unbeweisbarkeit vertraut gemacht hat. Diesen Standpunkt vertritt er in einem ungedruckt gebliebenen Lehrbuch der Geometrie vom Jahre 1823 (Lob. S. 369). In den folgenden Jahren gelangte er zu der Erkenntnis, daß es eine in sich widerspruchsfreie Geometrie gibt, die des Parallelenaxioms nicht bedarf. Er entwickelte diese Geometrie soweit, daß er alle ihre Aufgaben rein analytisch behandeln konnte; auch gab er allgemeine Regeln zur Berechnung der Bogenlängen, Flächenräume und Rauminhalte. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen wurden am 12. Februar 1826 der Kasaner Gelehrten Gesellschaft vorgelegt; veröffentlicht sind sie jedoch erst 1829 und 1830 im Kasaner Boten (Lob. S. 371). Ihnen folgte eine Reihe weiterer, in russischer Sprache geschriebener Abhandlungen (1835—1838).

Um seinen Gedanken Verbreitung im westlichen Europa zu verschaffen, hatte Lobatschefskij 1837 in Crelles Journal eine kurze Darstellung seiner imaginären Geometrie gegeben, die freilich zur Einführung in den Gegenstand wenig geeignet war. Gauß scheint sie nicht beachtet zu haben, er ist vielmehr wohl erst im Jahre 1840 auf Lobatschefskij aufmerksam geworden, als dessen vortrefflich geschriebene deutsche Schrift: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, in Gersdorfs Repertorium abfällig besprochen wurde (Brief an Encke vom 1. Febr. 1841, W. VIII, S. 232). Durch einen merkwürdigen Zufall erhielt er um dieselbe Zeit durch den mit Lobatschefskij befreundeten Physiker der Kasaner Universität Knorr, der ihn 1840 in Göttingen besucht hatte, die schon erwähnte Abhandlung vom Jahre 1836. Später hat ihm der Astronom W. Struve in Pulkowa die anderen, in den Kasaner Gelehrten Schriften erschienenen Abhandlungen verschafft (W. VIII, S. 239); woher er die Abhandlung im Kasaner Boten vom Jahre 1829/30 bekommen hat, ist unaufgeklärt (Lob. S. 435).

Ein weiterer glücklicher Umstand war es, daß Gauß die in russischer Sprache geschriebenen Schriften lesen konnte. „Die Aneignung irgend einer neuen Fertigkeit als eine Art Verjüngung betrachtend“ (Brief an Schumacher vom 17. August 1839, Br. G.-Sch. III, S. 242) hatte er, nachdem er dem Sanskrit keinen Geschmack abgewinnen konnte, im Frühjahr 1839 angefangen, die russische Sprache zu erlernen. „Es dauerte kaum zwei Jahre, daß er ohne alle fremde Hilfe dieselbe so vollständig in seine

Gewalt bekam, daß er nicht nur alle Bücher in Prosa und Poesie mit Geläufigkeit lesen konnte, sondern daß er sogar seine Korrespondenzen nach St. Petersburg mitunter in russischer Sprache besorgte" (Sartorius, S. 91).

Über die russischen Abhandlungen urteilt Gauß in dem Brief an Gerling vom 8. Februar 1844, daß sie „mehr einem verworrenen Walde gleichen, durch den es, ohne alle Bäume erst einzeln kennen gelernt zu haben, schwer ist, einen Durchgang und Übersicht zu finden" (W. VIII, S. 237). Dagegen lobt er die Konzinnität und Präzision der Geometrischen Untersuchungen und wiederholt dieses Lob in dem Brief an Schumacher vom 28. November 1846: „Materiell für mich Neues habe ich [darin] nicht gefunden, aber die Entwicklung ist auf anderm Wege gemacht, als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von Lobatschefskij auf eine meisterhafte Art in echt geometrischem Geiste. Ich glaube Sie auf das Buch aufmerksam machen zu müssen, welches Ihnen gewiß ganz exquisiten Genuß gewähren wird" (W. VIII, S. 238).

Auf einem Zettel, der sich in einem der beiden Gauß gehörenden Abdrücke der Geometrischen Untersuchungen vorgefunden hat, ist in gedrängter Darstellung die bereits erwähnte (S. 52) Herleitung der Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie enthalten (W. VIII, S. 255—257); vermutlich ist sie verfaßt worden, als Gauß im Jahre 1846 „Veranlassung hatte, das Werkchen wieder durchzusehen" (W. VIII, S. 238). Wenn dort (S. 52) bemerkt wurde, daß die Aufzeichnung wohl den Gedankengang wiedergebe, den Gauß im Jahre 1816 eingeschlagen hat, so muß hier hervorgehoben werden, daß darin auch eine Auffassung zu Tage tritt, die Gauß erst später gewonnen hat. Als Endergebnis werden nämlich Formeln erhalten, die mit den Gleichungen der sphärischen Trigonometrie, bezogen auf eine Kugel vom Halbmessser $1/k$, identisch sind; die entsprechenden Gleichungen der nichteuklidischen Trigonometrie folgen daraus, wenn der Konstanten k ein rein imaginärer Wert erteilt wird. Daß diese Beziehung stattfindet, hatte Lobatschefskij am Schluß der geometrischen Untersuchungen (S. 60) angemerkt. Sie erscheint bei ihm als ein sonderbarer Zufall. Hat Gauß tiefer geschaut? Hat er durch den Buchstaben k andeuten wollen, daß die beiden Geometrien dem allgemeineren Begriff der Geometrie einer Mannigfaltigkeit konstanten Krümmungsmaßes untergeordnet werden können? Wie im fünften Abschnitt dieses Aufsatzes dargelegt werden wird, spricht vieles dafür, die Frage zu bejahen. Dann aber würde ein Licht fallen auf eine dunkle Stelle in dem vorher

angeführten Brief an Schumacher vom 28. November 1846: „Sie wissen, daß ich schon seit 54 Jahren (seit 1792) dieselbe Überzeugung habe (mit einer gewissen spätern Erweiterung, deren ich hier nicht erwähnen will“) (W. VIII, S. 238). Darf man noch weiter gehen? Hat Gauß seine ursprüngliche Überzeugung später dahin erweitert, daß er den Geometrien, die sich je nach dem Vorzeichen des Krümmungsmaßes ergeben, volle Gleichberechtigung zubilligte, hat er den Gedanken Riemanns vorausgenommen, man brauche den Raum nur als unbegrenzte, nicht als unendliche Mannigfaltigkeit aufzufassen? Die vorliegenden Anhaltspunkte gestatten es nur, Vermutungen auszusprechen.

Als Johann Bolyai am 3. November 1823 dem Vater von seinen neuen Entdeckungen berichtet hatte (Bol. S. 85), ermahnte ihn dieser, sich mit der Bekanntmachung zu beeilen, weil „manche Dinge gleichsam eine Epoche haben, wo sie dann an mehreren Orten aufgefunden werden, gleichwie im Frühjahr die Veilchen mehrwärts ans Licht kommen“ (Bol. S. 86). Die Namen Gauß, Schweikart, Taurinus, Lobatschewskij sind ein Beweis dafür, wie richtig Wolfgang geurteilt hatte.

Man hat allerdings dieses Zusammentreffen dadurch seiner Merkwürdigkeit zu entkleiden versucht, daß man vermutete, Bolyai und Lobatschefskij verdankten Gauß, der ohne Zweifel als Erster sich von den Fesseln der Ueberlieferung frei gemacht hat, die Fragestellung ihrer Untersuchungen (Lob. S. 428, 442). Daß Schweikart von Gauß unabhängig gewesen ist, unterliegt keinem Zweifel; dagegen sind bei Taurinus Anregungen durch Schweikart und Gauß wirksam gewesen, ohne daß ihm damit die Selbständigkeit in der Entdeckung der nichteuklidischen Trigonometrie abgesprochen werden darf.

Nachdem die hinterlassenen Schriften von Gauß und den beiden Bolyai zugänglich geworden sind, können die Beziehungen zwischen ihnen als völlig geklärt gelten; man beachte vor allem die beiden Tatsachen, daß Wolfgang, als Gauß im Herbst 1798 Göttingen verlassen hatte, das Parallelenaxiom zu beweisen bemüht war, und daß, wie die S. 48 wiedergegebene Stelle aus einem Briefe Wolfgangs beweist, Johann erst, nachdem er seine Untersuchungen bereits begonnen hatte, von seinem Vater die Mitteilung erhielt, Gauß habe fruchtlos über die Parallelen nachgedacht, eine Warnung eher, denn eine Anregung.

Bei Lobatschefskij hat man an eine Vermittlung durch Bartels (1769—1836) gedacht, der 1807 bis 1821 an der Universität Kasan gelehrt hat. Bartels ist nämlich Hilfslehrer an der

Schule gewesen, an der Gauß seinen ersten Unterricht empfing und hat sich des Knaben hilfreich angenommen; später, 1805 bis 1807, wo er als ein Schützling des Herzogs, wie Gauß, in Braunschweig lebte, hat er mit diesem freundschaftlich verkehrt. Wenn aber schon die ganze Entwicklung der Gedanken, wie sie vorher dargestellt worden ist, für die volle Selbständigkeit Lobatschefskijs spricht, so kommt noch dazu, daß Bartels, nach dem Zeugnis seines Schwiegersohnes O. Struve, in der imaginären Geometrie mehr eine geistreiche Spekulation als ein die Wissenschaft förderndes Werk gesehen hat; auch erinnert sich Struve nicht, daß Bartels jemals von anklingenden Ideen bei Gauß gesprochen habe (Lob. S. 378—382).

9.

Nachwirkung der Gaußschen Gedanken.

Bei der Zurückhaltung, die sich Gauß zur Regel gemacht hatte, haben während seines Lebens nur wenige Bevorzugte etwas von seinen Ansichten über die Grundlagen der Geometrie erfahren, und die Eingeweihten haben ihr Wissen für sich behalten. Zum Beispiel hat Dirichlet, mit dem Gauß bei dessen Besuch im März 1827 von der nichteuklidischen Geometrie gesprochen hatte (W. VIII, S. 188), untersucht, wie sich die Potentialtheorie im nichteuklidischen Raume gestalte, aber nichts darüber veröffentlicht (Lob. S. 444). In weiteren Kreisen wurde erst etwas davon bekannt, als Sartorius 1856 in seiner Schrift Gauß zum Gedächtniß berichtete, Gauß habe eine selbständige Geometrie ausgebildet, die gelte, wenn man das Parallelenaxiom nicht zugebe (W. VIII, S. 267—268). Diese Andeutung wurde bald darauf bestätigt durch den 1860 herausgekommenen zweiten Band des Briefwechsels zwischen Gauß und Schumacher (Briefe vom Jahre 1831, W. VIII, S. 210—219), und 1865 erschien der fünfte Band mit dem Briefe vom 28. November 1846 (W. VIII, S. 238), durch den die Aufmerksamkeit auf Lobatschefskij gelenkt wurde. Nachdem jetzt, um mit Hoüel zu reden, die imposante Autorität Gaußens gesprochen hatte, fand der Hinweis Beachtung, den Baltzer 1867 in der zweiten Auflage seiner Elemente der Mathematik auf J. Bolyai und Lobatschefskij gab; durch ihn angeregt veröffentlichte Hoüel französische Uebersetzungen der Geometrischen Untersuchungen und der Scientia spatii absolute vera und machte so diese verschollenen Schriften allgemein zugänglich. Damit war der Boden vorbereitet für eine verständnis-

volle Aufnahme der zu derselben Zeit aus Riemanns Nachlaß herausgegebenen Habilitationsrede vom Jahre 1854: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen; dazu kamen 1868 die Aufsätze von Helmholtz. Während man bis dahin die Beschäftigung mit dem elften Axiom als ein Vorrecht unklarer Köpfe angesehen und mit den Bemühungen um die Quadratur des Kreises und das Perpetuum mobile auf eine Stufe gestellt hatte, erregten jetzt die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie allgemeine Teilnahme, und indem man noch die Kritik der Arithmetik hinzunahm, entstand ein neuer Zweig der Mathematik, der als Axiomatik bezeichnet wird.

C. Sonstige Beiträge zur Axiomatik.

10.

Weitere Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.

Wenn von den Untersuchungen die Rede ist, die Gauß über die Grundlagen der Geometrie angestellt hat. so denkt man dabei vor allem an die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie. Gauß hat sich jedoch keinesweges auf das Parallelenaxiom beschränkt, er hat sich vielmehr noch mit einer Reihe anderer Fragen beschäftigt, die man heute ebenfalls der Axiomatik zuweisen würde. Hierüber soll zum Schluß dieses Abschnittes berichtet werden.

Es kann nicht Wunder nehmen, daß die üblichen Darstellungen der euklidischen Geometrie einen Mann, der an die Schärfe der Begriffsbestimmungen und die Strenge der Ableitungen hohe Forderungen stellte, in mehr als einem Punkte nicht befriedigten. Sein tiefdringender Blick erkannte hier Lücken, die zum Teil erst nach Jahrzehnten von anderen Geometern aufgedeckt worden sind. Zum Beispiel spricht Gauß in dem Brief an Bolyai vom 6. März 1832 von dem „Teil des Planums, der zwischen drei Geraden liegt" und macht dazu die Anmerkung: „Bei einer vollständigen Durchführung müssen solche Worte wie z w i s c h e n auch erst auf klare Begriffe gebracht werden, was sehr gut angeht, was ich aber nirgends geleistet finde" (W. VIII, S. 222).

Die Erklärung der geraden Linie war Gegenstand des Gespräches gewesen, das Gauß und Wolfgang Bolyai bei ihrem ersten gemeinsamen Spaziergange im Herbst 1796 geführt hatten.

Wie Johann Bolyai erzählt, erwiderte Gauß auf die Äußerungen seines Vaters: „Ja wahrlich, die Gerade wird schändlich behandelt; sie ist in der Tat die Linie, welche sich in sich selbst dreht“ (Bol. S. 197). Dieselbe Erklärung hat er in einer Vorlesung über praktische Astronomie gegeben, die Lübsen im Jahre 1830 bei ihm gehört hat (W. VIII, S. 196); auch die weitere Bemerkung bei Lübsen, das angegebene Merkmal sei praktisch wichtig, z. B. bei der Justierung eines Fernrohres, bei der richtigen Bohrung eines Zylinders usw., ist wohl Gaußschen Ursprungs.

Im Tagebuch steht unter dem 28. Juli 1798 die Eintragung: „Plani possibilitatem demonstravi“ (T. Nr. 72). Was Gauß hiermit meinte, zeigt eine Stelle in dem Briefe an Bessel vom 27. Januar 1829, die Erklärung der Ebene als einer Fläche, in der die irgend zwei Punkte verbindende gerade Linie ganz liegt, enthalte mehr, als zur Bestimmung der Fläche nötig ist, und involviere tacite ein Theorem, das erst bewiesen werden muß (W. VIII, S. 200); in ähnlicher Weise äußert sich Gauß auch in einer wohl aus der gleichen Zeit stammenden Aufzeichnung (W. VIII, S. 194). Auch in dem Brief an W. Bolyai vom 6. März 1832 erklärt es Gauß für unerläßlich, „die Möglichkeit eines Planums zu erweisen“ (W. VIII, S. 224). Ein solcher Beweis steht im Handbuch 19 Be, S. 153 (W. VIII, S. 194); durch die unmittelbar vorhergehenden Notizen, die den Dreiecks-Inhalt und das Tetraeder-Volumen in der nichteuklidischen Geometrie betreffen (W. VIII, S. 226—228), ist als Zeit der Niederschrift der März 1832 gesichert. Die Ebene denkt sich Gauß erzeugt durch die Drehung des einen Schenkels eines rechten Winkels um den anderen, festgehaltenen Schenkel. Auf Anregungen von Gauß gehen wohl auch die Abhandlungen von Deahna (1837) und Gerling (1840) über die Erklärung der Ebene zurück[1]).

Bei der Lehre von den Vielecken pflegt man stillschweigend oder ausdrücklich vorauszusetzen, daß der Umfang sich selbst nicht schneidet. Gauß hat schon früh die Frage ins Auge gefaßt, was man unter dem Inhalt eines beliebigen Vielecks zu verstehen habe; in Nr. 24 dieses Aufsatzes wird man hierüber Genaueres finden. Bei seinen Untersuchungen über die allgemeine

1) Deahna, Demonstratio theorematis esse superficiem planam, Marburg 1837; Chr. L. Gerling, Fragment über die Begründung des Begriffs der Ebene, Crelles Journal, Bd. 20, 1840, S. 332. Baltzer bemerkt in der zweiten Auflage seiner Elemente, Bd. II, 1867, § 4, Gauß sei der Meinung gewesen, Deahnas Darstellung lasse sich von einigen Mängeln, die in ihr anzutreffen seien, befreien; vgl. auch W. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, Bd. II, Paderborn 1898, S. 183.

Lehre von den krummen Flächen ist er auf den Gegenstand zurückgekommen und hat beliebige Figuren betrachtet, deren Umfang sich selbst schneidet (Brief an Olbers vom 20. Oktober 1825, Br. G.-O. 2, S. 431, W. VIII, S. 399; vgl. auch W. IV, S. 227). Auch die Zerlegung der Vielecke in Dreiecke hat er untersucht (W. VIII, S. 280); sein Verfahren führt zu einer Herleitung der Winkelsumme des n-Ecks, die dem üblichen, unzulänglichen Induktionsbeweise vorzuziehen ist.

Eine Anfrage Gerlings vom 20. Juni 1846 über die Unterscheidung rechts- und linksgewundener Schrauben (W. VIII, S. 247) veranlaßte Gauß zu Ausführungen über die Begriffe rechts und links, die er „ein Kernstück eines viel ausgedehntern Systems" nennt (Brief vom 23. Juni 1846, W. VIII, S. 249). Er war bereits in der Selbstanzeige der zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste vom 15. April 1831 (W. II, S. 177), in der er seine geometrische Versinnlichung der komplexen Größen darlegt, auf den Unterschied von rechts und links eingegangen und hatte bemerkt, dieser Unterschied sei „sobald man vorwärts und rückwärts in der Ebene und oben und unten in Beziehung auf die beiden Seiten der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, in sich völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes andern nur durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen mitteilen können". In einer Fußnote hatte er hinzugefügt: „Beide Bemerkungen hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für seine Meinung, daß der Raum nur Form unserer äußeren Anschauung sei, zu finden glauben konnte, da die zweite so klar das Gegenteil und daß der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben muß, beweiset" (vgl. auch W. X 1, S. 409); eine ähnliche Bemerkung enthält der Brief an Schumacher vom 8. Februar 1846 (W. VIII, S. 247)[1]. Einen zweiten Grund gegen Kants Meinung hat Gauß in dem Brief an W. Bolyai vom 6. März 1832 vorgebracht. „Gerade in der Unmöglichkeit zwischen Σ [Euklidischer Geometrie] und S [nichteuklidischer Geometrie] a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, daß Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung" (W. VIII, S. 224).

---

1) Vgl. noch E. Study, Die Begriffe Links, Rechts, Windungssinn und Drehungssinn, Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, Bd. 21, 1913, S. 193; hier wird auf den Briefwechsel zwischen Gauß und Gerling ausführlich Bezug genommen.

In dasselbe Kapitel wie die Erörterungen über die Begriffe von Rechts und Links gehören die Einführung der gerichteten geraden Linien (W. VIII, S. 408), die Unterscheidung zwischen den beiden zu einem größten Kreise der Kugel gehörenden Polen (W. VII, S. 177, IV, S. 221) und die Sätze, daß symmetrische sphärische Dreiecke flächengleich, symmetrische Raumstücke volumengleich sind. Gerling hatte den ersten Satz durch Zerlegung in Teil-Dreiecke bewiesen, die paarweise kongruent sind (Brief an Gauß vom 25. März 1813, W. VIII, S. 240). Als er am 26. Februar 1844 darauf zurückkam, forderte ihn Gauß auf, den zweiten zu beweisen (Brief vom 8. April 1844, W. VIII, S. 241). Gerling konnte auch hier zeigen, daß die Gebilde sich in Pyramiden zerlegen lassen, die paarweise kongruent sind (Brief vom 15. April 1844, W. VIII, S. 242)[1]. Nunmehr warf Gauß die Frage auf, ob man in ähnlicher Weise, unabhängig von der Exhaustionsmethode, zeigen könne, daß Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe gleichen Rauminhalt haben (Brief vom 17. April 1844, W. VIII, S. 244)[2], aber hier gelangte Gerling nicht zum Ziele (Brief vom 7. Juli 1844, W. VIII, S. 245). Durch die Herausgabe der bis dahin unbekannten Briefe von Gauß und Gerling im achten Bande der Werke (1900) wurde die Aufmerksamkeit auf die Frage der Volumengleichheit der Polyeder gelenkt, und so verdanken wir den Beweis Dehns, daß die Exhaustionsmethode bei der Volumenbestimmung unentbehrlich ist[3], einer Anregung von Gauß.

---

1) Gerlings Beweis ist von Hessel vereinfacht worden: Einige neue Beweise von Lehrsätzen aus der Elementar-Stereometrie, Archiv der Mathematik und Physik, 1. Reihe, Bd. 7, 1846, S. 284; Hessel bemerkt, daß Gerling durch Gauß zu seinen Untersuchungen veranlaßt worden sei.

2) Es ist anzunehmen, daß Gauß diese Fragestellung dem Tentamen Wolfgang Bolyais verdankte; dieser hatte die Frage von der „endlichen Gleichheit" bei Flächenstücken ausführlich untersucht und dazu bemerkt: ob eine beliebige dreiseitige Pyramide durch endliche Gleichheit auf ein Prisma zurückgeführt werden könne oder nicht, sei noch nicht klargestellt (Tentamen. t. II, S. 175, ed. secunda, Budapest 1904, S. 241; vgl. Bol. S. 40 und 188).

3) M. Dehn, Über raumgleiche Polyeder, Göttinger Nachrichten 1900, S. 345; Über den Rauminhalt, Math. Annalen, Bd. 55, 1901, S. 465; vgl. jedoch schon R. Bricard, Sur une question de géométrie rélative aux polyèdres, Nouv. ann. de math., série 3, t. 15, 1896, S. 331 und G. Sforza, Un' osservazione sull' equivalenza dei poliedri per congruenza delle parti, Periodico di mat., t. 12, 1897, S. 105.

Abschnitt II.
Geometria situs.

11.
Allgemeines über die Geometria situs bei Gauß.

Von den Schriften, die Gauß veröffentlicht hat, bezieht sich keine unmittelbar auf die Geometria situs, und doch hat dieser Gegenstand ihn sein ganzes Leben hindurch beschäftigt. Aus Gesprächen mit Gauß, die in dessen letzte Lebensjahre, 1847 bis 1855, fallen, berichtet Sartorius v. Waltershausen: „Eine außerordentliche Hoffnung setzte er auf die Ausbildung der Geometria situs, in der weite, gänzlich unangebaute Felder sich befänden, die durch unseren gegenwärtigen Kalkül noch so gut wie garnicht beherrscht werden könnten“ (Sartorius, S. 88). Eine ganz ähnliche Äußerung hatte er aber etwa 50 Jahre früher getan. Am 12. Oktober 1802 schrieb er an Olbers: „.... auch werde nächstens ein Werk von Carnot, Géométrie de position[1]) herauskommen, worauf ich überaus begierig bin. Dieser bisher fast ganz brachliegende Gegenstand, über den wir nur einige Fragmente von Euler und einem von mir sehr hochgeschätzten Geometer Vandermonde haben, muß ein ganz neues Feld eröffnen und einen ganz eigenen, höchst interessanten Zweig der erhabenen Größenlehre bilden“ (Br. G.-O. 1, S. 103).

In der Tat hatte Euler die Frage behandelt, ob es möglich sei, die sieben Brücken, die in Königsberg über die Pregelarme führen, hinter einander und jede nur einmal zu überschreiten[2]). Er hatte ferner die grundlegende Beziehung zwischen den Anzahlen der Ecken, Kanten und Seitenflächen eines konvexen Polyeders entdeckt und bewiesen[3]). Endlich hatte er sich mit den

---

1) L. Carnot, Géométrie de position, Paris 1803; ins Deutsche übersetzt von H. C. Schumacher, 2 Bände, Altona 1810. Unter Géométrie de position versteht jedoch Carnot etwas anderes als die Geometria situs, nämlich Untersuchungen, die sich auf die Anwendung negativer Zahlen in der Geometrie beziehen. Später hat man vielfach auch die projektive Geometrie als Geometrie der Lage bezeichnet und ihr die Geometrie des Maßes gegenübergestellt, was ebenfalls mit der Geometria situs im Sinne von Gauß nichts zu tun hat.

2) L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Comment. acad. sc. Petrop. 8 (1736), 1741, S. 128 (vorgelegt den 26. August 1735); vgl. den Artikel Situation von d'Alembert, Encyclopédie méthodique, Abteilung Math., Bd. III, Paris 1789, S. 53.

3) L. Euler, Elementa doctrinae solidorum, Novi Comment. acad. sc. Petrop. 4

Rösselsprüngen auf dem Schachbrett befaßt [1]). An ihn anknüpfend hatte Vandermonde die mathematische Behandlung des Rösselsprunges gefördert und sein Verfahren auf die analytische Darstellung von Geweben ausgedehnt [2]).

Es seien noch zwei Äußerungen von Gauß angeführt, die aus der Mitte seiner Lebensbahn überliefert sind.

Am 30. Oktober 1825 berichtet Gauß seinem Freunde Schumacher, daß er in den Untersuchungen über die allgemeine Lehre von den krummen Flächen Fortschritte gemacht habe, und sagt: „Man muß den Baum zu allen seinen Wurzelfäden verfolgen, und manches davon kostet mir wochenlanges angestrengtes Nachdenken. Vieles davon gehört sogar in die Geometria situs, ein fast noch ganz unbearbeitetes Feld“ (W. VIII, S. 400).

In einer Aufzeichnung im Handbuch 19 Be, die vom 22. Januar 1833 datiert ist, heißt es: „Von der Geometria Situs, die Leibniz ahnte, und in die nur einem paar Geometern (Euler und Vandermonde) einen schwachen Blick zu tun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts. Eine Hauptaufgabe aus dem Grenzgebiet der Geometria Situs und der Geometria Magnitudinis wird die sein, die Umschlingungen zweier geschlossener oder unendlicher Linien zu zählen“ (W. V, S. 605).

Bei den vorstehenden Worten hat Gauß wohl an den Brief gedacht, den Leibniz am 8. September 1679 an Huygens gerichtet hatte und der damals von Uylenbroek veröffentlicht worden war [3]).

(1752/3), 1758, S. 109 (gelesen Berlin, den 26. Nov. 1750); Demonstratio nonnullarum proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita, ebenda, S. 140 (vorgelegt den 6. April 1752); vgl. A. L. F. Meister, Commentatio de solidis geometricis, Comment. Soc. sc. Gotting. Vol. 7 (1784/85) 1786, Comm. Math. S. 1.

1) L. Euler, Solution d'une question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse, Hist. de l'Acad., année 1759, Berlin 1766, Mémoires, S. 310.

2) Ch. A. Vandermonde, Remarques sur les problèmes de situation, Hist. de l'Acad. année 1771, Paris 1774, S. 566. V. sagt: „Leibniz promit un calcul de situation et mourut sans rien publier. C'est un sujet où tout reste à faire et qui mériterait bien qu'on s'en occupât“. — Zu nennen wären ferner noch die Abhandlungen: N. Fergola, Nuovo metodo da risolvere alcuni problemi di sito e posizione, Atti dell'Accad., Napoli 1787, S. 119: Nuove ricerche sulle risoluzioni dei problemi di sito, ebenda, S. 157 und A. N. Giordano, Nuovo metodo da risolvere alcuni problemi di sito e posizione, ebenda, S. 139.

3) J. Uylenbroek, Chr. Hugenii aliorumque seculi XVII. virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae, Haag 1833, Heft 1, S. 9; im Heft 2, S. 6 ist der dem Briefe beigelegte Versuch einer geometrischen Charakteristik abgedruckt. Beides findet man wieder in Leibnizens Mathematischen Schriften,

Leibniz schreibt dort: „Je crois qu'il nous faut encore une autre Analyse proprement géométrique ou linéaire qui nous exprime directement situm, comme l'Algèbre exprime magnitudinem".

Die Göttinger Gelehrten Anzeigen vom Jahre 1834 enthalten eine ausführliche Besprechung der Uylenbroekschen Veröffentlichung von M. Stern (seit 1829 Privatdozent der Mathematik in Göttingen), den der Essay von Leibniz um so mehr interessiert hatte, „als er sich erinnert, von dem größten Mathematiker unserer Zeit einige Ideen über Geometrie gehört zu haben, die mit einigen hier vorkommenden durchaus übereinstimmen" (S. 1940). Hierzu ist jedoch zu bemerken, daß Leibniz weniger an die Geometria situs im Sinn von Gauß „als an einen geometrischen Algorithmus denkt, der für einzelne geometrische Probleme eher eine genuine Lösungsmethode liefert, als die Methode der gewöhnlichen analytischen Geometrie" [1]).

Bei der Geometria situs besitzen wir in den wenigen uns erhaltenen Aufzeichnungen und überlieferten gelegentlichen Äußerungen nur die Spuren ausgedehnter Untersuchungen, die Gauß angestellt hatte. Dies geht auch daraus hervor, daß er wiederholt geplant hat, darüber etwas durch den Druck bekannt zu machen. So schreibt Möbius am 2. Februar 1847 an Gauß: „Wie ich von W. Weber gehört habe, haben Sie schon vor einigen Jahren beabsichtigt, als Einleitung oder Vorbereitung der Theorie der elektrischen oder magnetischen Strömungen eine Abhandlung über alle möglichen Umschlingungen eines Fadens zu schreiben. Steht es nicht zu hoffen, daß diese Abhandlung bald erscheinen wird? Die Erfüllung dieser Hoffnung würde mir und gewiß auch vielen Andern sehr erwünscht sein" (Brief im Gauß-Archiv). Gauß scheint dem Gedanken einer solchen Veröffentlichung näher getreten zu sein, hat jedoch schließlich davon Abstand genommen. Dies ergibt sich aus einem Briefe an Möbius vom 13. August 1849, in dem er diesem zunächst für die Übersendung einer Abhandlung über die Gestalten der Kurven dritter Ordnung dankt und ihn auffordert, in entsprechender Weise die gestaltlichen Verhältnisse der algebraischen Kurven zu untersuchen, die in Gaußens

---

herausgegeben von C. J. Gerhardt, 1. Abt., Bd. 2, Berlin 1850, S. 19, 20, ferner in Graßmanns Gesammelten mathematischen und physikalischen Werken, Bd. I, Teil 1, Leipzig 1894, S. 417, in den Oeuvres complètes von Chr. Huygens, Bd. 8, Haag 1899, S. 216, 219 und endlich bei C. J. Gerhardt, Der Briefwechsel von Leibniz mit Mathematikern, Bd. I, Berlin 1899, S. 568, 570.

1) M. Dehn und P. Heegaard, Analysis situs, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. III, Teil 1, S. 154.

Dissertation (1799) auftreten, und dann fortfährt: „Anderes damit Verwandtes hat mich vielfach beschäftigt, und ich wollte erst in meiner neulich [16. Juli 1849] in der Sozietät gehaltenen Vorlesung [Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen] die Darstellung der Hauptmomente jener Untersuchung als dritten Teil bestimmen; aber ich würde zur Ausarbeitung dieser Darstellung einer viel größeren Muße bedurft haben, als sie mir zu Gebote gestanden hat" (W. X 1, S. 109). Eine Andeutung dieser Absicht ist wohl die Stelle in Art. 3 der Beiträge, wo Gauß bemerkt, die von ihm vorzutragende Beweisführung für den Fundamentalsatz der Algebra „gehöre im Grunde einem höhern, von Räumlichem unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstrakten Größenlehre an, deren Gegenstand die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Größenkombinationen sind, einem Gebiete, welches zur Zeit noch wenig angebauet ist, und in welchem man sich auch nicht bewegen kann ohne eine von räumlichen Bildern entlehnte Sprache" (W. III, S. 79). Vielleicht enthält das Bruchstück einer Abhandlung über die Konvergenz der Reihen (W. X 1, S. 407—410) einen Teil jener Untersuchungen (vgl. S. 75—76).

Im Folgenden wird zunächst berichtet werden, was sich unmittelbar auf Grund der nachgelassenen Aufzeichnungen und mittelbar an der Hand von Veröffentlichungen über andere Gegenstände über die Geometria situs bei Gauß sagen läßt. Alsdann soll versucht werden, dem Einfluß nachzugehen, den mündliche Andeutungen von Gauß auf die Entwicklung dieses Zweiges der Größenlehre gehabt haben.

12.

Verknotungen und Verkettungen von Kurven.

Eine der ältesten Aufzeichnungen von Gauß, die uns überhaupt im Nachlaß erhalten sind, ist ein Blatt mit der Jahreszahl 1794. Es trägt die Ueberschrift: A collection of knots und enthält 13 sauber gezeichnete Ansichten von Knoten mit daneben geschriebenen englischen Namen; man darf wohl annehmen, daß es sich um einen Auszug aus einem englischen Buche über Knoten handelt. Dabei liegen zwei weitere Zettel mit Zeichnungen von Knoten; der eine ist datiert 1819, der andere stammt wohl aus noch späterer Zeit, denn Gauß hat darauf vermerkt: „Riedl, Beiträge zur Theorie des Sehnenwinkels, Wien 1827".

Auf die Verknotungen geschlossener Kurven beziehen sich die Bemerkungen, die aus dem Nachlaß W. VIII, S. 271—285 abge-

druckt sind. Im Besonderen hat Gauß in einer aus dem Dezember 1844 stammenden Notiz die zahlreichen Formen ermittelt, die geschlossene Kurven mit vier Knoten aufweisen können.

Die Verkettung von zwei Kurven im Raume betrifft die schon erwähnte Bemerkung vom 22. Januar 1833 (W. V, S. 605), in der am Schluß die bekannte Integralformel für die Anzahl der Umschlingungen mitgeteilt wird. „Es war damit der erste Anfang gemacht worden zu der später vor allem durch die von W. Dyck benutzte Kroneckersche Charakteristikentheorie erfolgreichen Anwendung der höheren Analysis auf die Geometria situs“.[1])

Die Bestimmung der gegenseitigen Lage von Kurven in der Ebene ist das Mittel, dessen sich Gauß in seiner Dissertation (1799) bei der Herleitung des Fundamentalsatzes der Algebra bedient hatte[2]). Noch stärker tritt dieser Gesichtspunkt bei der neuen Darstellung vom Jahre 1849 hervor: „Ich werde die Beweisführung in einer der Geometrie der Lage entnommenen Einkleidung darstellen, weil jene dadurch die größte Anschaulichkeit und Einfachheit gewinnt“ (W. III, S. 79). Es folgt die vorher (S. 70) angeführte Bemerkung über die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Größenkombinationen. Hierin liegt jedoch keine Einschränkung, weil „zwar die räumliche Anschauung der beste Führer in der Entdeckung neuer Sätze [der Geometria situs] und ihrer Beweise ist, man aber in jedem einzelnen dieser Fälle sehen kann, daß die in Betracht kommenden Schlüsse auch allein mit Hilfe abstrakter Entwicklungen gemacht werden können“[3]).

Endlich sind noch die Untersuchungen zu nennen, die Gauß über die möglichen Verteilungsarten der geozentrischen Örter eines Planeten auf dem Zodiakus angestellt hat (W. VI, S. 106), und die hierbei erwähnten Fälle eines kettenartigen Ineinandergreifens zweier Planetenbahnen, wie es bei den Asteroiden mehrfach verwirklicht ist.

---

1) M. Dehn und P. Heegaard, a. a. O., S. 155. Man findet hier auch ausführliche Angaben über die anschließenden Arbeiten. Hinzuzufügen ist, daß Fr. Zöllner, Naturwissenschaft und christliche Offenbarung, Leipzig 1881, S. 100 berichtet, ein gewisser Schürlein, ein Schüler von Gauß, habe sich sehr eingehend und unter stetiger Teilnahme von Gauß mit diesem Gegenstande beschäftigt; leider ist es nicht möglich gewesen, Näheres hierüber zu ermitteln.

2) In der Fußnote zum art. 21 der Dissertation sagt Gauß ausdrücklich, Beweise, die sich auf die Geometria situs stützten, seien nicht weniger schlüssig als solche, bei denen man sich der Prinzipien der Geometria magnitudinis bediene.

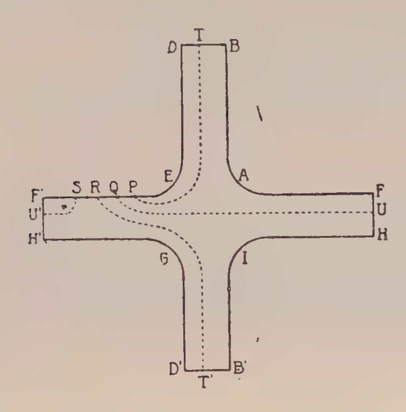
3) M. Dehn und P. Heegaard, a. a. O., S. 170.

13.
Möbius, Listing, Riemann.

Mit der Frage, welchen Einfluß Gauß auf die weitere Entwicklung der Geometria situs gehabt hat, kommen wir auf ein schwieriges Gebiet, denn ein solcher Einfluß war im Wesentlichen nur möglich durch mündliche Äußerungen, von denen manche, wie es scheint, gar erst durch Mittelsleute an die Stelle gekommen sind, wo sie gewirkt haben; es waren Funken, die nur da zündeten, wo schlummernde Energien zu wecken waren, und es heißt daher nicht, hervorragende Männer wie Möbius, Listing, Riemann verkleinern, wenn man Gauß einen gewissen Anteil an ihren Entdeckungen zuschreiben zu müssen glaubt.

Möbius (1790—1868) ist nach Abschluß seiner Leipziger Studien im Herbst 1813 als Dreiundzwanzigjähriger nach Göttingen gekommen und hat dort etwa ein Semester lang unter Leitung von Gauß auf der Sternwarte gearbeitet (Brief von Gauß an Olbers vom 23. April 1814, Br. G.-O., 1, S. 543). Es war die Zeit, wo man in der Astronomie von einer Gaußschen Schule sprechen konnte, aus der Encke, Gerling, Nicolai, Schumacher, Seeber, Struve, Wachter hervorgegangen sind. Daß der junge Sachse damals in nähere Beziehungen zu Gauß gekommen ist, zeigt der freundschaftliche Ton der Briefe, die lange Jahre hindurch zwischen ihnen gewechselt worden sind. Es bestand zwischen Gauß und Möbius, als dieser in Göttingen weilte, jenes Verhältnis, das Gauß am förderlichsten schien. „Meiner Einsicht nach ist [ein förmlicher Unterricht] bei solchen Köpfen, die nicht etwa nur eine Masse von Kenntnissen einsammeln wollen, sondern denen es hauptsächlich daran liegt, ihre eigenen Kräfte zu üben, sehr unzweckmäßig; einen solchen muß man nicht bei der Hand fassen und zum Ziele führen, sondern nur von Zeit zu Zeit ihm Winke geben, um sich selbst auf dem kürzesten Wege hinzufinden“ (Brief an Schumacher vom 2. Oktober 1808, Br. G.-Sch. I, S. 6). Wie weit die zahlreichen Berührungspunkte zwischen den Untersuchungen von Möbius und den Gedanken von Gauß auf Gespräche oder auch, wie Listing einmal sagt, auf „hingeworfene Äußerungen“ zurückzuführen sind, vielleicht zum Teil in unbewußter Nachwirkung, entzieht sich unserer Kenntnis. In einem Falle freilich hat sich Möbius ausdrücklich auf eine mündliche Mitteilung von Gauß bezogen, nämlich in Aufzeichnungen aus den Jahren 1858 und 1859 über die Topologie der krummen Flächen und im Besonderen der Polyeder, Aufzeich-

nungen, die erst 1886 durch Reinhardt aus dem Nachlaß herausgegeben worden sind[1]). In dem Abschnitt über Flächen und Polyeder höherer Klasse [mehrfachen Zusammenhanges] werden auch die Eigenschaften eines Doppelringes betrachtet, und es heißt: „Man kann sich einen solchen Doppelring leicht zur Anschauung bringen, wenn man ein Blatt Papier in Form eines



Kreuzes ausschneidet und hierauf die Enden FH und $F'H'$ (siehe die Figur) des einen Paares einander gegenüberliegender Arme etwa oberhalb der anfänglichen Ebene des Kreuzes und die Enden BD und $B'D'$ des anderen Paares unterhalb dieser Ebene mit einander vereinigt. Es besitzt diese nur von einer Linie $A\overline{BB'}I\overline{HH'}G\overline{D'D}E\overline{F'F}A$ begrenzte Fläche noch die merkwürdige Eigenschaft (nach einer mündlichen Mitteilung von Gauß; wodurch G. zur Betrachtung der Fläche geführt worden ist, ist mir unbekannt), daß man von irgend vier auf ihrem Perimeter auf einander folgenden Punkten P, Q, R, S den ersten mit dem dritten und den zweiten mit dem vierten durch zwei Linien $P\overline{TT'}R$ und $Q\overline{UU'}S$ verbinden kann, welche in der Fläche selbst liegen und dennoch einander nicht schneiden, — wie dies doch immer geschehen würde, wenn die Fläche eine Grundform der ersten Klasse [einfach zusammenhängend] wäre“ (S. 541).

Als die Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig im Jahre 1844 die Preisaufgabe gestellt und, nachdem keine Lösung eingelaufen war, 1845 wiederholt hatte:

---

1) A. F. Möbius, Gesammelte Werke II, Leipzig 1886, S. 518—559. Einen Teil der darin enthaltenen Ergebnisse hat Möbius veröffentlicht: Theorie der elementaren Verwandtschaft, Leipziger Berichte 1863, S. 18, Werke II, S. 433; Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders, ebenda 1865, S. 31, Werke II, S. 473.

„Es soll nach den vorhandenen Bruchstücken die von Leibniz geplante geometrische Charakteristik wiederhergestellt und weiter ausgebildet werden“, hat Möbius Graßmann darauf hingewiesen, und dessen Abhandlung: Geometrische Analyse hat am 1. Juli 1846 auf den eingehend begründeten Antrag von Drobisch und Möbius den Preis erhalten[1]. Möbius hat am 2. Februar 1847 einen Abdruck der Preisarbeit an Gauß gesandt[2]), sicherlich in der Annahme, daß dieser an dem Gegenstande Anteil nehme.

Weiteres über Beziehungen zwischen Gedanken von Gauß und von Möbius findet man im vierten Abschnitt dieses Aufsatzes.

Listing (1806—1882) hatte in Göttingen Mathematik und Naturwissenschaften studiert und war dort 1834 unter dem Dekanat von Gauß mit einer Abhandlung über die Flächen zweiter Ordnung promoviert worden. Noch in demselben Jahre schloß er sich Sartorius v. Waltershausen auf einer Reise nach Sizilien an und wurde sein Gehilfe bei den geologischen Untersuchungen am Aetna. Nach Deutschland zurückgekehrt ist er seit 1837 als Lehrer der Maschinenkunde am Polytechnikum zu Hannover und seit 1839 als Professor der Physik an der Universität Göttingen tätig gewesen.

Der Nachlaß Listings[3]) zeigt, daß er sich schon früh mit dem „Knotenwesen“ und seinen Beziehungen zur Praxis der Seeleute und der Pioniere befaßt hat. In einem Briefe an einen gewissen Müller in Göttingen, datiert Catania, den 1. April 1836 schreibt er: „Die erste Idee, mich in der Sache [der Geometria situs] zu versuchen, ist mir durch allerlei Vorkommnisse bei den praktischen Arbeiten auf der Sternwarte in Göttingen und durch hingeworfene Äußerungen von Gauß beigekommen“. Daß Gauß in den Vorlesungen über praktische Astronomie die Geometria situs berührt hat, bezeugt die Theorie des Vortrags von Lehren, die Raumverhältnisse betreffen, W. VIII, S. 196—199.

In demselben Sinne schreibt Listing in einer 1856 verfaßten kurzen Lebensbeschreibung: „Einen andern Gegenstand meiner Beschäftigung bildet seit langer Zeit die Untersuchung der modalen (nichtquantitativen) Raumverhältnisse, zu der schon Leibniz die Idee gefaßt hatte. Ich habe zu dieser fast noch ganz unaus-

---

1) Vgl. Graßmanns Leben von F. Engel, Graßmanns Werke III, Teil 2, Leipzig 1911, S. 108—118. Die Abhandlung ist abgedruckt in den Werken Bd. I, Teil 1, S. 321—399.

2) Graßmanns Werke III, Teil 2, S. 117.

3) Die betreffenden Aufzeichnungen besitzt teils die Universitätsbibliothek in Göttingen, teils der Verfasser dieses Aufsatzes.

gebauten quasi-mathematischen Disziplin, zum Teil durch Gauß aufgemuntert, in den Vorstudien zur Topologie, Göttingen, 1847, einen ersten Versuch veröffentlicht, dem ich künftig noch andere hoffe folgen lassen zu können".

Nach seinen Aufzeichnungen hat Listing schon während des Aufenthalts in Italiens, seit 1835, begonnen, sich mit der Topologie zu beschäftigen; so wollte er die Lehre von den „qualitativen Gesetzen der örtlichen Verhältnisse" genannt wissen, weil der Name Geometrie der Lage schon in anderer Bedeutung verwendet werde. Der lange Brief an Müller vom 1. April 1836 beweist, daß er bereits damals im Wesentlichen zu den Ergebnissen gelangt war, die er 1847 in der Zeitschrift „Göttinger Studien" als Abhandlung und dann 1848 als besondere Schrift veröffentlicht hat. Daß er im Jahre 1845 seine Beschäftigung mit der Topologie wieder aufnahm und nunmehr zu einem ersten Abschluß kam, ist wohl auf eine Anregung von Gauß zurückzuführen, denn in den tagebuchartigen Notizen, den „Diarien", die Listing geführt hat, ist unter dem 2. Januar 1845 verzeichnet: „Bei Gauß, Geometria situs".

Mit dem Jahre 1858 beginnt eine neue Reihe topologischer Untersuchungen, die zu der großen, 1862 erschienenen Abhandlung über den Census räumlicher Complexe geführt haben. Das Ziel Listings war, dem Eulerschen Satze über die Beziehung zwischen den Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen eines Vielflachs, der nur unter einschränkenden Voraussetzungen richtig ist, eine allgemein gültige Form zu geben. Merkwürdigerweise hat in demselben Jahre 1858 auch Möbius begonnen, sich mit der Geometria situs der Polyeder zu beschäftigen[1]), und beide, Listing und Möbius, sind fast gleichzeitig und unabhängig von einander zur Entdeckung der einseitigen Flächen gelangt[2]).

Den Schlüssel zur Verallgemeinerung des Eulerschen Satzes bildet der Begriff des Zusammenhangs oder, wie Listing mit einem nicht üblich gewordenen Worte sagt, der Cyklose, die einem irgendwie berandeten Flächenstücke zukommt. Daß Gauß den Begriff des Zusammenhanges und seine Bedeutung für die Lehre von den Funktionen einer komplexen Veränderlichen erkannt hat, zeigt das aus dem Nachlaß herausgegebene Bruchstück über die Konvergenz der Entwicklungen periodischer Funktionen (W. X 1,

1) Vgl. die Bemerkung Reinhardts, Möbius Werke II, S. 519.

2) Vgl. P. Stäckel, Die Entdeckung der einseitigen Flächen, Math. Annalen, Bd. 52, 1899, S. 598.

S. 410—412), das um das Jahr 1850 entstanden ist. Auch die bereits erwähnte mündliche Mitteilung an Möbius über den Doppelring und die darauf liegenden Kurven gehört hierher. Ob Listing durch Äußerungen von Gauß auch zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über die Topologie angeregt worden ist, muß dahingestellt bleiben. Ebenso bedarf das Verhältnis, in dem die Arbeiten von Riemann über die Analysis situs [1]) zu den topologischen Untersuchungen von Listing stehen, noch der Aufklärung.

Während bei Möbius und Listing eigene Zeugnisse vorliegen, daß sie durch Gauß zur Beschäftigung mit der Geometria situs angeregt worden seien, obwohl nicht festgestellt werden kann, in welchem Umfange das geschehen sein mag, sind wir bei Riemann (1826—1866) lediglich auf Vermutungen angewiesen. Ein unmittelbarer Verkehr mit Gauß kommt kaum in Betracht, wohl aber darf man an eine Vermittlung Gaußscher Gedanken durch A. Ritter (1826—1908) und W. Weber (1804—1891) denken. Ritter hat während seiner Göttinger Studienzeit, 1850 bis 1853, in engen Beziehungen zu Riemann gestanden, die sich später fortsetzten; es ist anzunehmen, daß Riemann durch ihn zum Beispiel Kenntnis erhalten hat von den Ausführungen, die Gauß in der Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate im Wintersemester 1850/51 über n-dimensionale Mannigfaltigkeiten gemacht hat (W. X 1, S. 473—482). Mit Weber aber stand Riemann seit 1850 als Teilnehmer, seit 1853 als Assistent an dessen mathematisch-physikalischem Seminar in engem Verkehr [2]), und wir haben aus dem Briefe von Möbius an Gauß vom 2. Februar 1847 erfahren, daß dieser mit Weber über die Umschlingungen zweier Kurven im Raume gesprochen hatte. Wie dem aber auch sei, so gibt es kein Anzeichen, daß Gauß den Begriff der mehrblättrigen Fläche, die zur Darstellung des Verlaufs einer mehrdeutigen Funktion einer komplexen Veränderlichen dient, gekannt habe, und hier liegt also eine durchaus ursprüngliche Schöpfung Riemanns vor.

---

1) B. Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe, Dissertation, Göttingen 1851, art. 6; Werke, 1. Aufl. S. 9—12; Theorie der Abelschen Functionen, zweiter Abschnitt, Crelles Journal, Bd. 54, 1857, Werke, 1. Aufl., S. 84—89.

2) Vgl. die Bemerkungen Dedekinds in Riemanns Lebenslauf, Werke, 1. Aufl., S. 512—515.

Abschnitt III.

Die komplexen Grössen in ihrer Beziehung zur Geometrie.

14.

Kreisteilung.

Die „Darstellung der imaginären Größen in den Relationen der Punkte in plano“ (Brief an Drobisch vom 14. August 1834, W. X 1, S. 106) hat nicht nur für die arithmetischen und funktionentheoretischen, sondern auch für die geometrischen Untersuchungen von Gauß eine so große Bedeutung, daß den Beziehungen der komplexen Größen zur Raumlehre ein besonderer Abschnitt dieses Aufsatzes gewidmet werden soll; in ihm werden die Ausführungen, die Bachmann und Schlesinger gemacht haben, wieder aufgenommen und ergänzt werden.

Schon sehr früh hat Gauß versucht, um einen von ihm gern gebrauchten Ausdruck anzuwenden, in die Metaphysik der imaginären Größen einzudringen. In der Selbstanzeige der zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste vom Jahre 1831 sagt er, daß er „diesen hochwichtigen Teil der Mathematik seit vielen Jahren betrachtet habe“ (W. II, S. 175), und in dem Briefe an Drobisch vom 14. August 1834 freut er sich, daß dieser „auf seine schon fast seit 40 Jahren gehegten Grundansichten über die imaginären Größen eingegangen sei“ (W. X 1, S. 106). Als solche Grundansichten wird man wohl erstens die Erkenntnis zu bezeichnen haben, daß „den komplexen Größen das völlig gleiche Bürgerrecht mit den reellen Größen eingeräumt werden müsse“ (W. II, S. 171), und zweitens, daß diese Größen „ebenso gut wie die negativen ihre reale gegenständliche Bedeutung haben“ (W. X 1, S. 405), die sich in ihrer „Versinnlichung durch die Punkte einer unbegrenzten Ebene“ (W. X 1, S. 407) kund gibt.

Wird man durch die vorstehenden Angaben von Gauß etwa auf die Jahre 1795 und 1796 zurückgeführt, so kann als Bestätigung eine Stelle der Disquisitiones arithmeticae dienen, und zwar aus dem dritten Abschnitt, der nach Bachmann (W. X 2, S. 6) im Wesentlichen bereits 1796 entstanden und 1797 niedergeschrieben worden ist (der Druck der Disquisitiones begann im April 1798 und hat mit verschiedenen Unterbrechungen bis 1801 gedauert). Dort sagt Gauß, er wolle auf die Lehre von den imaginären Indizes, zu denen man bei Moduln ohne primitive Wurzeln seine Zuflucht nehmen muß, bei einer anderen Gelegenheit eingehen,

„wenn wir es vielleicht unternehmen werden, die Lehre von den imaginären Größen, die wenigstens nach unserem Urteil bis jetzt von Niemandem auf klare Begriffe zurückgeführt ist, ausführlicher zu behandeln" (W. I, S. 71).

Im Tagebuch, das mit dem März 1796 beginnt, findet sich keine Aufzeichnung, die man mit einer solchen Absicht in Verbindung bringen könnte. Wohl aber zeigt gerade die erste Eintragung, daß Gauß in der vorhergehenden Zeit mit imaginären Größen zu tun gehabt hatte, denn er verkündet hier, daß er die geometrische Siebzehnteilung des Kreisumfanges entdeckt habe, das heißt, wie wir aus dem Briefe an Gerling vom 6. Januar 1819 (W. X 1, S. 125) wissen, die Auflösung der zugehörigen Kreisteilungsgleichung mittels wiederholter Ausziehung von Quadratwurzeln, und zwar hatte Gauß, nach den Angaben in demselben Briefe, schon während seines ersten Semesters in Göttingen, das Oktober 1795 begann, die Kreisteilungsgleichungen für einen beliebigen Primzahlgrad untersucht.

Daß die Teilung des Kreisumfanges in n gleiche Stücke mittels imaginärer Größen auf die Lösung der Gleichung $x^n - 1 = 0$ zurückgeführt werden kann, ist eine Einsicht, die man Cotes[1]) und Moivre[2]) verdankt, die aber erst durch Euler geklärt und sichergestellt worden ist[3]). Später hat sich Vandermonde mit der Auflösung solcher Gleichungen mittels Wurzelziehens befaßt. Es ist sehr wahrscheinlich, daß Gauß bei der Abfassung der Disquisitiones arithmeticae dessen Abhandlung gekannt hat, denn in dem Briefe an Olbers vom 12. Oktober 1802 sagt er, daß wir über die Geometria situs „nur einige Fragmente von Euler und einem von mir sehr hochgeschätzten Geometer Vandermonde haben" (Br. G.-O., 1, S. 103). Die Abhandlung über Geometria situs steht aber in demselben Bande der Pariser Denkschriften für das Jahr 1771 wie die Abhandlung über die Auflösung der algebraischen Gleichungen[4]).

---

1) R. Cotes, Harmonia mensurarum, sive analysis et synthesis per rationum et angulorum mensuras promota, Cambridge 1722.

2) A. de Moivre, Miscellanea analytica, London 1730.

3) L. Euler, Introductio in analysin, Lausanne und Genf 1748, siehe besonders t. I, cap. 8: De quantitatibus transcendentibus ex circulo ortis.

4) Ch. A. Vandermonde, Remarques sur les problèmes de situation, Histoire de l'Acad., année 1771, Paris 1774, Mémoires, S. 566; Sur la résolution des équations; ebenda, S. 365; in deutscher Sprache herausgegeben von C. Itzigsohn, Vandermonde, Abhandlungen aus der reinen Mathematik, Berlin 1887. Auf S. 375 behauptet Vandermonde, die Gleichung $x^n - 1 = 0$ sei für jeden Grad n durch Wurzelziehen lösbar und führt die Rechnungen für einige Fälle durch, im Besonderen für $n = 11$. Für die Exponenten $n \leq 10$ hatte schon Euler, De

Nachdem Gauß im Art. 337 der Disquisitiones arithmeticae (W. I, S. 414) bemerkt hat, die trigonometrischen Funktionen der Bögen $2k\pi/n$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) seien die Wurzeln von Gleichungen n-ten Grades, fährt er fort: „Jedoch ist keine dieser Gleichungen so leicht zu behandeln und für unseren Zweck so geeignet, wie diese $x^n - 1 = 0$, deren Wurzeln bekanntlich mit den Wurzeln jener aufs engste verbunden sind. Wenn man nämlich der Kürze halber i für die imaginäre Größe $\sqrt{-1}$ schreibt, so werden die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ durch

$$\cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n$$

dargestellt, wo für k alle Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ zu nehmen sind".

Auf diese Art werden den Eckpunkten des regelmäßigen n-Ecks, das dem Kreise vom Halbmesser Eins eingeschrieben ist, die soeben angegebenen komplexen Größen zugeordnet. Die dabei auftretenden Größen $\cos 2k\pi/n$ und $\sin 2k\pi/n$ sind die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten der betreffenden Eckpunkte, wenn der Mittelpunkt des Kreises zum Anfangspunkt gewählt und die Abszissenachse durch den Eckpunkt gelegt wird, für den $k = 0$ ist. Mithin gelangt man in diesem Falle ganz unmittelbar zu der Gaußschen Versinnlichung der komplexen Größen durch die Punkte einer Ebene.

Daß die Betrachtung der Eckpunkte des n-Ecks Gauß geläufig war, zeigt auch die Ausdrucksweise, ganze Zahlen seien „kongruent modulo n", wenn sie sich um Vielfache einer ganzen Zahl n unterscheiden: beim Durchlaufen des Kreisumfangs entsprechen nämlich den Werten von k, die mod. n kongruent sind, dieselben Eckpunkte des n-Ecks, und so hat die Bezeichnung „kongruent" ihre gute geometrische Bedeutung.

Ob die geometrische Versinnlichung der komplexen Größen den Untersuchungen über die Kreisteilung entsprungen ist, läßt sich freilich nicht mit Sicherheit entscheiden. Man könnte dagegen einwenden, daß auch bei Euler Größen der Form $\cos\varphi + i \sin\varphi$ an mehr als einer Stelle in einer Weise auftreten, die ihre geometrische Bedeutung nahe zu legen scheint, ohne daß es dazu gekommen ist, und die Hauptsache liegt in dem Entschluß, die imaginären Größen als den reellen gleichberechtigt anzuerkennen.

---

extractione radicum ex quantitatibus irrationalibus, Comment. acad. sc. Petrop. 13 (1741/3) 1751, § 39 bis 48, Opera omnia, ser. I, vol. 6, S. 31, die Wurzeln mittels bloßer Wurzelziehungen dargestellt; dagegen, meint er, führe der Fall $n = 11$ auf eine Gleichung fünften Grades, deren Lösung noch verborgen sei.

Vielleicht hat Gauß diese Anerkennung durch die bereits erwähnte Einführung des Zeichens *i* im art. 337 der Disq. arith. andeuten wollen[1]). Daß er sich in den Disquisitiones wie in der Dissertation (1799) mit Andeutungen begnügte, ist wohl teils aus seiner Scheu, strittige Dinge zu berühren, teils aus dem Umstande zu erklären, daß er selbst, wenn auch seine „Grundansicht" feststand, die neue Lehre noch nicht für reif hielt. In der Tat ist er erst nach einer langen und harten Arbeit zu einer ihn befriedigenden Auffassung der imaginären Größen gelangt. So schreibt er am 11. Dezember 1825 an Hansen, seine Untersuchungen über die allgemeine Lehre von den krummen Flächen griffen tief ein in die Metaphysik der Raumlehre, „und nur mit Mühe kann ich mich von solchen daraus entspringenden Folgen, wie z. B. die wahre Metaphysik der imaginären Größen ist, losreißen. Der wahre Sinn des $\sqrt{-1}$ steht mir dabei mit großer Lebendigkeit vor der Seele, aber es wird schwer sein, ihn in Worte zu fassen, die immer nur ein vages, in der Luft schwebendes Bild geben können" (Brief im Gauß-Archiv). In einer wahrscheinlich im Anschluß an diesen Brief niedergeschriebenen Aufzeichnung Fragen zur Metaphysik der Mathematik (W. X 1, S. 396) hat er versucht, seine Gedanken auszugestalten, und man erkennt hier die Anfänge der Darstellung, die er in der Selbstanzeige vom Jahre 1831 gegeben hat.

15.

Elliptische, im besonderen lemniskatische Funktionen.

Ein zweiter Anlaß, sich mit den imaginären Größen zu beschäftigen, eröffnete sich für Gauß in der doppelten Periodizität der lemniskatischen Funktionen. Im Januar 1797 hat er diese Funktionen zu betrachten begonnen (T. Nr. 51) und ist spätestens im März zur Entdeckung der zweiten, imaginären Periode gelangt. Somit ergab sich „die Notwendigkeit, das Gebiet einer veränderlichen Größe dadurch zu erweitern, daß dieser Größe auch komplexe Werte beigelegt werden" (Schlesinger, S. 12). Die darin

1) Das Zeichen *i* für $\sqrt{-1}$ findet sich gelegentlich schon bei Euler, nämlich in der am 5. Mai 1777 der Petersburger Akademie vorgelegten Abhandlung: De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet, die 1794 aus dem Nachlaß im vierten Bande der Institutiones calculi integralis abgedruckt ist, ed. tertia, Petersburg 1845, S. 184. Gauß hat das Zeichen *i* seit dem Jahre 1801 beständig angewandt und seinem Beispiel sind die Mathematiker gefolgt.

liegenden Schwierigkeiten kamen sogleich zum Vorschein, als Gauß, die lemniskatischen Funktionen mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel verknüpfend, Ende 1797 zu dem allgemeinen elliptischen Integral erster Gattung überging. Die Realitätsverhältnisse der Perioden sind ihm erst allmälich klar geworden. Bezeichnend hierfür ist eine Aufzeichnung, die, wie es scheint, aus dem Anfang des Jahres 1800 stammt: „Der Radikalfehler, woran meine bisherigen Bestrebungen, den Geist der elliptischen Funktion zu verkörpern, gescheitert sind, scheint der zu sein, daß ich dem Integral

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - e^2 \sin \varphi^2)}}$$

die Bedeutung als Ausdruck eines endlichen Teils der Kugelfläche habe unterlegen wollen, während es wahrscheinlich nur einen unendlich schmalen Kugelsektor ausdrückt“ (W. X 1, S. 546). Offenbar bedeutet, wie Schlesinger dazu bemerkt, Kugelfläche den Ort der komplexen Veränderlichen, der endliche Teil, dessen Ausdruck das Integral sein sollte, das Bild des Periodenparallelogramms, während man, wenn das Verhältnis der Perioden reell ausfällt, zu einem unendlich schmalen Kugelsektor gelangt; vgl. auch W. X 1, S. 515.

In das Jahr 1800 fallen auch Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel (T. Nr. 109). Gauß hat damals die wesentlichen Eigenschaften der elliptischen Modulfunktion aufgefunden; das aber war nur möglich, wenn er den Bereich der Veränderlichen auf das komplexe Gebiet ausdehnte. Man wird daher behaupten dürfen, daß die Auffassungen, die er in dem Briefe an Bessel vom 18. Dezember 1811 (W. VIII, S. 90, X 1, S. 366) ausgesprochen hat, bis in die Zeit um 1800 zurückreichen. Er verlangt hier, daß man bei der Einführung einer neuen Funktion in die Analysis erkläre, ob man sich auf reelle Werte der Veränderlichen beschränke oder seinem Grundsatze beitrete, „daß man in dem Reiche der Größen die imaginären $a+ib$ als gleiche Rechte mit den reellen genießend ansehen müsse“. Es folgen Auseinandersetzungen über den Sinn des Integrals bei Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Dabei, sagt Gauß, man könne „das ganze Reich aller Größen, reeller wie imaginärer, sich durch eine unendliche Ebene sinnlich machen, wobei jeder Punkt, durch Abszisse $= a$, Ordinate $= b$ bestimmt, die Größe $a+ib$ gleichsam repräsentiert“. Dies ist die erste uns bekannte Stelle, wo er die geometrische Versinnlichung der komplexen Größen schriftlich festgelegt hat.

In dem Entwurf einer Abhandlung über die Konvergenz der Reihen, der aus der Zeit um das Jahr 1851 stammt, hat Gauß seine Ansichten folgendermaßen zusammengefaßt: „Die vollständige Erkenntnis der Natur einer analytischen Funktion muß auch die Einsicht in ihr Verhalten bei den imaginären Werten des Arguments in sich schließen, und oft ist sogar letztere unentbehrlich zu einer richtigen Beurteilung der Gebahrung der Funktionen im Gebiete der reellen Argumente. Unerläßlich ist es daher auch, daß die ursprüngliche Festsetzung des Begriffes der Funktion sich mit gleicher Bündigkeit über das ganze Größengebiet erstrecke, welches die reellen und die imaginären Größen unter dem gemeinschaftlichen Namen der komplexen Größen in sich begreift“ (W. X 1, S. 405).

In einem zweiten Entwurfe hat Gauß seine Ansichten genauer darzulegen begonnen (W. X 1, S. 407—416). Wir werden darauf in Nr. 19 eingehen und fahren fort in der Schilderung der Frühzeit.

16.

Existenz der Wurzeln algebraischer Gleichungen.

Das Jahr 1797 brachte nicht nur die Entdeckungen über die lemniskatischen Funktionen, damals ist auch der Beweis für die Existenz der Wurzeln algebraischer Gleichungen entstanden, den Gauß in der Dissertation 1799 veröffentlicht hat (T. Nr. 80). Allerdings hat er es dort vermieden, imaginäre Größen zu benutzen. Schon im Titel hat er den zu beweisenden Satz in der Form ausgesprochen, jede algebraische rationale ganze Funktion einer Veränderlichen [mit reellen Koeffizienten] könne in reelle Faktoren ersten oder zweiten Grades zerlegt werden, und im Art. 3 äußert er sich über die imaginären Größen in sehr vorsichtiger und zurückhaltender Weise. „Sollen die imaginären Größen überhaupt in der Analysis beibehalten werden, was aus mehreren Gründen, die freilich hinreichend sichergestellt werden müssen, richtiger scheint, als sie zu verwerfen, dann müssen sie notwendig für ebenso möglich gelten wie die reellen . . . . Doch will ich mir die Rechtfertigung der imaginären Größen sowie eine eingehende Auseinandersetzung dieses ganzen Gegenstandes für eine andere Gelegenheit vorbehalten“ (W. III, S. 6).

Daß Gauß damals schon im Besitze der geometrischen Versinnlichung war, zeigt der Art. 16 (W. III, S. 22), denn die ganze Betrachtung läuft darauf hinaus, daß die Funktion $f(x+iy)$ in den

reellen und den rein imaginären Teil zerlegt wird und die Kurven in der xy-Ebene untersucht werden, in denen je einer der beiden Teile verschwindet. Das sind die Spuren, die, wie Gauß in der Selbstanzeige vom Jahre 1831 bemerkt hat, der aufmerksame Leser in der Dissertation wiederfinden wird (W. II, S. 175). Hierzu ist freilich zu bemerken, daß diese Andeutungen an und für sich nicht dazu ausreichen würden, um den Schluß zu rechtfertigen, daß Gauß damals die geometrische Versinnlichung der imaginären Größen besessen habe, denn auch d'Alembert hat in seinem Beweise für die Wurzelexistenz[1]), den Gauß im Art. 5 wiedergibt und im Art. 6 beurteilt (W. III, S. 7—11), dasselbe Verfahren benutzt, ohne daß ihm doch deshalb die geometrische Versinnlichung der komplexen Größen zuzuschreiben wäre.

17.
Biquadratische Reste.

Als Gauß im Jahre 1805 von den quadratischen Resten zu den kubischen und biquadratischen fortschritt, fand er sogleich durch Induktion eine Reihe einfacher Lehrsätze, die mit den für die quadratischen Reste gefundenen Ergebnissen überraschende Ähnlichkeit hatten, jedoch ist es ihm erst nach vielen, durch eine Reihe von Jahren fortgesetzten Versuchen gelungen, befriedigende Beweise dafür aufzufinden. Zu diesem Zwecke mußte er neue Wege einschlagen, nämlich „das Feld der höhern Arithmetik, welches man sonst nur auf die reellen ganzen Zahlen ausdehnte, auch über die imaginären erstrecken und diesen das völlig gleiche Bürgerrecht mit jenen einräumen" (W. II, S. 171). Wie es scheint ist diese „erlösende Eingebung" in das Jahr 1807 zu setzen (Bachmann, W. X 2, S. 55). Vollständig durchgedrungen ist Gauß freilich erst 1813 (T. Nr. 144) und veröffentlicht hat er seine Untersuchungen erst 1831 in der Abhandlung über die biquadratischen Reste (W. II, S. 93), die er durch die wiederholt erwähnte Selbstanzeige noch ergänzte (W. II, S. 169). „Wie einfach jetzt auch eine solche Einführung der komplexen Zahlen als Moduln erscheinen mag", hat Jacobi[1]) geurteilt, „so gehört sie nichtsdestoweniger zu den tiefsten Gedanken der Wissenschaft; ja ich glaube nicht, daß zu einem so verborgenen Gedanken die Arithmetik allein geführt hat, sondern daß er aus dem Studium der elliptischen

1) J. d'Alembert, Recherches sur le calcul integral, 1. partie, Histoire de l'Acad. Année 1746, Berlin 1748, Mémoires, S. 182—191; vgl. P. Stäckel, Integration durch imaginäres Gebiet, Bibliotheca math. (3) 1 (1900), S. 124.

Transzendenten geschöpft ist, und zwar aus der besonderen Gattung derselben, welche die Rektifikation von Bogen der Lemniscata gibt. In der Theorie der Vervielfachung und Teilung von Bogen der Lemniscata spielen nämlich die komplexen Zahlen von der Form $a+bi$ genau die Rolle gewöhnlicher Zahlen. . . . So wie man einen Kreisbogen, wenn man ihn in 15 Teile teilen soll, in 3 und in 5 Teile teilt und aus beiden Teilungen die gesuchte findet, so hat man einen Bogen der Lemniscata, um ihn in 17 Teile zu teilen, in $1+4i$ und $1-4i$ Teile zu teilen, und setzt die Teilung in 17 Teile aus beiden zusammen".

Ebenso wichtig wie diese Erweiterung des Zahlengebietes, mit der die Lehre von den algebraischen Zahlen ins Leben gerufen wurde, ist für die Fortschritte der höheren Arithmetik die Darstellung der ganzen komplexen Zahlen vermöge der Gitterpunkte der Ebene geworden. Hieran schließt sich bei der Untersuchung der ternären quadratischen Form die Heranziehung der Gitterpunkte im Raume (W. II, S. 188). Es ist sogar wahrscheinlich, daß Gauß bereits Zahlengitter im Raume von n Dimensionen betrachtet hat, denn die Andeutung nach dieser Richtung, die Eisenstein 1844 gemacht hat, geht wohl auf seinen Aufenthalt in Göttingen während des Sommers dieses Jahres zurück[2]. So muß Gauß auch als der Begründer der Geometrie der Zahlen gelten.

Die Bedeutung der beiden Veröffentlichungen vom Jahre 1831 geht jedoch über die Zahlentheorie hinaus. Wenn Gauß in der neuen Darstellung des Beweises für den Fundamentalsatz der Algebra, den er 1849 gab, sagt: „gegenwärtig, wo der Begriff der komplexen Größen jedermann geläufig ist" (W. III, S. 74), so hat die Analysis ihm diesen Fortschritt zu verdanken. Gewiß hatten schon Wessel (1799), Argand (1806) und andere nach ihnen die selbständige Berechtigung und die geometrische Darstellung der komplexen Größen erkannt und wichtige Anwendungen davon zu machen gewußt, allein die Kenntnis und Würdigung ihrer Untersuchungen ist auf enge Kreise beschränkt geblieben. Es bedurfte eines Gauß, um die Hemmungen zu beseitigen und die neuen Anschauungen zum Siege zu führen.

---

1) C. G. J. Jacobi, Ueber die complexen Primzahlen, Crelles Journal, Bd. 19, 1839, S. 314, Werke VI, S. 275.

2) Eisenstein, Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste, Crelles Journal, Bd. 28, 1844, S. 248.

18.

Benutzung der komplexen Größen für geometrische Untersuchungen.

Es ist eine merkwürdige Tatsache, daß Gauß fast überall, wo er mit seinen Forschungen einsetzte, auf die komplexen Größen stieß. Gilt das, wie wir gesehen haben, für die Algebra, die Funktionentheorie und die Arithmetik, so ist es nicht minder richtig für die Geometrie selbst.

Die unmittelbare Anwendung der geometrischen Versinnlichung der komplexen Größen auf das Dreieck, das Viereck, den Kreis, die Kegelschnitte, die Kugel ist ein Gegenstand, mit dem sich Gauß sein ganzes Leben lang immer wieder beschäftigt hat; ja er hat diese Art der Behandlung geometrischer Probleme als „eine ihm eigentümliche Methode“ bezeichnet (Brief an Schumacher vom 12. Mai 1843, W. VIII, S. 295). Die betreffenden Untersuchungen werden im vierten Abschnitt dieses Aufsatzes im Zusammenhang mit den Arbeiten zur elementaren und analytischen Geometrie ausführlich dargestellt werden.

Außerdem ist die konforme Abbildung krummer Flächen zu erwähnen. Allerdings hat Gauß in der Kopenhagener Preisschrift vom Jahre 1822 sich bezüglich der geometrischen Versinnlichung auf Andeutungen beschränkt, die kaum über das hinausgehen, was man in seiner Dissertation lesen kann. Im übrigen sei auf die Darstellung im fünften Abschnitt dieses Aufsatzes verwiesen.

19.

Weiterentwicklung der Lehre von den komplexen Größen.

Gauß schließt in der Selbstanzeige vom Jahre 1831 seine Auseinandersetzungen über die imaginären Größen mit den Worten: „Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ vollkommen gerechtfertigt und mehr bedarf es nicht, um diese Größe in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen“ (W. II, S. 177). In ähnlicher Weise hat er sich später (um 1850) in dem schon erwähnten Entwurf einer Abhandlung über die Konvergenz der Reihen ausgesprochen: „Die imaginären Größen sind, solange ihre Grundlage immer nur in einer Fiktion bestand, in der Mathematik nicht sowohl wie eingebürgert, als vielmehr nur wie geduldet betrachtet, und weit davon entfernt geblieben, mit den reellen Größen auf gleiche Linie gestellt zu

werden. Zu einer solchen Zurücksetzung ist aber jetzt kein Grund mehr nachdem die Metaphysik der imaginären Größen in ihr wahres Licht gesetzt und nachgewiesen ist, daß diese, ebenso gut wie die negativen, ihre reale gegenständliche Bedeutung haben" (W. X 1, S. 404).

Johann Bolyai hat in einer 1837 verfaßten, aber erst 1899 aus seinem Nachlaß veröffentlichten Schrift (Bol. II, S. 233) gegen die Ausführungen von Gauß in der Selbstanzeige vom Jahre 1831 eine Reihe von Einwendungen erhoben, darunter auch die, daß Gauß „sich auf die Betrachtung des Raumes stütze, die man in der Arithmetik vermeiden soll", und er hatte selbst eine rein arithmetische Einführung der komplexen Größen gegeben, die im Wesentlichen mit Hamiltons[1]) gleichzeitiger Begründung durch das Rechnen mit Größenpaaren übereinstimmt. Verschiedene Aeußerungen von Gauß gestatten den Schluß, daß auch er, eine 1831 im Keime vorhandene Auffassung weiter entwickelnd, später zu einer von räumlichen Betrachtungen unabhängigen Auffassung der komplexen Größen übergegangen ist.

In der Selbstanzeige vom Jahre 1831 wird ausgeführt, daß die komplexen Größen zur Darstellung der Relationen dienen können, die zwischen den Elementen einer Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen stattfinden, und es heißt dann, daß sich diese Verhältnisse nur durch eine Darstellung in der Ebene zur Anschauung bringen ließen (W. II, S. 176). Noch entschiedener sagt Gauß in dem zweiten Entwurf einer Abhandlung über die Konvergenz der Reihen (um 1850): „Zuvörderst ist die bekannte Versinnlichung der komplexen Größen in Erinnerung zu bringen. .... Es wird damit nur bezweckt, die Bewegung in dem an sich vom Räumlichen unabhängigen Felde der abstrakten komplexen Größen zu erleichtern und eine Sprache für dasselbe zu vermitteln" (W. X 1, S. 407).

Diese Sprache für die Lehre von den „abstrakten" komplexen Größen hat Gauß in ihren Anfängen geformt. Eine nach der Stetigkeit fortschreitende Reihe komplexer Größen bildet einen Zug; jede der dem Zuge angehörigen Größen ist eine Stelle des Zuges. Ist der Zug geschlossen, so fügen sich die nach der Stetigkeit zusammenhängenden komplexen Größen, die in dem Zuge ihre Begrenzung finden, zu einer Schicht zusammen. Man erkennt, daß die geometrischen Namen Linie, Punkt, Fläche vermieden

---

1) R. W. Hamilton, Theory of conjugate functions, or algebraic couples, Transactions of the Royal Irish Academy, Vol. 17, Dublin 1837, S. 393.

werden. In einer Fußnote wird noch hervorgehoben, daß „die abstrakte allgemeine Lehre von den komplexen Größen mit der Wechselbeziehung zwischen vorwärts-rückwärts und rechts-links nichts zu schaffen hat“ (W. X 1, S. 408).

Was man vermißt, ist eine Erklärung, in welchem Sinne die formalen Bildungen $x+iy$ als Größen bezeichnet werden dürfen. Vielleicht hat Gauß auch hierüber seine Gedanken gehabt, denn in dem bereits angeführten Briefe an Bessel vom 21. November 1811, in dem er von den Funktionen einer komplexen Veränderlichen spricht, sagt er: „Man sollte überhaupt nie vergessen, daß die Funktionen, wie alle mathematischen Begriffszusammensetzungen, nur unsere eigenen Geschöpfe sind und daß, wo die Definition, von der man ausging, aufhört, einen Sinn zu haben, man eigentlich nicht fragen soll: Was ist? sondern was konveniert anzunehmen? damit ich immer konsequent bleiben kann. So z. B. das Produkt aus — . —“ (W. X 1, S. 363). Wenn man die Aeußerungen über die allgemeine Arithmetik in der Selbstanzeige vom Jahre 1831 hinzunimmt, wo das Gebiet der Zahlen stufenweise erweitert wird (W. II, S. 175), so ergibt sich, wie nahe Gauß dem Prinzip der Permanenz gekommen ist.

20.

Komplexe Größen mit mehr als zwei Einheiten.

In dem Brief an Graßmann vom 14. Dezember 1844 sagt Gauß, auf dessen ihm übersandte Ausdehnungslehre Bezug nehmend, „daß die Tendenzen derselben teilweise denjenigen Wegen begegnen, auf denen ich selbst nun fast seit einem halben Jahrhundert gewandelt bin und wovon freilich nur ein kleiner Teil 1831 in den Comment. der Göttingischen Societät und noch mehr in dên Göttingischen Gelehrten Anzeigen (1831, Stück 64) gleichsam im Vorbeigehen erwähnt ist; nämlich die konzentrierte Metaphysik der komplexen Größen, während von der unendlichen Fruchtbarkeit dieses Prinzips für Untersuchungen räumliche Verhältnisse betreffend zwar vielfältig in meinen Vorlesungen gehandelt [1])], aber Proben davon nur hin und wieder, und als solche nur dem aufmerksamern Auge erkennbar, bei andern Veranlassungen mitgeteilt sind“ (W. X 1, S. 436). Solche Proben finden sich in der Dissertation, in der Kopenhagener Preisschrift und in verschiedenen kleineren

1) Zum Beispiel hat Gauß vom Dezember 1839 bis Ostern 1840 eine Vorlesung über die Theorie der imaginären Größen gehalten, von der zwei Stücke in den Werken abgedruckt sind (W. VIII, S. 331—334 und S. 346—347).

Aufsätzen zur elementaren Mathematik, über die im vierten Abschnitt berichtet werden wird.

Von der Selbstanzeige in den Göttingischen Anzeigen kommt hier besonders der Schluß in Betracht. „Der Verfasser hat sich vorbehalten, den Gegenstand [der komplexen Größen], welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Größen liefern können, ihre Beantwortung finden wird" (W. II, S. 178).

Leider ist Gauß nicht dazu gekommen, das hier gegebene Versprechen einzulösen, und auch die wenigen im Nachlaß vorhandenen Aufzeichnungen, die man damit in Beziehung bringen kann, reichen nicht aus, um festzustellen, was er mit seinen Andeutungen gemeint hatte.

Ebenso wie den Punkten der Ebene aus den Einheiten 1 und i gebildete bikomplexe Größen (W. VIII, S. 354) zugeordnet werden, kann man für die Punkte des Raumes trikomplexe Größen benutzen (W. VIII, S. 353, 354). Gelegentlich hat Gauß geradezu den drei kartesischen Koordinaten x, y, z die drei Einheiten 1, i, k zugesellt und zum Beispiel die Ecken eines Ikosaeders und eines Dodekaeders durch trikomplexe Größen $x + iy + kz$ dargestellt (Handbuch 16 Bb, S. 166). Es entsteht dann die Frage, wie man mit solchen Größen rechnen und im besonderen, wie man das Produkt definieren soll. Gauß hat, den Kern des Problems erfassend, schon 1819 viergliedrige komplexe Größen betrachtet, die er Mutationsskalen nennt (W. VIII, S. 357—362). Ihre geometrische Bedeutung besteht darin, daß sie die Drehung eines Raumes in einem andern Raume verbunden mit einer Vergrößerung oder Verkleinerung ausdrücken, und Gauß ist dazu gelangt, die Multiplikation zweier solcher Größen so zu erklären, daß das Produkt das geometrische Ergebnis zweier hintereinander ausgeführter Mutationen darstellt. Auf diese Art ist er zu einem Multiplikationsgesetz gelangt, das mit dem der Hamiltonschen Quaternionen übereinstimmt.

Weitere Ausführungen über die mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten bei Gauß findet man in Nr. 33 dieses Aufsatzes.

Abschnitt IV.

Elementare und analytische Geometrie.

21.

Allgemeines.

Im ersten Abschnitt (Nr. 10) ist über verschiedene Untersuchungen von Gauß berichtet worden, die entweder unmittelbar zur elementaren Geometrie gehören oder doch eng damit zusammenhängen, bei denen aber das Axiomatische überwiegt. Auf andere Untersuchungen wurde im dritten Abschnitt hingewiesen, weil bei ihnen die Anwendung komplexer Größen mitspielt. Für ihren Gebrauch hatte Gauß eine gewisse Vorliebe, und seine Ausdehnung erstreckt sich weiter, als man zunächst glauben möchte; Gauß hat sich nämlich lange Zeit gescheut, mit seiner geometrischen Versinnlichung des Imaginären öffentlich hervorzutreten, und hat deshalb seine Lösungen in einer davon befreiten Form dargestellt. Wie gern er mit dem „i“ arbeitete, zeigt übrigens auch sein Ansatz für das Problem der acht Königinnen, bei dem die Felder des Schachbrettes mit den Zahlen $a+ib$ ($a, b = 1, 2, \ldots, 8$) bezeichnet werden (Brief an Schumacher vom 27. September 1850, Br. G.-Sch. VI, S. 120).

Gauß hat es erlebt, daß den ursprünglichen, rein geometrischen Überlegungen und dem später hinzugekommenen Rechnen mit Koordinaten andere Verfahren zur Lösung geometrischer Aufgaben an die Seite traten, wie der Baryzentrische Kalkül von Möbius und Graßmanns Ausdehnungslehre. Ueber den Wert und die Wirksamkeit solcher Methoden hat er sich in dem Brief an Schumacher vom 15. Mai 1843 mit großer Klarheit ausgesprochen. „Überhaupt verhält es sich mit allen solchen Kalküls so, daß man durch sie nichts leisten kann, was nicht auch ohne sie zu leisten wäre; der Vorteil ist aber der, daß, wenn ein solcher Kalkül dem innersten Wesen vielfach vorkommender Bedürfnisse korrespondiert, jeder, der sich ihn ganz angeeignet hat, auch ohne die gleichsam unbewußten Inspirationen des Genies, die niemand erzwingen kann, die dahin gehörigen Aufgaben lösen, ja selbst in so verwickelten Fällen gleichsam mechanisch lösen kann, wo ohne eine solche Hilfe auch das Genie ohnmächtig wird. So ist es mit der Erfindung der Buchstabenrechnung überhaupt; so mit der Differentialrechnung gewesen: so ist es auch (wenn auch in par-

tielleren Sphären) mit Lagranges Variationsrechnung, mit meiner Kongruenzrechnung und mit Möbius' Kalkül. Es werden durch solche Konzeptionen unzählige Aufgaben, die sonst vereinzelt stehen und jedesmal neue Efforts (kleinere oder größere) des Erfindungsgeistes erfordern, gleichsam zu einem organischen Reiche" (W. VIII, S. 298).

Die Arbeiten von Gauß, über die hier berichtet werden soll, betreffen fast den ganzen Umkreis der elementaren Geometrie, die Anfänge der analytischen Geometrie eingeschlossen. Eine erste Reihe bezieht sich auf die Eigenschaften des Dreiecks, des Vierecks und der Vielecke, eine zweite auf den Kreis und die Kugel, die Kegelschnitte und die Flächen zweiter Ordnung. In einer Schlußnummer sind endlich die Beiträge zur sphärischen Trigonometrie zusammengefaßt.

Man könnte diesen Teil des Werkes von Gauß übergehen, ohne daß sein Ruhm geschmälert würde. Allein es gilt dafür das Wort seines Schülers und Freundes Schumacher: „Deutlich genug ist des Meisters Stempel auch seinen Erholungen aufgedrückt"[1]).

22.

Das Dreieck.

Rein geometrisch ist der in die Lehrbücher der Elementargeometrie übergegangene klassische Beweis für den Satz, daß die drei Höhen des Dreiecks sich in einem Punkte schneiden (W. IV, S. 396); er ist 1810 in den Zusätzen veröffentlicht worden, die Gauß zu Schumachers Übersetzung der Géométrie de position von Carnot beigesteuert hat (Teil 2, Zusatz II, S. 363). Auf einem verwandten Gedanken beruht der weniger bekannte Beweis von Naudé; dieser zeigt, daß das Dreieck der Höhenfußpunkte die Höhen zu Winkelhalbierenden hat[2]).

In denselben Zusätzen (Zusatz I, S. 359) hat Gauß mittels der Ansätze der analytischen Geometrie einen merkwürdigen Punkt des Dreiecks nachgewiesen, von dem die Durchschnittspunkte der Höhen, der Mittelsenkrechten und der Schwerlinien besondere Fälle sind (W. IV, S. 393).

Eine handschriftliche Bemerkung zum Zusatz II lehrt, wie

1) L. Carnot, Geometrie der Stellung, übersetzt von H. C. Schumacher, 2. Teil, Altona 1810, Vorrede, S. II.

2) Ph. Naudé, Trigonoscopiae cuiusdam novae conspectus, Miscellanea Berolinensia, t. V, 1737, S. 10; siehe besonders S. 17.

die genannten Durchschnittspunkte mit den komplexen Zahlen zusammenhängen, die den Ecken des Dreiecks zugeordnet sind (W. IV, S. 396). Mittels komplexer Größen ist sicherlich auch die Lösung der Aufgabe gewonnen worden, die Lage eines Punktes aus den Verhältnissen seiner Abstände von drei der Lage nach bekannten Punkten zu finden (W. VIII, S. 303).

Endlich ist noch ein Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes aus dem Jahre 1797 (T. Nr. 81) zu nennen, der auf der Ähnlichkeit von Dreiecken beruht[1]).

23.

Das Viereck.

Als Gauß die Zusätze zu Schumachers Uebersetzung des Carnotschen Werkes verfaßte, löste er auch eine Aufgabe, die Schumacher im Oktober 1809 gestellt hatte, als Gauß, Bessel und er selbst ihren gemeinsamen Freund Olbers in Bremen besuchten, die Aufgabe nämlich, in einem Viereck diejenige Ellipse zu beschreiben, die den größten möglichen Flächenraum umfaßt. Schumacher hatte sie den durch Montucla erneuerten Récréations mathématiques et physiques von Ozanam (Paris 1778) entnommen. Im Dezember 1809 wurde Gauß von Bessel an die Aufgabe erinnert (Br. G.-Bessel S. 104). „Es ist ein merkwürdiges Beispiel", antwortet dieser am 7. Januar 1810, „wieviel bisweilen von der Wahl der unbekannten Grössen abhängt. Ich setzte mich gleich daran und kam, da ich zufällig hierin eine glückliche Wahl getroffen hatte, sofort darauf, daß das ganze Problem bloß auf eine Gleichung zweiten Grades sich reduziert" (Br. G.-Bessel S. 107). Die „glückliche Wahl" kam darauf hinaus, daß er komplexe Größen verwandte; in der Darstellung der Lösung, die Gauß Schumacher mitteilte, ist dieser Ursprung zwar verhüllt worden, aber doch noch deutlich genug sichtbar geblieben.

Nachdem Gauß am 10. Februar 1810 an Schumacher geschrieben hatte, er habe eine sehr artige Auflösung gefunden und sei nicht abgeneigt, sie bekannt zu machen (Br. G.-Sch. I, S. 26), wurde die Aufgabe, wohl auf Schumachers Veranlassung, im Maiheft der

1) Der Beweis von Gauß ist den 96 Beweisen hinzuzufügen, die J. Versluys gesammelt hat: Zes en negentig bewijzen voor het theorema van Pythagoras, Amsterdam 1914; von den dort mitgeteilten Beweisen kommt dem Gaußschen am nächsten der von Brand, Une nouvelle démonstration de Pythagore, Journal de mathématiques élémentaires, série 5, t. 21, 1897, S. 36.

Monatlichen Correspondenz [1]) den Mathematikern vorgelegt, und das Augustheft brachte (S. 112—121) die Lösung von Gauß (W. IV, S. 385). Im Besonderen wird darin der Lehrsatz bewiesen, daß der geometrische Ort der Mittelpunkte der Ellipsen, die die vier Seiten des Vierecks berühren, eine Gerade ist; daraus folgt als Zusatz, daß die Mitten der drei Diagonalen eines Vierseits auf einer Geraden liegen.

Das Septemberheft der Correspondenz enthält zwei weitere Lösungen, die von J. Fr. Pfaff und Mollweide herrühren [2]); eine vierte, von Buzengeiger eingesandte konnte wegen Mangel an Raum nicht abgedruckt werden [3]). Pfaff bemerkt, daß jener geometrische Ort schon bei Newton [4]) und Euler [5]) zu finden sei. Endlich gab Schumacher im Novemberheft [6]) eine Ergänzung, indem er zeigte, daß unter Umständen eine innerhalb des Vierecks liegende Ellipse, die nur drei Seiten berührt, den größten Inhalt liefert. Die Aufgabe ist später wiederholt bearbeitet worden; Plücker, Schläfli und Steiner haben sich um sie bemüht [7]).

In die Zeit um 1810 gehört auch wohl eine Aufzeichnung, die sich auf der letzten Seite des Gaußschen Exemplares des ersten Teiles der Schumacherschen Übersetzung befindet. Carnot hatte in einer 1806 erschienenen Abhandlung, die Schumacher in seine Ausgabe aufgenommen hat, die zwischen den Seiten und den Diagonalen eines Vierecks bestehende Gleichung hergeleitet (2. Teil, S. 258), und Gauß gibt einen einfachen Beweis dieser für die Ausgleichungsrechnungen der Geodäsie wichtigen Beziehung (W. IX, S. 248).

Mit den geodätischen Messungen, die Gauß von 1821 bis 1825

---

1) Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, herausgegeben von v. Zach, Bd. 21, 1810, S. 462.

2) Monatliche Correspondenz, Bd. 22, 1810, S. 223 und 227.

3) A. a. O., S. 513.

4) I. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica, London 1687, Liber I, Lemma 25; im Corollarium 3 wird auch der Satz ausgesprochen, daß die Mitten der Diagonalen eines Vierseits auf einer Geraden liegen.

5) L. Euler, Introductio in analysin, T. II, Lausanne 1748, § 123.

6) Monatliche Correspondenz, Bd. 22, 1810, S. 505.

7) J. Plücker, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Band II, Essen 1831, S. 208; L. Schläfli, Anwendungen des barycentrischen Calculs, Archiv der Mathematik und Physik, Bd. 12, 1849, S. 99; J. Steiner, Teoremi relativi alle coniche inscritte e circoscritte, Giornale arcadico, t. 99, S. 147, Crelles Journal, Bd. 30, 1845, S. 17, Gesammelte Werke, Bd. II, S. 334. Euler hat die duale Aufgabe behandelt, um ein gegebenes Viereck die kleinste Ellipse zu beschreiben, Nova acta acad. sc. Petrop. 9 (1791), 1795, S. 132; vorgelegt den 4. Sept. 1777.

anstellte, hängt es auch zusammen, daß er sich eingehend mit einer Aufgabe beschäftigt hat, die nach einem Mathematiker, der weder ihr Urheber noch ihr erster Löser ist, der sich aber Verdienste um sie erworben hat, häufig als Pothenotsches Problem bezeichnet wird[1]). Es handelt sich darum, bei einer trigonometrischen Aufnahme die Lage eines Punktes dadurch festzulegen, daß die Winkel gemessen werden, welche die von ihm nach drei bekannten Punkten (Netzpunkten) gehenden Richtungen mit einander bilden (Rückwärtseinschneiden). Die im Nachlaß befindlichen umfangreichen Aufzeichnungen über das Pothenotsche Problem aus den Jahren 1832 bis 1852 werden ergänzt durch Briefe an Gerling und Schumacher aus den Jahren 1830 bis 1842 und die Ausarbeitung einer im Jahre 1840 gehaltenen Vorlesung über die Theorie der imaginären Größen (W. VIII, S. 307—334).

Die Heranziehung der komplexen Größen erweist sich hier als besonders nützlich. Indem Gauß den Ecken a_0, a_1, a_2, a_3 des Vierecks, das aus dem festzulegenden Punkt und den drei Netzpunkten besteht, das Dreieck zuordnet, dessen Ecken durch die aus der Lehre von den biquadratischen Gleichungen wohlbekannten Verbindungen

$$a_0 a_1 + a_2 a_3,\ \ a_0 a_2 + a_3 a_1,\ \ a_0 a_3 + a_1 a_2$$

bestimmt werden, gelangt er zu seiner „zierlichen Auflösung“; zu demselben Dreieck war übrigens schon Collins durch einen geometrischen Kunstgriff gelangt[2]).

Gauß eigentümlich ist die Frage nach der „physischen Möglichkeit der Daten in Pothenots Aufgabe“. Wenn nämlich beim Rückwärtseinschneiden der Punkt gesucht wird, von dem aus zwei gegebene, aneinander stoßende Strecken unter gemessenen Winkeln erscheinen, so ist man sicher, daß die Aufgabe, sobald nur der gefährliche Kreis vermieden wird, eine bestimmte Lösung hat. Anders steht es, wenn jene Winkel willkürlich angenommen werden. Dann braucht es keine Lösung zu geben, und es entsteht die Frage nach einem Kennzeichen für die Lösbarkeit; Gauß hat darauf eine überraschend einfache Antwort gegeben.

---

1) L. Pothenot, Problème de Géométrie pratique, Mém. de l'Acad. depuis 1666 jusqu'à 1699, t. 10, Paris 1730, S. 150 (vorgelegt 1692). Für das Geschichtliche vgl. die Dissertation von R. Wagner, Ueber das Pothenotsche Problem, Göttingen 1852 und die Angaben in J. C. Poggendorffs Biographisch-literarischem Handwörterbuch, II, Leipzig 1863, Spalte 509.

2) J. Collins, A solution of a chorographical problem, Philosophical transactions, Vol. 6, Nr. 69, London, März 1671.

Warum, wird man fragen, hat Gauß auf einen so elementaren Gegenstand so viel Zeit und Mühe verwendet? Aufschluß hierüber gibt der Brief an Gerling vom 14. Januar 1842. Nachdem er diesem das Kennzeichen mitgeteilt hat, bittet er ihn, es für sich zu behalten, „weil ich das Theorem, womit es zusammenhängt, selbst einmal bei schicklicher Gelegenheit zu behandeln mir vorbehalte, weniger wegen der Eleganz des Theorems an sich, als wegen der Eleganz, welche die Anwendung der komplexen Größen dabei darbietet, also namentlich bei einer Gelegenheit, wo ich mehr von dem Gebrauch der komplexen Größen sagen kann“ (W. VIII, S. 315)[1]).

24.

Die Vielecke.

Durch eine Anfrage von Schumacher vom 19. März 1836 veranlaßt (W. X 1, S. 459) hat sich Gauß mit der Frage nach dem „kürzesten Verbindungssystem“ von beliebig vielen, im Besonderen von vier Punkten beschäftigt (W. X 1, S. 461—467), einer glücklichen Verallgemeinerung der Summe der Entfernungen eines Punktes von gewissen gegebenen Punkten, die noch heute eingehendere Erforschung verdiente[2]).

Die Lösung der Aufgabe, in einen gegebenen Kreis ein Vieleck zu beschreiben, dessen Seiten je durch einen gegebenen Punkt gehen, ist wieder der Verwendung komplexer Größen entsprungen (W. IV, S. 398, Zusatz V, S. 369).

Im ersten Abschnitt (Nr. 10) ist bemerkt worden, daß Gauß die Frage aufgeworfen hat, was man unter dem Inhalt eines beliebigen Vielecks zu verstehen habe. Auf den Inhalt eines Vielecks bezieht sich eine Stelle in dem Zusatz I zu Schumachers Uebersetzung der Géométrie de position von Carnot (S. 362), die hier mitgeteilt wird, weil sie in den Werken fehlt.

Anmerkung des Herausgebers [Schumacher]. „Es ist, nach einem schönen Theorem des Herrn Professor Gauß, der Inhalt eines Vielecks von n Seiten, wenn die Koordinaten der Winkelpunkte nach der Reihe in einer Richtung gezählt:

---

1) Für die Behandlung geometrischer Aufgaben mittels komplexer Größen vgl. noch die Dissertation von H. zur Nedden, Applicatio numeri complexi ad demonstranda nonnulla geometriae theoremata, Göttingen 1840.

2) Vgl. auch die Dissertation von K. Bopp, Das kürzeste Verbindungssystem von vier Punkten, Göttingen 1879.

$$x,\ y;\ x',\ y';\ \dots\ x^{(n-1)},\ y^{(n-1)}$$

sind,

$$= \tfrac{1}{2}\{x(y'-y^{(n-1)})+x'(y''-y)+x''(y'''-y')+\dots+x^{(n-1)}(y-y^{(n-2)})\},$$

worüber Er selbst vielleicht, bey einer andern Gelegenheit, uns eine vollständigere Abhandlung schenken wird".

Die Ankündigung einer vollständigeren Abhandlung macht es wahrscheinlich, daß Gauß schon damals die Verallgemeinerung auf beliebige Vielecke im Auge hatte, bei denen also der Umfang sich selbst durchsetzen kann, wie er sie in dem Brief an Olbers vom 30. Oktober 1825 andeutet (W. VIII, S. 398)[1]. In einer aus dem Nachlaß 1866 herausgegebenen Abhandlung hat Jacobi eine Regel für die Bestimmung des Inhalts gegeben[2].

In der Behaftung von Inhalten mit Vorzeichen ist Möbius mit Gauß zusammengetroffen, zuerst im Barycentrischen Calcul (1827)[3], dann in der Abhandlung über den Inhalt der Polyeder (1865)[4]. Wenn die Mathematiker des 20. Jahrhunderts diese Dinge als selbstverständlich ansehen, so hat doch Baltzer, in den Erinnerungen an die Gaußschen Zeiten wurzelnd, mit Recht hervorgehoben, daß die Bestimmung des Zeichens einer Strecke nach der voraus bestimmten positiven Richtung einer Geraden, einer Dreiecksfläche nach dem voraus bestimmten positiven Sinn ihrer Ebene und eines Tetraederinhalts nach einem voraus bestimmten Schraubungssinn beim Erscheinen des barycentrischen Calculs „neu und fast befremdend" erschienen seien[5].

Gauß hat auch eine von Möbius gestellte Aufgabe[6]) gelöst,

1) In dem Brief an Olbers vom 30. Oktober 1825 bemerkt Gauß, er habe „erst vor kurzem eine Abhandlung von Meister im ersten Bande der Novi Commentarii Gotting. kennen gelernt, worin die Sache fast ganz auf gleiche Art betrachtet und sehr schön entwickelt wird"; gemeint ist die Abhandlung von A. L. F. Meister, Generalia de genesi figurarum planarum et inde pendentibus earum affectionibus, Novi Commentarii acad. Gotting., vol. I ad annos 1769/70, 1771, S. 144.

2) C. G. J. Jacobi, Regel zur Bestimmung des Inhalts der Sternpolygone, Journal für die r. u. a. Mathematik Bd. 65, 1866, S. 173, Werke VII, S. 40; vgl. auch W. Veltmann, Berechnung des Inhalts eines Vielecks aus den Coordinaten der Eckpunkte, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 32, 1887, S. 339. Nach L. Königsberger, C. G. J. Jacobi, Leipzig 1904, S. 155 hat Jacobi seine Regel im Sommer 1833 gefunden.

3) A. F. Möbius, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, Kap. II, § 17 und 18, Werke I, S. 39—41.

4) A. F. Möbius, Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders, Leipziger Berichte, Bd. 17, 1865, S. 31, Werke II, S. 485—491.

5) R. Baltzer, Vorrede über Möbius, Werke I, S. VIII.

6) A. F. Möbius, Beobachtungen auf der Sternwarte zu Leipzig usw., Leipzig 1823, S. 57; Werke I, S. 394.

die besagt, man solle den Inhalt eines Fünfecks aus den Inhalten der fünf Dreiecke bestimmen, die von den Verbindungsstrecken der fünf Eckpunkte gebildet werden (W. IV, S. 406).

25.

Der Kreis und die Kugel.

Das Tagebuch von Gauß beginnt mit der Eintragung vom 30. März 1796: „Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc“. Nach dem Briefe an Gerling vom 6. Januar 1819 hatte er die Entdeckung am Morgen des 29. März 1796 gemacht (W. X 1, S. 125). „Sie ist es vornehmlich gewesen, welche seinem Leben eine bestimmte Richtung gab, denn von jenem Tage an war er fest entschlossen, nur der Mathematik sein Leben zu widmen“ (Sartorius, S. 16). Die Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks ist geometrisch ausführbar, insofern sie sich allein durch Lineal und Zirkel bewerkstelligen läßt, jedoch beruht der Beweis bei all' den verschiedenen Durchführungen auf der algebraischen Grundlage der Kreisteilungsgleichung [1]). Gauß hat in den Göttinger Anzeigen vom 19. Dezember 1825 eine Konstruktion von Erchinger mitgeteilt. Für diese Konstruktion habe Erchinger eine rein geometrische Begründung gegeben, „mit musterhafter, mühsamer Sorgfalt, alles nicht rein Elementarische zu vermeiden“ (W. II, S. 187). Sie ist uns leider verloren gegangen, da Erchingers Abhandlung nicht gedruckt wurde [2]).

In dem Zusatz VI zu Carnots Geometrie der Stellung (2. Teil, S. 371, W. IV, S. 399) wird eine analytische Lösung der Aufgabe

1) Vgl. R. Goldenring, Die elementargeometrischen Konstruktionen des regelmäßigen Siebzehnecks, Dissertation, Jena 1915. Die zeitlich älteste Konstruktion ist die dort noch nicht erwähnte von Pfleiderer, die erst 1917 (Werke X 1, S. 120) veröffentlicht worden ist.

2) Die Abhandlung Erchingers hatte Gauß von einem Braunschweiger Bekannten, dem Juristen E. Schrader in Tübingen, am 1. Sept. 1825 zugesandt erhalten. Hiernach war Erchinger, der sonst ganz unbekannt ist, ein mathematischer Autodidakt, der etwa seit 1813 in Tübingen lebte. Er hatte einen Beitrag geliefert zu der Abhandlung Schraders: Commentatio de summatione seriei

$$\frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)} + \cdots,$$

Weimar 1818, die einen Preis der Kopenhagener Gesellschaft der Wissenschaften erhalten hatte. Nach Schraders Brief an Gauß vom 20. April 1831 war Erchinger inzwischen gestorben (Briefe im Gauß-Archiv). Vgl. auch Klügels Mathematisches Wörterbuch IV. Teil, Leipzig 1823, S. 652 (Artikel Summierung der Reihen).

gegeben, einen Kreis zu beschreiben, der drei der Größe und Lage nach gegebene Kreise berührt, „vielleicht die einfachste Konstruktion des Apollonischen Problems“, wie Simon sagt[1]); sie ist wiederum der Benutzung komplexer Größen zu verdanken.

Um das Jahr 1840 hat Gauß den Begriff der harmonischen Punktepaare auf einer Geraden verallgemeinert, indem er die vier Abszissen als komplexe Größen auffaßt, denen Punkte einer Ebene zugeordnet sind (W. VIII, S. 336—337). Hierin liegt ein fruchtbares Uebertragungsprinzip, das Möbius, hier wiederum mit Gauß zusammentreffend, ausgebaut hat[2]). Später ist Möbius zum allgemeinen Doppelverhältnis übergegangen und zu seiner Lehre von der Kreisverwandtschaft gelangt, bei der zwischen zwei Ebenen durch eine bilineare Gleichung in den lagebestimmenden komplexen Größen eine Beziehung hergestellt wird[3]).

Auch den Punkten einer Kugelfläche hat Gauß schon sehr früh komplexe Größen zugeordnet, vermutlich mittels der stereographischen Projektion; dies zeigt die schon angeführte Bemerkung über das elliptische Integral erster Gattung aus dem Jahre 1800 (W. X 1, S. 546). In einer späteren Aufzeichnung, die vor 1819 niedergeschrieben ist, hat er den durch die stereographische Projektion vermittelten Zusammenhang zwischen Ebene und Kugel genauer untersucht und dabei erkannt, daß die „Drehungen der Kugelfläche in sich selbst“ durch gewisse lineare, gebrochene Substitutionen der lagebestimmenden komplexen Größe dargestellt werden können (W. VIII, S. 354—356); man kennt die Bedeutung, die diese Substitutionen später gewonnen haben[4]).

---

1) M. Simon, Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert, I. Ergänzungsband des Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig 1906, S. 98; man findet hier (S. 97—105) eine Zusammenstellung der umfangreichen Literatur über das Apollonische Taktionsproblem.

2) A. F. Möbius, Ueber eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu den entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen, Leipziger Berichte, Bd. 4, 1852, S. 41, Werke II, S. 189.

3) A. F. Möbius, Ueber eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren, Leipziger Berichte, Bd. 5, 1853, S. 14, Werke II, S. 205; später hat Möbius die Kreisverwandtschaft rein geometrisch begründet: Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung, Leipziger Abhandlungen, Bd. 4, 1855, S. 529; Werke II, S. 243.

4) Vgl. für die von Riemann benutzte Verwendung der Kugel zur Darstellung komplexer Größen C. Neumann, Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, Leipzig 1865, für die linearen Substitutionen F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig 1884, erster Abschnitt, Kapitel II.

26.

Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung.

Auf die Lehre von den Kegelschnitten ist Gauß als Astronom immer wieder geführt worden. Besonders eifrig hat er sich damit im Frühjahr 1843 beschäftigt. In dem Briefe an Schumacher vom 12. Mai 1843 erzählt er, daß er „anfangs durch zufällige Umstände“ seit vier bis sechs Wochen in einige mathematische Spekulationen hineingezogen worden sei, „wo ich immer wieder durch neue Aussichten in andere Richtungen gelenkt wurde und vieles erreicht, vieles verfehlt habe. . . . Jene Spekulationen betrafen großenteils weniger neue Sachen als Durchführung mir eigentümlicher Methoden; zuletzt u. a. mehreres sich auf die Kegelschnitte Beziehendes. Mir ist dabei wiederholt in Erinnerung gekommen, wie ich vor einem halben Jahrhundert, als ich zuerst Newtons Principia las[1]), mehreres unbefriedigend fand, namentlich seine an sich herrlichen Sätze die Kegelschnitte betreffend. Aber ich las immer mit dem Gefühl, daß ich durch das Erlernte nicht Herr der Sache wurde; besonders quälte mich die gerade Linie, mit deren Hilfe ein Kegelschnitt beschrieben werden kann[2]). . . . Herr des Gegenstandes ist man doch erst dann, wenn man alle andern, diese magische gerade Linie betreffenden Fragen beantworten kann; namentlich will man wissen, welche Relationen diese gerade Linie zu den Elementen des Kegelschnittes habe, ob man diese Elemente selbst mit Leichtigkeit aus der Lage jener geraden Linie und der [gegebenen Punkte des Kegelschnittes] ableiten könne. Verschiedenes dieser Art kann ich jetzt recht artig ausrichten, ich weiß aber nicht, ob ich selbst das Ganze durchführen kann, da andere Geschäfte mich nötigen abzubrechen“ (W. VIII, S. 295).

Was Gauß damals über seine Spekulationen niedergeschrieben hat, ist aus dem Nachlaß W. VIII, S. 341—344 abgedruckt. Die ihm eigentümliche Methode war wieder die Benutzung komplexer

1) Gauß hat sein Exemplar der Principia im Jahre 1794 erworben.

2) Es handelt sich um die Konstruktion eines Kegelschnitts mittels zweier um ihre Scheitelpunkte drehbarer Winkel, deren eines Schenkelpaar sich auf einer Geraden schneidet, während der Durchschnittspunkt des anderen Schenkelpaares den Kegelschnitt beschreibt, I. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica, London 1687, Liber I, sectio 5, Lemma 21. Vgl. auch C. Maclaurin, Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis, London 1720, erster Abschnitt.

Größen; mittels dieses Verfahrens hatte er schon etwa seit 1831 begonnen, die Kegelschnitte zu behandeln (W. VIII, S. 339—340).

Gauß hat die abgebrochene Arbeit nicht wieder aufgenommen, nicht aus Mangel an Zeit, sondern weil ihm zufällig ein Buch in die Hände fiel, worin, wie er am 15. Mai 1843 an Schumacher schreibt, „die Quintessenz der Lehre von den Kegelschnitten in nucem gebracht ist". Es war der schon 1827 erschienene Barycentrische Calcul von Möbius, ein Buch, das er, als es ihm 1828 vom Verfasser zugegangen war, „ohne viele Erwartung davon zu haben, zunächst auf die Seite gelegt und später völlig vergessen hatte", das aber, wie er jetzt „mit großem Vergnügen" fand, „auf dem leichtesten Wege zur Auflösung aller dahin gehörigen Aufgaben führt" (W. VIII, S. 297)[1]).

Daß Gauß sich in das Buch von Möbius vertieft hat, bezeugen auch die aus dem Nachlaß abgedruckten Notizen über das Pentagramma mirificum (Fragment [11], W. VIII, S. 109—111) und über den Resultantencalcul (W. VIII, S. 298).

Wenn Gauß im Barycentrischen Calcul die Quintessenz der Lehre von den Kegelschnitten erblickt hat, so wird man daraus schließen dürfen, daß ihm die Untersuchungen Poncelets, Steiners und Plückers fremd geblieben waren. Um seine Stellung zur neueren Geometrie zu bezeichnen, genügt es daher nicht zu sagen, er habe die analytischen Methoden bevorzugt, man muß vielmehr hinzufügen, daß er kein inneres Verhältnis zu den Auffassungen gewonnen hat, die der projektiven Geometrie eigentümlich sind.

Ebenfalls in das Jahr 1843 sind Auszüge zu setzen, die sich Gauß aus zwei in den Pariser Comptes rendus vom 24. April 1843 erschienenen Noten Cauchys gemacht hat. Sie stehen teils auf einer Notiztafel, die Gauß im April 1840 von Schumacher zum Geschenk erhalten hatte (Br. G.-Sch. III, S. 369) und die sich gegenwärtig im Besitz seines Enkels, Hrn. C. Gauß in Hameln, befindet, teils in dem Handbuch 19 Be, S. 254—257; auch die Notiz über die Kreisschnitte, ebenda S. 253, hängt damit zusammen. Diese Auszüge verdienen um so mehr Beachtung, als die im Nachlaß vorhandenen Notizen über Abhandlungen, die Gauß gelesen hatte, lediglich aus der Göttinger Studienzeit (1795—1798) stammen; aus der späteren Zeit sind uns jedenfalls keine Aufzeichnungen dieser Art erhalten, und auch in den Handbüchern fehlen sie, abgesehen von dem soeben erwähnten Ausnahmefall.

1) Vgl. auch den Brief an Schumacher vom 19. Mai 1843, Br. G.-Sch. IV, S. 151.

Gauß muß also in den Sätzen von Cauchy etwas Besonderes gefunden haben, vielleicht Berührungspunkte mit eigenen Untersuchungen.

In der ersten Note[1]) betrachtet Cauchy eine ganze rationale Funktion der rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Ebene und zeigt, daß man ihren Werten eine einfache geometrische Bedeutung beilegen kann; hiervon werden Anwendungen auf die Kegelschnitte gemacht.

Die zweite Note[2]) enthält eine analytische Lösung der Aufgabe von Amyot, eine Fläche zweiter Ordnung als geometrischen Ort der Punkte darzustellen, bei denen das Produkt der Entfernungen von zwei festen Ebenen zu dem Quadrat der Entfernung von einem festen Punkte in einem gegebenen Verhältnis steht[3]). Cauchy zeigt, daß die Aufgabe, abgesehen von der Ausziehung gewisser Quadratwurzeln, auf eine Gleichung dritten Grades führt, die mit der bekannten Gleichung für die reziproken Quadrate der Hauptachsen übereinstimmt, ein Ergebnis, das man bei Heranziehung der Kreisschnitte leicht bestätigen wird.

Zu der Gleichung dritten Grades bemerkt Gauß: „Dies Resultat ist ganz identisch mit meinem eigenen, vor 24 Jahren publizierten, was auch auf einem besonderen Blatte steht“, und fügt die Buchstabenvertauschung hinzu, die Cauchys Gleichung in die seinige überführe. Die Abhandlung, auf die er sich bezieht, ist die 1818 erschienene Determinatio attractionis, quam ... exerceret planeta ..., und zwar handelt es sich um die Formel [13] (W. III, S. 341). Das besondere Blatt ist die Seite 114 des Handbuchs 19 Be; sie enthält die kubische Gleichung für die reziproken Quadrate der Hauptachsen genau in der von Gauß angegebenen Bezeichnung. Damit stimmt, daß eine Notiz auf S. 103 des Handbuchs das Datum des 20. Februar 1817 trägt. In anderer Bezeichnungsweise findet sich die kubische Gleichung auf S. 166 desselben Handbuches; diese etwa aus dem Jahre 1831 stammende Notiz ist W. II, S. 307 abgedruckt. In geschichtlicher Beziehung sei noch

1) A. L. Cauchy, Mémoire sur la synthèse algébrique, Comptes rendus, t. 16, Paris 1843, S. 867, Oeuvres, 1. série, t. 7, Paris 1892, S. 382.

2) A. L. Cauchy, Notes annexées au Rapport sur le Mémoire de M. Amyot, Comptes rendus, ebenda, S. 885, Oeuvres, ebenda S. 377.

3) Ein ausführlicher Bericht über die der Pariser Akademie eingereichte Abhandlung Amyots: Nouvelle méthode de génération et de discussion des surfaces du second ordre von Cauchy steht Comptes rendus ebenda, S. 783, Oeuvres, ebenda S. 325; die Abhandlung Amyots ist abgedruckt in Liouvilles Journal, 2. série, t. 8, 1843, S. 163.

bemerkt, daß die kubische Gleichung schon 1812 von Hachette und Petit[1]) angegeben war und daß Cauchy sie 1826 abgeleitet hatte[2]).

27.

Sphärische Trigonometrie.

De Gua[3]) und Lagrange[4]) hatten gezeigt, daß die Cosinusformel zum Aufbau der ganzen sphärischen Trigonometrie ausreicht, ihre Ableitungen gelten indessen nur für Bogen, die nicht größer als 90° sind. In dem Zusatz VII (1810) zu Carnots Geometrie der Stellung (2. Teil, S. 373, W. IV, S. 401) hat Gauß diese Lücke ausgefüllt und Bogen bis zu 180° zugelassen, wie sie in der Praxis tatsächlich vorkommen[5]). Aber schon in der Theoria motus corporum coelestium, die 1809 erschienen war, hatte er im Art. 54 auf die allgemeinste Auffassung des sphärischen Dreiecks hingewiesen, bei der weder Seiten noch Winkel irgend welchen Beschränkungen unterworfen seien; die ausführlichere Darstellung, die er in Aussicht stellte, ist nicht veröffentlicht worden. Später hat Möbius, auch hier in den Spuren von Gauß wandelnd, die Untersuchung für Bogen und Winkel durchgeführt, die bis 360° reichen[6]), zur vollen Allgemeinheit ist aber erst Study (1893) gelangt[7]).

Die vier Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie lauten in der Gestalt, die Gauß sich zu seinem Gebrauch auf-

---

1) Hachette und Petit, De l'équation qui a pour racines les carrés des demiaxes principaux d'une surface du second ordre, Correspondance sur l'école polytechnique, t. 2, 1812, S. 324, 327.

2) A. L. Cauchy, Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie, t. I, Paris 1826, S. 240; Oeuvres, 2. série, t. 5, S. 250.

3) J. P. de Gua, Trigonométrie sphérique, Mém. de l'Acad., année 1783, Paris 1786, S. 291.

4) J. L. Lagrange, Solution de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques, Journal de l'école polytechnique, cahier 6, 1798, S. 279, Oeuvres, t. 7, S. 329.

5) Für die rechtwinkligen Dreiecke hatte schon Klügel diese Erweiterung vorgenommen, Analytische Trigonometrie, Braunschweig 1770.

6) A. F. Möbius, Ueber eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik, Abhandlungen bei Begründung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften herausgegeben von der Jablonowskischen Gesellschaft d. W., Leipzig 1846, S. 45, Werke II, S. 1.

7) E. Study, Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen, Leipziger Abhandlungen, Bd. 21, 1893.

gezeichnet hatte und die er für die angemessenste hielt (Brief an Schumacher vom 26. September 1844, Br. G.-Sch., IV, S. 310):

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,\\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A,\\ \cos A \cos c &= \operatorname{cotang} b \sin c - \operatorname{cotang} B \sin A,\\ \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.\end{aligned}$$

Sie sind nebst den zugehörigen, ebenfalls von Gauß angegebenen Differentialformeln in die Sammlung von Hülfstafeln aufgenommen worden, die Warnstorff 1845 als neue Ausgabe der von Schumacher 1822 veröffentlichten Tafeln herausgegeben hat [1]). Man findet hier auch eine Anweisung, die dritte Formel dem Gedächtnis einzuprägen, welche Gauß, wie Wittstein berichtet [2]), seinen Zuhörern mitzuteilen pflegte.

Im Art. 54 der Theoria motus (1809) hatte Gauß ohne Beweis vier Gleichungen zwischen den sechs Stücken eines sphärischen Dreiecks angegeben, die er als nützlich für die Auflösung eines solchen Dreiecks bezeichnete, wenn eine Seite und die anliegenden Winkel gegeben sind. Gefunden hatte er diese Gleichungen, wie es scheint, auf dem Umwege von Betrachtungen über die Frage, wie man die Gleichungen zwischen den Stücken eines sphärischen Dreiecks auf Gleichungen zwischen den Stücken eines ebenen Dreiecks zurückführen könne (W. IV, S. 404). Später hat er in dem Brief an Gerling vom 18. Februar 1815 eine einfache Herleitung gegeben (W. VIII, S. 289); dabei findet man zugleich die richtigen Vorzeichen der linken Seiten, die, wie Gauß bereits in der Theoria motus bemerkt hatte, bei der Ausdehnung über 180^0 besonders bestimmt werden müssen.

Delambre hat in der ausführlichen Besprechung der Theoria motus, die er in der Connaissance des temps pour l'an 1812, Paris, juillet 1810, veröffentlicht hat, darauf hingewiesen (S. 451), daß er jene Formeln schon im Jahre 1807 bekannt gemacht habe [3]). Er

1) G. H. L. Warnstorff, Sammlung von Hülfstafeln, Altona 1845, S. 132. Die Formeln werden dort nicht ausdrücklich als von Gauß herrührend bezeichnet, wie es bei den anderen Beiträgen von Gauß geschehen ist, z. B. bei den Tafeln für barometrisches Höhenmessen; vgl. W. IX, S. 456.

2) Th. Wittstein, Lehrbuch der Elementar-Mathematik, 2. Band, 2. Abteilung, Hannover 1862, S. 146: die betreffende Stelle ist abgedruckt W. X 1, S. 457.

3) Connaissance des temps pour l'an 1809, Paris avril 1807, S. 445. Auch Delambre hat die Formeln ohne Beweis mitgeteilt. Ein Beweis ist zuerst von K. B. Mollweide gegeben worden, der die Formeln selbständig gefunden hat,

fügt hinzu: „Quand j'eus trouvé ces formules, j'en cherchai des applications qui pouvaient être vraiment utiles; n'en voyant aucune je les donnai simplement comme curieuses“, und wiederholt dreimal, daß er ihnen die Neperschen Analogien vorziehe (S. 364, 370, 385). Eine Erfahrung von mehr als hundert Jahren hat gezeigt, daß die „Delambreschen Gleichungen“ für die Auflösung der sphärischen Dreiecke wahrhaft nützlich sind[1]); im Besonderen werden sie in der Geodäsie bei der Berechnung der Soldnerschen (rechtwinklig-sphärischen) Koordinaten angewandt[2]).

Für den Legendreschen Satz von der Zurückführung eines kleinen sphärischen Dreiecks auf ein ebenes Dreieck mit eben so langen Seiten sei auf den fünften Abschnitt dieses Aufsatzes (Nr. 30) verwiesen. Hier möge nur noch die zierliche Lösung der Aufgabe erwähnt werden, den Ort der Spitze eines sphärischen Dreiecks auf gegebener Grundseite und mit gegebenem Inhalt zu finden, die Gauß in dem Briefe an Schumacher vom 6. Januar 1842 entwickelt hat (W. VIII, S. 293). Sie gehört in die Zeit der „geometrischen Nachblüte“, aus der die Mehrzahl der Untersuchungen herrührt, über die in diesem Abschnitt berichtet wurde.

Zusätze zur ebenen und sphärischen Trigonometrie, Monatliche Correspondenz, Bd. 18, 1808, S. 394.

1) Vgl. E. Hammer, Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, 4. Aufl., Stuttgart 1916, S. 479, 481.

2) Vgl. W. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, Bd. III, 4. Aufl., Stuttgart 1896, S. 259.

Abschnitt V.

Die allgemeine Lehre von den krummen Flächen.

28.

Entwicklung der Grundgedanken bis zum Jahre 1816.

Ähnlich wie im 17. Jahrhundert aus den Bedürfnissen der Mechanik die Infinitesimalrechnung hervorgegangen ist, verdankte im 19. Jahrhundert die allgemeine Lehre von den krummen Flächen ihre Entstehung der Geodäsie. In beiden Fällen hat sich aus der angewandten Mathematik ein neuer, lebensfähiger Zweig der reinen Mathematik losgelöst, hat ein selbständiges Dasein gewonnen und sich zu einem ausgedehnten, reich gegliederten Inbegriff theoretischer Untersuchungen ausgestaltet.

Die Frage nach der Gestalt und der Größe der Erde hatte die Astronomen, Physiker und Mathematiker während des 18. Jahrhunderts lebhaft beschäftigt, ja die großen Gradmessungen in Lappland (1736—1737) und Peru (1735—1741) hatten die Aufmerksamkeit aller Gebildeten erregt. Handelte es sich hier um einen rein wissenschaftlichen Gegenstand, so gewann die Geodäsie bald auch praktische Wichtigkeit. Die Einführung des metrischen Systems veranlaßte die Gradmessung von Méchain und Delambre zwischen Dünkirchen und Barcelona (1792—1798). Dazu kamen die Anforderungen der Heeresführung und der Steuerverwaltung, die eine planmäßige Triangulierung der Staaten nötig machten. Hand in Hand mit der Ausdehnung der geodätischen Messungen ging die Ausbildung und Verfeinerung der mathematischen Hilfsmittel.

Im Jahre 1816 hatte Schumacher, seit 1815 Leiter der Sternwarte zu Altona, von König Friedrich VI. von Dänemark den Auftrag erhalten, Gradmessungen im Meridian von Skagen bis Lauenburg und im Parallel von Kopenhagen bis zur Westküste Jütlands als Grundlage für eine spätere Triangulierung auszuführen. Als Schumacher sogleich bei Gauß anfragte, ob es sich ermöglichen ließe, den Meridianbogen durch das Königreich Hannover fortzusetzen und so den Anschluß an die Dreiecke des preußischen Generalstabs zu gewinnen, antwortete dieser am 5. Juli 1816 mit einer bei ihm ungewöhnlichen Wärme des Tones:

„Vor allen Dingen meinen herzlichen Glückwunsch zu der herrlichen, großen Unternehmung, die Sie mir in Ihrem letzten

Briefe ankündigen. Diese Gradmessung in den k. dänischen Staaten wird uns, an sich schon, über die Gestalt der Erde schöne Aufschlüsse geben. Ich zweifle indessen gar nicht, daß es in Zukunft möglich zu machen sein wird, Ihre Messungen durch das Königreich Hannover südlich fortzusetzen. . . . Ueber die Art, die gemessenen Dreiecke im Kalkül zu behandeln, habe ich mir eine eigene Methode entworfen, die aber für einen Brief viel zu weitläufig würde. In Zukunft . . . . werde ich mit Ihnen darüber ausführlich konferieren: ja ich erbiete mich, die Berechnung der Hauptdreiecke selbst auf mich zu nehmen“ (W. IX, S. 345).

Daß Gauß Freude an geodätischen Messungen und Rechnungen hatte, läßt sich bis in die Frühzeit hinein verfolgen. Zum Beispiel beteiligte er sich im August und September 1803 an den Beobachtungen der Pulversignale, die v. Zach auf dem Brocken veranstaltete, und lieferte um dieselbe Zeit Berechnungen für die von dem preußischen Generalmajor v. Lecoq vorgenommene trigonometrische Aufnahme Westfalens[1]).

Als Gauß im September 1812 v. Zach auf der Sternwarte Seeberg bei Gotha besuchte, fand er (T. Nr. 142) seine Auflösung der Aufgabe, die Anziehung eines elliptischen Sphäroides zu bestimmen, die er 1813 veröffentlicht hat (W. V, S. 1). In der Selbstanzeige sagt er, die Auflösung sei so ausführlich dargestellt, um sie „auch weniger geübten Lesern verständlich zu machen, denen diese für die Gestalt der Erde so interessanten Untersuchungen bisher ganz unzugänglich waren“ (W. V, S. 217).

Daß Gauß sich in der Zeit zwischen 1812 und 1816 mit der Lehre von den kürzesten Linien auf dem elliptischen Sphäroid beschäftigt hat, zeigt schon der vorher angeführte Brief an Schumacher vom 5. Juli 1816. Dazu kommen die Briefe an Olbers vom 13. Januar 1821 (W. IX, S. 367) und an Bessel vom 11. März 1821 und 15. November 1822 (Br. G.-Bessel, S. 380 und 410), in denen er bemerkt, er habe seine Theorie der Behandlung der Messungen auf der Oberfläche der Erde schon seit geraumer Zeit entwickelt; seine Andeutungen lassen erkennen, daß er damit das in den artt. 11 und 16 der Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie (W. IV, S. 274 und 286) dargelegte Verfahren meinte. Auch erklärt er in der Selbstanzeige der zweiten Abhandlung über Gegenstände der höheren Geodäsie vom 28. September 1846: „Der Verfasser, welcher alle diese Unter-

1) Näheres findet man in dem Aufsatz von Galle über die geodätischen Arbeiten von Gauß, der demnächst in diesen Materialien erscheinen wird.

suchungen schon vor mehr als dreißig Jahren zu seinem Privatgebrauch durchgeführt und nur bisher zur Veröffentlichung noch keine Veranlassung gefunden hatte ..." (W. IV, S. 353).

Gauß hat jedoch damals noch mehr besessen. Er kannte zunächst die in dem Brief an Schumacher vom 21. November 1825 (W. VIII, S. 401) erwähnte Verallgemeinerung des Legendreschen Lehrsatzes von der Zurückführung eines kleinen sphärischen Dreiecks auf ein ebenes Dreieck mit eben so langen Seiten. Ferner wird schon in § 10 der Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum (1813) auf die Lehre von der Abbildung der krummen Flächen hingewiesen (W. V, S. 14). Im Frühjahr 1816 hatte Gauß als Preisaufgabe für die neue, von v. Lindenau und Bohnenberger begründete Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften die Aufgabe vorgeschlagen, zwei krumme Flächen mit Erhaltung der Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen auf einander abzubilden[1]. Der Brief an Schumacher vom 5. Juli 1816 (W. VIII, S. 370) beweist, daß er ihre Lösung besaß; übrigens hat er diese in einer gleichzeitig niedergeschriebenen Aufzeichnung angegeben (W. VIII, S. 371). Unmittelbar darauf folgt (Handbuch 16 Bb, S. 71) das „schöne Theorem", daß einander entsprechende Stücke von Biegungsflächen, wenn sie auf die Himmelskugel mittels paralleler Normalen abgebildet werden, auf der Kugel Flächenstücke gleichen Inhalts ergeben (W. VIII, S. 372). Hierin liegt die Erhaltung der Gesamtkrümmung eines Flächenstückes gegenüber Biegungen. Aber auch der Begriff, freilich nicht der Name, des Krümmungsmaßes läßt sich bis in die Zeit zwischen 1813 und 1816 zurückverfolgen, denn eine Notiz aus dieser Zeit bringt den Satz, daß bei jener Abbildung auf die Kugel vom Halbmesser Eins das Verhältnis des Bildes eines Flächenelementes zu diesem selbst gleich dem Produkte der Hauptkrümmungen ist (W. VIII, S. 367).

Zusammenfassend und in einigen Punkten ergänzend kann man die Ergebnisse aus der allgemeinen Lehre von den krummen Flächen, zu denen Gauß bis zum Jahre 1816 gelangt war, etwa folgendermaßen darstellen:

1. Auffassung der kartesischen Koordinaten eines Punktes einer krummen Fläche als Funktionen von zwei Hilfsgrößen (Theoria attractionis § 10, W. V, S. 14)), Abbildung krummer Flächen (ebenda), Abbildung mittels paralleler Normalen auf die

---

1) Hierauf beziehen sich die Briefe von v. Lindenau an Gauß vom 18. und 28. Juni 1816 (Briefe im Gauß-Archiv); die Briefe von Gauß an v. Lindenau scheinen vernichtet worden zu sein, vgl. Br. G.-Bolyai, S. 156 (Brief von Sartorius v. Waltershausen an W. Bolyai vom 12. August 1856).

Kugel vom Halbmesser Eins (W. VIII, S. 367)[1]), konforme Abbildung zweier krummer Flächen auf einander (W. VIII, S. 370).

2. Abwicklung oder Biegung krummer Flächen als besonderer Fall der Abbildung; Begriff der Gesamtkrümmung eines Flächenstücks, Begriff des einem Punkte der Fläche zugeordneten Krümmungsmaßes, Erhaltung des Krümmungsmaßes gegenüber Biegungen (W. VIII, S. 376, 372).

3. Die Haupteigenschaften der kürzesten Linien auf krummen Flächen, genauere Untersuchung für das elliptische Sphäroid (W. IX, S. 72—77), Verallgemeinerung des Legendreschen Theorems auf beliebige Flächen (W. VIII, S. 401).

Man erkennt, daß bereits in der Zeit zwischen 1812 und 1816 die Fundamente für das Gebäude der Disquisitiones generales gelegt worden sind. Diese Leistung tritt jedoch erst in das rechte Licht, wenn man sich die gesamte Tätigkeit von Gauß während jenes Zeitraumes vergegenwärtigt.

In der reinen Mathematik hatte das Jahr 1812 mit der Veröffentlichung des ersten Teiles der Untersuchungen über die hypergeometrische Reihe begonnen (W. III, S. 123). Im Dezember 1815 und im Januar 1816 wurden der Göttinger Gesellschaft die beiden neuen Beweise für den Fundamentalsatz der Algebra vorgelegt (W. III. S. 31 und 57). Für die Zahlentheorie ist die im Februar 1817 vorgelegte Abhandlung über die quadratischen Reste zu nennen, die den fünften und den sechsten Beweis für das Reziprozitätsgesetz enthält (W. II, S. 47); auch die Lehre von den biquadratischen Resten ist damals gefördert worden, wie aus den Briefen an Bessel vom 23. Dezember 1816 (W. X 1, S. 76) und an Dirichlet vom 30. Mai 1828 (W. II, S. 516) hervorgeht. Aus der Geometrie sind die Untersuchungen zur Flächentheorie bereits erwähnt worden. Dazu kommen aus dem Jahre 1816 zwei Besprechungen von Versuchen, das Parallelenaxiom zu beweisen (W. IV, S. 363, VIII, S. 170). Wie wir gesehen haben, wußte Gauß hier mehr, als er öffentlich auszusprechen für gut fand, er war gerade damals zur nichteuklidischen Trigonometrie durchgedrungen (W. VIII, S. 176).

Die Abhandlung über die mechanische Quadratur vom 16. September 1814 bildet den Uebergang zur angewandten Mathematik (W. III, S. 163). In diese selbst führt die Bestimmung der Anziehung der homogenen elliptischen Sphäroide vom 18. März 1813

1) Die Beziehung der Richtungen im Raume auf die Punkte der Einheitskugel findet sich schon in der Scheda Ac, Varia, begonnen Nov. 1799, S. 3.

(W. V, S. 1). Im Anschluß an die Beobachtungen des Kometen vom Jahre 1813 wurde die Theoria motus nach der Seite der parabolischen Bahnen ergänzt; die betreffende Abhandlung ist vorgelegt am 10. September 1813 (W. VI, S. 25). Ferner sind anzuführen zahlreiche, meistens in den Göttinger Anzeigen veröffentlichte astronomische Rechnungen und Beobachtungen (W. VI, S. 354—392). Die Untersuchungen aber, denen Gauß während der Zeit von 1810 bis 1818 wohl den größten Teil seiner Zeit und Kraft gewidmet hat, die Störungen der Pallas, sind nicht abgeschlossen worden; erst im Jahre 1906 hat Brendel die Bruchstücke herausgegeben (W. VII, S. 439—600).

„In jener Zeit“ schreibt Sartorius von Waltershausen (S. 50), „schien ihm keine Anstrengung des Geistes und des Körpers zu groß, um eine Reihe von Arbeiten durchzuführen, dazu bestimmt, die Wissenschaft des 19. Jahrhunderts zu reformieren und ihr Fundamente zu unterbreiten, deren Festigkeit erst von künftigen Geschlechtern anerkannt und gewürdigt werden wird“.

29.

Die Kopenhagener Preisschrift (1822).

So lebhaft der Anteil war, den Gauß an den Gradmessungen nahm, so warm er die Nachricht von Schumachers Unternehmen begrüßt hatte, so hat er sich doch über den Vorschlag, den Meridian durch Hannover fortzusetzen, zurückhaltend geäußert. „In diesem Augenblick“, schreibt er am 5. Juli 1816, „kann ich zwar solchen Wunsch in Hannover noch nicht in Anregung bringen, da erst die Astronomie selbst noch so großer Unterstützung bedarf: allein ich bin überzeugt, daß demnächst unsere Regierung, die auch die Wissenschaften gern unterstützt, dem glorreichen Beispiel Ihres trefflichen Königs folgen werde“ (W. IX, S. 345). In der Tat näherte sich zu dieser Zeit der lange hingezogene Neubau der Göttinger Sternwarte der Vollendung, und Gauß war im April und Mai 1816 in München gewesen, um mit Reichenbach und Steinheil wegen der neu zu beschaffenden Meßwerkzeuge zu verhandeln. Im Herbst des Jahres hat er dann seinen Einzug in die Räume gehalten, die er fast 40 Jahre innehaben sollte.

Gaede hat auf Grund der Akten dargelegt, wie der „welterfahrene und geschäftsgewandte“ Schumacher (Br. G.-Sch. I, S. 190) in jahrelangen Verhandlungen die Schwierigkeiten überwand, die sich seinem zum „Sollizitieren“ wenig geneigten und geeigneten Freunde (Br. G.-Sch. I, S. 142) entgegenstellten, bis dieser endlich

durch die Kabinetsordre Georg IV., Königs von England und Hannover, vom 9. Mai 1820 den Auftrag zur Ausführung der Gradmessung erhielt[1]). Die Messungen im Felde haben fünf Arbeitsjahre, 1821 bis 1825, erfordert, und im Frühjahr 1827 folgte noch die astronomische Bestimmung des Breitenunterschiedes der Sternwarten zu Göttingen und zu Altona. Nunmehr wurde durch die Kabinetsordre vom 25. März 1828 die Triangulation des ganzen Königreichs Hannover befohlen, und Gauß am 14. April vom Ministerium mit der Leitung beauftragt. Wenn er auch an den Aufnahmen im Feld nicht mehr teilnahm, so erwuchs ihm doch aus den Messungsergebnissen eine große und öde Rechenarbeit, die erst mit dem Jahre 1848 zum Abschluß gekommen ist. Wiederholt hat Gauß beklagt, wie sehr er dadurch in seinen wissenschaftlichen Untersuchungen gehemmt werde. „Gewiß ist, daß wenn meine Lage immer die nämliche bleibt, ich den größern Teil meiner früheren theoretischen Arbeiten, denen noch, der einen mehr, der andern weniger an der Vollendung fehlt, und die von solcher Art sind, daß Vollendung sich nicht erzwingen läßt, wenn man eben will, mit ins Grab nehmen werde. Denn etwas Unvollendetes kann und mag ich einmal nicht geben“ (Brief an Bessel vom 15. November 1822, Br. G.-Bessel S. 410). Nur wer sich in eine solche Lage und Stimmung zu versetzen vermag, wird verstehen, wie es gekommen ist, daß Gauß nur einen Teil seiner umfangreichen Untersuchungen über die allgemeine Lehre von den krummen Flächen ausgearbeitet und bekanntgegeben hat.

Wir verdanken es wiederum Schumacher, daß Gauß mit der Veröffentlichung seiner Entdeckungen einen Anfang machte. Wie schon erwähnt wurde, hatte Gauß in dem Briefe vom 5. Juli 1816 von einer Preisfrage erzählt, die er für die neue astronomische Zeitschrift vorgeschlagen hatte, die aber nicht gewählt worden war. „Mir war eine interessante Aufgabe eingefallen“, schreibt er, „nämlich: allgemein eine gegebene Fläche so auf einer andern (gegebenen) zu projizieren (abzubilden), daß das Bild dem Original in den kleinsten Teilen ähnlich werde. Ein spezieller Fall ist, wenn die erste Fläche eine Kugel, die zweite eine Ebene ist. Hier sind die stereographische und die merkatorische Projektionen partikuläre Auflösungen. Man will aber die allgemeine Auflösung, worunter alle partikulären begriffen sind, für jede Arten von

---

1) Vgl. Gaede, Beiträge zur Kenntnis von Gauß' praktisch-geodätischen Arbeiten, Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. 14, 1885; auch als besondere Schrift, Karlsruhe 1885 erschienen.

Flächen. Es soll darüber in dem Journal philomathique bereits von Monge und Poinsot gearbeitet sein (wie Burckhardt an Lindenau geschrieben hat), allein da ich nicht genau weiß wo, so habe ich noch nicht nachsuchen können und weiß daher nicht, ob jener Herren Auflösungen ganz meiner Idee entsprechen und die Sache erschöpfen" (W. VIII, S. 370)[1]).

Schumacher benutzte die erste sich ihm darbietende Gelegenheit und veranlaßte, daß die Kopenhagener Sozietät der Wissenschaften im Jahre 1820 für 1821 die Preisaufgabe stellte, „generaliter superficiem datam in alia superficie ita exprimere, ut partes minimae imaginis archetypo fiant similes". Nachdem keine Abhandlung eingelaufen war, wurde die Aufgabe für 1822 erneuert. Als Schumacher am 4. Juni 1822 Gauß davon benachrichtigte (Br. G.-Sch. I, S. 267), antwortete dieser am 10. Juni: „Es tut mir leid, die Wiederholung Ihrer Preisfrage erst jetzt zu erfahren . . . aber so lange die praktischen Messungsarbeiten dieses Jahres dauern, kann ich natürlich an eine subtile theoretische Ausarbeitung gar nicht denken" (Br. G.-Sch. I, S. 270). Am 25. November d. J. fragte er bei seinem Freunde an, bis wann die Preisarbeit eingesendet werden müsse (Br. G.-Sch. I, S. 293), und nachdem dieser erwiedert hatte, bis Ende des Jahres, schickte ihm Gauß am 11. Dezember 1825 seine Ausarbeitung (Br. G.-Sch. I, S. 297). Am 23. Juli 1823 konnte Gauß melden, daß er den Preis erhalten habe (Br. G.-Sch., I, S. 317). Da die Kopenhagener Gesellschaft sich mit dem Druck der gekrönten Arbeiten nicht befaßte, ist die Abhandlung erst 1825 im dritten und letzten Hefte der von Schumacher herausgegebenen Astronomischen Abhandlungen erschienen (W. IV, S. 189; vgl. auch Br. G.-Sch. II, S. 5—7, 17, 22).

Der Begriff der Abbildung steht im Mittelpunkt der Gaußschen Lehre von den krummen Flächen. „Sie haben ganz Recht", schreibt Gauß am 11. Dezember 1825 an Hansen, „daß bei allen Kartenprojektionen die Ähnlichkeit der kleinsten Teile die wesentliche Bedingung ist, die man nur in ganz speziellen Fällen und Bedürfnissen hintansetzen darf. Es wäre wohl zweck-

1) Weder in dem Bulletin de la société philomathique noch in den sonstigen Veröffentlichungen von Monge und Poinsot hat sich eine auf die konforme Abbildung bezügliche Stelle finden lassen. Vielleicht hat Burckhardt an Poissons Note: Sur les surfaces élastiques gedacht, die im Bulletin, année 1814, S. 47 steht und in deren erstem Teil biegsame, unausdehnbare Flächen betrachtet werden. Die Note ist ein Auszug aus einer Abhandlung, die Poisson am 1. August 1814 gelesen hatte und die in dem zweiten Teil der Mémoires de l'Institut, année 1812, Paris 1816, S. 167 erschienen ist.

mäßig, den Darstellungen, die jener Bedingung Genüge leisten, einen eigenen Namen zu geben. Inzwischen, allgemein betrachtet, ist sie doch nur eine Unterabteilung des Generalbegriffs von Darstellung einer Fläche auf einer andern, die in der Tat gar nichts weiter enthält, als daß jedem Punkt der einen nach irgend einem stetigen Gesetz ein Punkt der andern korrespondieren soll. Es mag wohl etwas Anstrengung kosten, sich zu diesem allgemeinen Begriff zu erheben; dann aber fühlt man sich auch wirklich auf einem höhern Standpunkt, wo alles in vergrößerter Klarheit erscheint. . . . Man kann leicht zeigen, daß, wie allgemein dieser Begriff sei, doch allemal jeder unendlich kleine Teil (mit Ausnahme der Stellen an singulären Punkten oder Linien) wahrhaft perspektivisch dargestellt wird, entweder mit völliger Ähnlichkeit, so wie perspektivische Darstellung auf paralleler Tafel, oder mit halber Ähnlichkeit, in der in einem Sinn eine Verkürzung statt hat“ (Brief im Gauß-Archiv).

Für die Abbildungen, bei denen völlige Ähnlichkeit stattfindet, hat Gauß im Jahre 1843 das Beiwort konform vorgeschlagen (W. IV, S. 262); für den besonderen Fall der Abbildung des Erdsphäroids auf die Ebene hatte schon Schubert (1789) von einer projectio conformis gesprochen[1]. Den Satz, daß eine beliebige stetige Abbildung, von singulären Stellen abgesehen, im Unendlichkleinen projektiv ist, hat wohl Tissot (1859) zuerst bekannt gemacht[2].

Die konforme Abbildung hat eine Vorgeschichte. Schon die Griechen kannten und benutzten die stereographische Projektion der Kugel auf die Ebene, und Gerhard Mercator (1512—1594) hatte die nach ihm benannte Abbildung hinzugefügt. Lambert (1772) war dann zu dem allgemeinen Begriff solcher Abbildungen der Kugel auf eine Ebene gelangt, bei denen die Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen erhalten bleibt, und hatte verschiedene neue Projektionen dieser Art angegeben, die noch heute bei der Herstellung geographischer Karten verwendet werden[3].

Lambert hat in seiner Abhandlung auch die Formeln für die allgemeine konforme Abbildung einer Kugel auf eine Ebene mit-

---

1) F. Th. Schubert, De projectione sphaeroidis ellipticae geographica, Nova acta acad. sc. Petrop., t. 5 ad annum 1787, Petersburg 1789, S. 130.

2) A. Tissot, Sur les cartes géographiques, C. R. t. 49, Paris 1859, S. 673.

3) J. H. Lambert, Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten, erschienen in den Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik, 3. Teil, Berlin 1772, S. 105—199.

geteilt, die er Lagrange verdankte. Dieser geht aus von der bekannten Form für das Quadrat des Linienelementes der Kugel

$$(1) \qquad ds^2 = dp^2 + \cos^2 p \, . \, d\lambda^2,$$

die er durch die Substitution

$$(2) \qquad \mu = \log \operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}p)$$

auf die Form

$$(3) \qquad ds^2 = \cos^2 p (d\lambda^2 + d\mu^2)$$

bringt. Die Forderung, daß die Kugel konform auf die xy-Ebene abgebildet werden soll, führt nunmehr zu der Gleichung

$$(4) \qquad dx^2 + dy^2 = \varphi(\lambda, \mu)(d\lambda^2 + d\mu^2),$$

die, wie die von Lagrange bei Untersuchungen aus der Zahlentheorie häufig benutzte Identität

$$(5) \qquad (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AD - BC)^2 + (AC + BD)^2$$

zeigt, erfüllt ist, wenn man

$$(6) \qquad dx = n d\lambda - m d\mu, \quad dy = m d\lambda + n d\mu$$

setzt, und es ist daher, wie das d'Alembertsche Verfahren der linearen Verbindungen [1]) erkennen läßt, $x + \sqrt{-1} \, . \, y$ eine Funktion von $\lambda + \sqrt{-1} \, . \, \mu$ und gleichzeitig $x - \sqrt{-1} \, . \, y$ eine Funktion von $\lambda - \sqrt{-1} \, . \, \mu$. Hieraus ergeben sich endlich x und y als Funktionen von λ und μ, die der Gleichung (4) genügen.

Bald darauf hat Euler in einer am 4. September 1775 der Petersburger Akademie vorgelegten, 1778 veröffentlichten Abhandlung denselben Gegenstand behandelt [2]). Er vermeidet den Kunstgriff, die Identität (5) heranzuziehen, und gewinnt die Gleichungen (6) oder doch mit ihnen gleichbedeutende Gleichungen unmittelbar aus der Forderung der Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen. Damit ist zugleich bewiesen, daß das Bestehen der Gleichungen (6) nicht nur, wie bei Lagrange, hinreichend, sondern auch notwendig ist. Während ferner Lambert aus den Formeln von Lagrange keinen Nutzen gezogen hatte, gelingt es Euler, mit ihrer Hilfe besondere Lösungen der Aufgabe herzuleiten.

Ein Blick auf die vorstehenden Formeln läßt erkennen, daß das Verfahren von Lagrange und Euler sich ohne Weiteres auf

---

1) Vgl. P. Stäckel, Beiträge zur Geschichte der Funktionentheorie im 18. Jahrhundert, Bibliotheca mathem. (3), 2, 1901, S. 113 und 119.

2) L. Euler, De repraesentatione superficiei sphaericae super plano, Acta acad. sc. Petrop. t. 1 pro anno 1777: I, 1778, S. 107.

den allgemeineren Fall übertragen läßt, wo das Quadrat des Linienelementes der krummen Fläche, die konform auf die Ebene abgebildet werden soll, auf die Gestalt

(7) $$ds^2 = \psi(\lambda, \mu)(d\lambda^2 + d\mu^2)$$

gebracht werden kann. Für die Drehflächen, bei denen vermöge der Meridiane und Parallelkreise

(8) $$ds^2 = dp^2 + G(p)\, d\lambda^2$$

ist, gelingt das sofort durch die Substitution

(9) $$\mu = \int \frac{dp}{\sqrt{G(p)}}.$$

Auf diese Weise ist Lagrange 1781 zu den allgemeinen Formeln für die konforme Abbildung einer Drehfläche auf eine Ebene gelangt; er hat davon schöne Anwendungen gemacht[1]).

Der Fortschritt, den Gauß in der Preisschrift vom Jahre 1822 gemacht hat, liegt darin, daß er zeigte, wie man bei einer beliebigen (reellen) krummen Fläche, bei der das Quadrat des Linienelementes in der allgemeinen Form

(10) $$ds^2 = E\, dp^2 + 2F\, dp\, dq + G\, dq^2$$

gegeben ist, die besondere Form

(11) $$ds^2 = \psi(\lambda, \mu)(d\lambda^2 + d\mu^2)$$

herstellen kann. Dies geschieht, indem die Gleichung

(12) $$ds^2 = 0$$

integriert wird, oder was auf dasselbe herauskommt, indem für zwei konjugiert komplexe lineare Differentialformen, deren Produkt ds^2 ist, die ebenfalls konjugiert komplexen Eulerschen Multiplikatoren ermittelt werden. Damit aber erhält man zugleich die allgemeine konforme Abbildung der gegebenen krummen Fläche auf die Ebene, sodaß es des Verfahrens von Lagrange gar nicht mehr bedarf, und während bei Lagrange das Imaginäre nur formal als Mittel zur Integration der Gleichungen (6) auftrat, ist jetzt durch die Gleichung $ds^2 = 0$ der wahre Grund für das Auftreten von Funktionen komplexer Größen aufgedeckt.

Wer sich der hier dargelegten Auffassung anschließt, wird dem Urteil Jacobis nicht beipflichten können, daß „der Lagrange-

1) J. L. Lagrange, Sur la construction des cartes géographiques, Nouv. Mém. de l'Acad., année 1779, Berlin 1781, S. 161, 186; Oeuvres, t. 4, S. 635.

schen Arbeit nur wenig hinzuzusetzen war"[1]. Jacobi hat auch beanstandet, daß Gauß diese Arbeit nicht erwähnt habe; allein Gauß ist überhaupt nicht auf die Geschichte der konformen Abbildung eingegangen, ebenso wie sich auch Euler aller Anführungen enthalten hatte.

30.

Vorarbeiten zu den Allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen (1822—1825).

Gauß hatte der Kopenhagener Preisschrift als Kennwort den Ausspruch Newtons mitgegeben: Ab his via sternitur ad majora; er bildet den Schluß der 1704 als Anhang zur Optik veröffentlichten Abhandlung De quadratura curvarum, in der Newton ältere Untersuchungen bekannt gab, die ihn zur Fluxionsrechnung geführt hatten[2].

Was waren die größeren Dinge, zu denen die konforme Abbildung den Weg bahnte? Eine Andeutung findet man im Art. 4 der Preisschrift: „Wenn überdies [das Vergrößerungsverhältnis bei der Abbildung] $m = 1$ ist, wird eine vollkommene Gleichheit [der einander entsprechenden Linienelemente] stattfinden, und die eine Fläche sich auf die andere abwickeln lassen" (W. IV, S. 195). Daß die Lehre von der Abwicklung oder Biegung der krummen Flächen gemeint war, beweist eine Aufzeichnung, die Gauß am 13. Dezember 1822, zwei Tage, nachdem er die Beantwortung der Preisfrage an Schumacher abgesandt hatte, begonnen und am 15. Dezember beendet hat (W. VIII, S. 374—384). Sie führt den Titel: Stand meiner Untersuchung über die Umformung der Flächen und zeigt, daß er damals für den besonderen Fall, wo das Quadrat des Linienelementes vermöge der konformen Abbildung auf die Form

$$ds^2 = m(dp^2 + dq^2) \tag{1}$$

gebracht ist, die Rechnungen durchgeführt hat, die sich für den allgemeinen Fall, wo

$$ds^2 = E dp^2 + 2 F dp\, dq + G dq^2 \tag{2}$$

---

1) C. G. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, gehalten im W.-S. 1842/43, 2. Ausgabe, Berlin 1884, S. 215; vgl. auch Br. G-Sch., III, S. 173, der unterdrückte Name ist v. Littrow.

2) I. Newton, Opuscula mathematica, rec. I. Castillioneus, vol. 1, Lausanne und Genf 1744, S. 244; es heißt wörtlich: „Et his principiis via ad majora sternitur".

ist, in den Artt. 9 und 10 der Disq. gen. finden. Das Endergebnis besteht in dem Lehrsatz, daß das Krümmungsmaß der Fläche allein durch die Funktion $m(p, q)$ und deren erste und zweite partielle Ableitungen nach p und q ausgedrückt werden kann. Hieraus folgt sogleich, daß das Krümmungsmaß bei den Biegungen einer Fläche erhalten bleibt.

Wir haben gesehen, daß Gauß das „schöne Theorem" von der Erhaltung des Krümmungsmaßes oder genauer von der Erhaltung der Gesamtkrümmung solcher Flächenstücke, die durch Biegung aus einander hervorgehen, bereits im Jahre 1816 besaß. Wenn man annimmt, daß er den vorstehenden aus der konformen Abbildung fließenden Beweis, der in der Aufzeichnung vom Dezember 1822 als Ziel der Untersuchung erscheint, in der Zeit zwischen 1816 und 1822 gefunden hat, so entsteht die Frage, welches die ursprüngliche Quelle für das Theorem gewesen ist. Aufzeichnungen aus der Zeit vor 1816, die sich darauf beziehen, sind nicht vorhanden, es läßt sich jedoch sehr wahrscheinlich machen, daß die Lehre von den kürzesten Linien auf krummen Flächen den Zugang eröffnet hat.

Die stärksten Gründe für diese Behauptung ergeben sich aus einem ersten Entwurfe der Disq. gen., der den Titel führt: „Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen" und der aus den letzten Monaten des Jahres 1825 stammt (W. VIII, S. 408—442). Es empfiehlt sich daher, zunächst die Entstehung dieses Entwurfs zu schildern und jene Frage im Zusammenhang mit dem Bericht über dessen Inhalt zu erörtern.

Schon am 28. Juli 1823 hatte Gauß, an die kürzlich erfolgte Erteilung des Kopenhagener Preises anknüpfend, zu Olbers bemerkt: „Sollte ich in diesem Leben noch einmal in eine dem Arbeiten günstigere Lage kommen, so werde ich diese Abhandlung [die Preisschrift] mit als Teil einer viel ausgedehnteren Untersuchung verarbeiten" (Br. G.-O., 2, S. 252). Er meinte damit ein größeres, die Theorie und die Praxis der höheren Geodäsie behandelndes Werk. Ein solcher Plan wird ausdrücklich in dem Brief an Olbers vom 9. Oktober 1825 erwähnt. „Ich habe dieser Tage angefangen, in Beziehung auf mein künftiges Werk über Höhere Geodäsie einen (sehr) kleinen Teil dessen, was die krummen Flächen betrifft, in Gedanken etwas zu ordnen. Allein ich überzeuge mich, daß ich bei der Eigentümlichkeit meiner ganzen Behandlung des Zusammenhanges wegen gezwungen bin, sehr weit auszuholen, sodaß ich sogar meine Ansicht über die Krümmungshalbmesser bei planen Kurven vorausschicken muß. Ich bin darüber fast

zweifelhaft geworden, ob es nicht geratener sein wird, einen Teil dieser Lehren, der ganz rein geometrisch (in analytischer Form) ist und Neues mit Bekanntem gemischt in neuer Form enthält, erst besonders auszuarbeiten, es vielleicht von dem Werke abzutrennen und als eine oder zwei Abhandlungen in unsere Commentationen einzurücken. Indessen kann ich noch vorerst die Form der Bekanntmachung auf sich beruhen lassen und werde einstweilen in dem zu Papier bringen fortfahren“ (W. VIII, S. 397, IX, S. 376)[1].

Die Briefe an Schumacher vom 21. November 1825 (W. VIII, S. 400) und an Hansen vom 11. Dezember 1825 (Brief im Gauß-Archiv) zeigen, daß Gauß bis gegen Ende des Jahres an dem Entwurf gearbeitet hat. Mit der Darstellung des Krümmungsmaßes bei geodätischen Polarkoordinaten, für die

$$(3) \qquad ds^2 = dp^2 + G\,dq^2$$

wird, hat er abgebrochen, augenscheinlich, weil er jetzt erkannte, daß es möglich sei, eine entsprechende Formel für die allgemeine Form (2) des Quadrats des Linienelementes aufzustellen. Bei der wirklichen Durchführung dieses Gedankens, an die er sogleich ging, ist Gauß auf große Schwierigkeiten gestoßen. Er hat sie erst im Herbst 1826 überwunden. Hierüber wird in der nächsten Nummer berichtet werden, in dieser Nummer wenden wir uns zu den Neuen allgemeinen Untersuchungen.

Wie Gauß in dem Brief an Olbers vom 9. Oktober 1825 angekündigt hatte, beginnen die Neuen allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen mit den ihm eigentümlichen Ansichten über die Krümmung ebener Kurven (artt. 1—6). Zwei Punkte sind dabei wesentlich, erstens daß er gerichtete Gerade einführt und so die Frage der Vorzeichen klärt, zweitens, daß die Krümmung der Kurven mittels derjenigen Abbildung auf den Kreis vom Halbmesser Eins eingeführt wird, bei der Punkte mit parallelen Normalen einander entsprechen.

Zum Raume übergehend bringt Gauß zunächst (artt. 7—8) sieben einleitende Sätze, die später in die artt. 1, 2 und 4 der Disq. gen. aufgenommen worden sind; sie dienen dazu, die Abbildung der krummen Fläche auf die Kugel vom Halbmesser Eins mittels paralleler Normalen zu erleichtern. Das vorletzte Theorem ist neu; es findet sich auch im Handbuch 19 Be, S. 78 und stammt aus der Zeit um 1810.

---

1) Vgl. auch den Brief an Pfaff vom 21. März 1825: „Nach Beendigung der Messungen werde ich darüber ein eigenes Werk, vermutlich von bedeutender Ausdehnung, ausarbeiten“ (W. X 1, S. 250).

Es folgt (artt. 9—11) die Untersuchung des Verhaltens einer krummen Fläche in der Umgebung eines regulären Punktes. Gauß benutzt hier nicht wie in den Disq. gen. (art. 8) das Verfahren der Reihenentwicklung, sondern betrachtet die Schnittkurven der Fläche mit dem Büschel der durch den betrachteten Punkt gehenden Ebenen; er gelangt daher hier auch zu dem Satze von Meusnier, der in den Disq. gen. nicht vorkommt.

Am Schluß des art. 11 wird die Abbildung der krummen Fläche auf die Einheitskugel mittels paralleler Normalen gelehrt. Von hier aus gelangt man, in Verallgemeinerung der bei den ebenen Kurven angestellten Ueberlegungen, zu den Begriffen der Gesamtkrümmung eines Flächenstückes und des Krümmungsmaßes, das einem Flächenpunkte zugeordnet ist. Die einem Flächenstück entsprechende Area auf der Einheitskugel wird hier noch nicht als deren Gesamtkrümmung bezeichnet. Dieser Name ist also wohl erst später entstanden. In dem Brief an Olbers vom 20. Oktober 1825 sagt Gauß, seine Untersuchungen bezögen sich auf eine Menge von Gegenständen, die er nicht anführen könne, „weil die Begriffe davon nicht gangbar sind und selbst noch keine Namen dafür existieren“ (Br. G.-O. 2, S. 431, W. VIII, S. 398). Endlich wird der Zusammenhang zwischen dem Krümmungsmaß und den beiden Hauptkrümmungen entwickelt.

Im Unterschied gegen die Disq. gen. wendet sich Gauß nunmehr sogleich zu den kürzesten Linien, die auf der betrachteten krummen Fläche liegen, und geht hier auch auf ganz andere Art vor als dort.

Die Aufgabe, zwei gegebene Punkte einer krummen Fläche durch die kürzeste Linie zu verbinden, war 1697 von Johann Bernoulli den Geometern gestellt worden[1]), aber erst 1732 hatte Euler eine Lösung veröffentlicht[2]); Bernoulli gab sein Verfahren 1742 bekannt[3]). Im Laufe des 18. Jahrhunderts wurden besonders die kürzesten Linien auf dem elliptischen Sphäroide untersucht, weil sie für die Geodäsie wichtig waren. Diese Kurven wurden daher als geodätische Linien bezeichnet; erst seit der Mitte des 19. Jahr-

1) Joh. Bernoulli, Journal des savants, année 1697, S. 394, Opera omnia, Lausanne 1742, t. I, S. 204.

2) L. Euler, De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente, Comment. acad. sc. Petrop. t. 3 (1728), 1732, S. 110.

3) Joh. Bernoulli, In superficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta brevissimam, Opera omnia, Lausanne 1742, t. IV, S. 108.

hunderts ist es üblich geworden, bei beliebigen krummen Flächen von geodätischen Linien zu sprechen[1]).

Gauß war, wie wir gesehen haben (S. 105), schon vor 1816 damit beschäftigt gewesen, die Lehre von den kürzesten Linien des Sphäroides für die Zwecke der Geodäsie auszubauen. Er hat sich aber damals auch schon mit den kürzesten Linien auf beliebigen krummen Flächen beschäftigt, denn in dem Briefe an Schumacher vom 21. November 1825 schreibt er, seine allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen seien durch manchen glücklichen Fund belohnt worden. „So habe ich zum Beispiel die Generalisierung des Legendreschen Theorems, daß auf der Kugel die Seiten [eines kleinen sphärischen Dreiecks] proxime den Sinus der um $\frac{1}{3}$ des sphärischen Exzesses verminderten Winkel proportional sind, auf krumme Flächen jeder Art (wo die Verteilung ungleich geschehen muß), welche ich der Materie nach schon seit vielen Jahren besessen, aber noch nicht zu möglicher Mitteilung an andere entwickelt hatte, jetzt auf eine überaus elegante Gestalt gebracht" (W. VIII, S. 400; vgl. auch den Brief an Olbers vom 20. Oktober 1825, Br. G.-O. 2, S. 431, W. VIII, S. 399). In einer gleichzeitig niedergeschriebenen Aufzeichnung hat Gauß sein Verfahren angedeutet (W. VIII, S. 401—405); jene ungleiche Verteilung wird danach bedingt durch die Werte, die dem Krümmungsmaß der Fläche in den Eckpunkten des Dreiecks zukommen.

Legendre hatte sein Theorem von der Zurückführung eines kleinen sphärischen Dreiecks auf ein ebenes Dreieck mit Seiten derselben Länge 1789 ohne Beweis bekanntgemacht[2]) und den Beweis 1798 nachgeholt[3]).

---

1) Vgl. P. Stäckel, Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien, Leipziger Berichte, 1893, S. 444.

2) A. M. Legendre, Mémoire sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre, Histoire de l'Acad., année 1787, Paris 1789, Mémoires, S. 358.

3) A. M. Legendre, Résolution des triangles sphériques dont les cotés sont très-petits, pour la détermination d'un arc de méridien, Note III des Werkes von Delambre, Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc de méridien, Paris, an VIII; kurz darauf erschien im Journal de l'école polytechnique ein Beweis von Lagrange, Solutions de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques, t. II, cah. 6, Paris 1798, S. 270; Oeuvres t. 7, S. 329. Der Merkwürdigkeit wegen sei hier auf die überhebliche Kritik hingewiesen, die Kaestner in seinen Geometrischen Abhandlungen, 2. Sammlung, Göttingen 1791, S. 456—458 an dem Legendreschen Theorem geübt hat; vielleicht hat sie zu dem geringschätzigen Urteil beigetragen, das Gauß über Kaestner als Mathematiker gefällt hat.

Bei einer Verallgemeinerung auf geodätische Dreiecke beliebiger krummer Flächen mußte der erste Schritt sein, die Winkelsumme eines solchen Dreiecks zu ermitteln, und nun sehen wir, daß Gauß in den Neuen allgemeinen Untersuchungen, zu denen wir hiermit zurückkehren, nachdem er bewiesen hat, daß für jeden Punkt einer kürzesten Linie die Schmiegungsebene die betreffende Flächennormale in sich enthält (art. 12), sogleich zu dem Satze übergeht, daß die Summe der Winkel eines geodätischen Dreiecks von zwei Rechten um einen Betrag abweicht, der durch den Inhalt des entsprechenden Dreiecks auf der Einheitskugel gegeben wird, wenn man deren Oberfläche gleich acht Rechten setzt.

Gauß schreibt am 21. November 1825, er habe die Generalisierung des Legendreschen Theorems schon seit vielen Jahren besessen. Man wird daher annehmen dürfen, daß er die ersten Schritte dazu schon vor 1816 gemacht hatte, daß er also schon damals den Satz von der Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks besaß, zu dessen Herleitung die Kenntnis der einfachsten Eigenschaften der kürzesten Linien genügt, sobald man den genialen Gedanken der Abbildung mittels paralleler Normalen gefaßt hat; die Beziehung der Richtungen im Raume auf die Einheitskugel hat Gauß aber schon im Jahre 1799 besessen, das zeigt die bereits S. 107 erwähnte Aufzeichnung vom November 1799. Wir wissen ferner, daß er schon vor 1816 die Biegung krummer Flächen betrachtet und nach Kennzeichen dafür gefragt hatte, daß zwei gegebene Flächen durch Biegung aus einander hervorgehen (W. VIII, S. 372). Bei der Biegung entsteht aber aus einem geodätischen Dreieck wieder ein geodätisches Dreieck mit denselben Winkeln, es bleibt also die Winkelsumme erhalten und damit auch die Größe der Area, die dem geodätischen Dreieck auf der Einheitskugel bei der Abbildung mittels paralleler Normalen entspricht. Denkt man sich also ein beliebiges Flächenstück in geodätische Elementardreiecke (Triangulation) zerlegt, so folgt, daß bei der Biegung irgend welchen einander entsprechenden Flächenstücken gleich große Flächenstücke auf der Einheitskugel zugeordnet werden, und das ist genau das „schöne Theorem“. Wird schließlich, damit man zu einer Funktion des Ortes auf der Fläche gelangt, in naturgemäßer Verallgemeinerung des Begriffes der Krümmung bei Kurven das Krümmungsmaß bei Flächen als der Grenzwert erklärt, dem das Verhältnis der Area auf der Einheitskugel zu dem entsprechenden Flächenstück zustrebt, wenn dieses auf den betrachteten Punkt zusammenschrumpft, so ergibt sich „der wichtige Lehrsatz, daß bei der Übertragung der Flächen

durch Abwicklung das Krümmungsmaß an jeder Stelle unverändert bleibt", und das ist das Endergebnis der Entwicklungen in den artt. 13—16 der Neuen allgemeinen Untersuchungen. Die hier gegebene Herleitung wird man mithin als die ursprüngliche, vor 1816 gefundene, dagegen die Herleitung aus der Form (1) des Quadrates des Linienelements als die spätere, zwischen 1816 und 1825 entstandene anzusehen haben.

Es folgt der Beweis des Satzes, daß der Ort der Punkte gleicher geodätischer Entfernung von einem Punkte der Fläche eine Kurve ist, welche die von dem Punkte ausgehenden geodätischen Linien überall unter rechtem Winkel schneidet (art. 17), und den Schluß des Entwurfes bildet der Satz, daß bei Einführung geodätischer Polarkoordinaten, die dem Quadrate des Linienelements die Gestalt (3) verleihen, das Krümmungsmaß allein durch die Funktion $G(p, q)$ und deren erste und zweite partielle Ableitung nach p und q ausgedrückt werden kann (art. 18).

Damit war ein dritter Beweis für die Erhaltung des Krümmungsmaßes gegenüber Biegungen gefunden. Was aber bei den beiden besonderen Formen (1) und (3) des Linienelementes gelungen war, mußte auch für die allgemeine Form (2) gelten, das heißt, es mußte möglich sein, das Krümmungsmaß allein durch die Funktionen $E(p, q)$, $F(p, q)$, $G(p, q)$ und deren erste und zweite partielle Ableitungen auszudrücken. So lange das nicht geleistet war, hatte die Lehre vom Krümmungsmaß keine befriedigende Gestalt gewonnen, und daher hat Gauß Ende 1825 den Entwurf beiseite gelegt, „nil fecisse putans, si quid superesset agendum".

31.

Die Entstehung der Disquisitiones generales circa superficies curvas (1826—1827).

Nur nach langem, hartem Ringen hat Gauß das Ziel erreicht, das er sich Ende 1825 gestellt hatte, die Lehre von den krummen Flächen in voller Allgemeinheit zu begründen. Am 19. Februar 1826 schreibt er an Olbers: „Ich wüßte kaum eine Periode meines Lebens, wo ich bei so angestrengter Arbeit wie in diesem Winter doch verhältnismäßig so wenig reinen Gewinn geerntet hätte. Ich habe viel, viel Schönes herausgebracht, aber dagegen sind meine Bemühungen über anderes oft Monate lang fruchtlos gewesen (Br. G.-O. 2, S. 438). Und am 2. April 1826: „Meine theoretischen Arbeiten lassen bei ihrem so sehr großen Umfange leider noch viele Lücken; am leichtesten wäre mir geholfen, wenn ich mir er-

laubte, mit der Bekanntmachung meiner Messungen zwar alle meine Rechnungseinrichtungen zu verbinden, aber deren Ableitungen aus ihren höhern Gründen für ein ganz getrenntes Werk für glücklichere zukünftige Zeiten aufsparte. Dann wäre nirgends ein Anstoß. Vors erste werde ich die scharfe Ausgleichung meiner 32 Punkte, die 51 Dreiecke und 146 Richtungen liefern, vornehmen" (W. IX, S. 376). Es sei hierzu bemerkt, daß die Arbeiten im Felde im August 1825 beendet waren, und es sich lediglich um den Abschluß der Rechnungen handelte, sodaß Gauß für seine theoretischen Arbeiten Zeit gewann.

Im Herbst 1826 scheint Gauß durchgedrungen zu sein. Er berichtet am 20. November an Bessel: „Die Verarbeitung der Materialien zu dem beabsichtigten Werke über meine Messungen kostet mich viele Zeit. Meine Hauptdreiecke, 33 Punkte befassend, sind zwar längst fertig berechnet, aber die Berechnung der vielen geschnittenen Nebenpunkte . . . macht viel Arbeit . . . Noch viel mehr Verlegenheit macht mir der weit ausgedehntere theoretische Teil, der so vielfach in andere Teile der Mathematik eingreift. Ich sehe hier kein anderes Mittel, als mehrere große Hauptpartien von dem Werke abzutrennen, damit sie selbständig und in gehöriger Ausführlichkeit entwickelt werden können. Gewissermaßen habe ich damit schon in meiner Schrift über die Abbildung der Flächen unter Erhaltung der Ähnlichkeit der kleinsten Teile den Anfang gemacht; eine zweite Abhandlung, die ich vor ein paar Monaten der Königlichen Sozietät übergeben habe und die hoffentlich bald gedruckt werden wird, enthält die Grundsätze und Methoden zur Ausgleichung der Messungen[1]) . . . Vielleicht werde ich zunächst erst noch eine dritte Abhandlung ausarbeiten, die mancherlei neue Lehrsätze über krumme Flächen, kürzeste Linien, Darstellung krummer Flächen in der Ebene usw. entwickeln wird. Hätten alle diese Gegenstände in mein projektiertes Werk aufgenommen werden sollen, so hätte ich entweder manches ungründlich abfertigen oder dem Werk ein sehr buntscheckiges Ansehen geben müssen" (W. IX, S. 362).

Mit der Ausarbeitung der dritten Abhandlung hat Gauß bald darauf begonnen. Nach dem Briefe an Olbers vom 14. Januar 1827 (Br. G.-O. 2, S. 467) war er damals „schon ziemlich damit vorgerückt", und am 1. März 1827 schreibt er jenem, die Abhandlung sei vollendet, er werde sie jedoch der Sozietät noch nicht übergeben, da doch auf die Ostermesse kein Band der Denkschriften

1) C. F. Gauß, Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, vorgelegt den 16. September 1826, W. IV, S. 55.

herauskomme (W. IX, S. 377). In der Tat sind die Disquisitiones generales circa superficies curvas der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften erst am 8. Oktober 1827 vorgelegt und in den Band VI der Commentationes recentiores vom Jahre 1828 aufgenommen worden (W. IV, S. 217). Vorher war in den Göttinger Gelehrten Anzeigen vom 5. November 1827 eine ausführliche Selbstanzeige erschienen (W. IV, S. 341—347).

Von den Neuen allgemeinen Untersuchungen unterscheiden sich die Disquisitiones generales hauptsächlich in zwei Punkten: sie enthalten erstens den Ausdruck für das Krümmungsmaß bei beliebiger Wahl der bestimmenden Veränderlichen p, q und zweitens die Verallgemeinerung des Legendreschen Theorems von der Kugel auf beliebige Flächen.

Die allgemeine Formel für das Krümmungsmaß hat sich Gauß, wie schon angedeutet wurde, im Laufe des Jahres 1826 erarbeitet. Die im Nachlaß befindlichen Aufzeichnungen gestatten es hier, einmal einen vollständigen Einblick in die Entstehung seiner Gedanken zu gewinnen. Da Gauß dabei an schon vorliegende Untersuchungen über die Abwicklung krummer Flächen anknüpft, wird es angebracht sein, einen kurzen geschichtlichen Überblick vorauszuschicken[1]).

Die Abwicklung von Zylindern und Kegeln auf die Ebene war im 18. Jahrhundert wiederholt betrachtet und zur Lösung von Aufgaben benutzt worden. Euler hatte dann (1770) nach den krummen Flächen gefragt, die sich überhaupt auf eine Ebene abwickeln lassen, und war, indem er der Anschauung entnahm, daß die gesuchten Flächen gradlinig sein müssen, zu ihrer allgemeinen Darstellung gelangt[2]). Wie eine erst im Jahre 1862, also nach dem Tode von Gauß aus Eulers Nachlaß abgedruckte Notiz[3]) zeigt, ist dieser um dieselbe Zeit zu dem Problem gelangt, „invenire duas superficies, quarum alteram in alteram transformare licet, ita ut in utraque singula puncta homologa easdem inter se teneant distantias“, und hat er dafür genau die Gleichungen angesetzt, die man im art. 12 der Disq. gen. findet. Es ist ihm auch gelungen, ihre Integration für die Biegung von Kegeln in Kegel durchzuführen, und er hat zum Schluß die Frage nach den Biegungen von Stücken einer Kugelfläche aufgeworfen.

1) Ausführliche Angaben findet man bei P. Stäckel, Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien, Leipziger Berichte, 1893, S. 452—455.

2) L. Euler, De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet, Novi Comment. Petrop. 16 (1771), 1772, S. 3; vorgelegt am 5. März 1770.

3) L. Euler, Opera postuma, St. Petersburg 1862, t. I, S. 494—496.

Unabhängig von Euler hatte Monge Untersuchungen über die auf die Ebene abwickelbaren Flächen angestellt. Er hat sie, durch Eulers Abhandlung vom Jahre 1771 veranlaßt, in einer zweiten Arbeit weiter geführt; in dieser findet sich auch die bekannte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die auf die Ebene abwickelbaren Flächen[1]).

Wie Gauß zu dem allgemeinen Begriff der Biegung krummer Flächen gelangt ist, wissen wir nicht. Es ist nicht wahrscheinlich, daß die bereits erwähnten Arbeiten über die Gestalt elastischer Flächen, an denen sich außer Poisson (1814) auch Lagrange (1811) und Sophie Germain (1815) beteiligt hatten[2]), auf ihn Einfluß gehabt haben. Dagegen sind ihm die schon früher veröffentlichten Abhandlungen von Euler und Monge bekannt gewesen. Die auf die Ebene „abwicklungsfähigen Flächen" hat er bereits in der Aufzeichnung vom Dezember 1822 (W. VIII, S. 382—384) nach der Seite des Krümmungsmaßes betrachtet, und in den Neuen allgemeinen Untersuchungen (art. 16) bemerkt er, aus dem Satze von der Erhaltung des Krümmungsmaßes folge der wichtige, aber bis jetzt nicht mit der wünschenswerten Evidenz abgeleitete Lehrsatz, daß bei jenen Flächen das Krümmungsmaß verschwindet, und damit sei erst bewiesen, daß sie der bekannten Differentialgleichung genügen (vgl. auch W. VIII, S. 437 und 444).

Wie wir sahen, hatte Gauß bei zwei besonderen Formen des Linienelementes das Krümmungsmaß durch den darin auftretenden Koeffizienten und dessen erste und zweite partielle Ableitungen ausdrücken können. Er wußte, daß das Krümmungsmaß bei den Biegungen erhalten bleibt, folglich mußte bei der allgemeinen Form des Linienelementes das Krümmungsmaß ebenfalls durch die darin auftretenden Koeffizienten und deren partielle Ableitungen darstellbar sein. Allein die Rechnungen, die dort zum Ziel geführt

1) G. Monge, Sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure, Mém. sav. étr. t. 10, Paris 1785, S. 511 (eingereicht 1771); Sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et pénombres, Mém. sav. étr. t. 9, Paris 1780, S. 382 (eingereicht 1775); vgl. auch J. Meusnier, Sur la courbure des surfaces, Mém. sav. étr. t. 10, Paris 1785, S. 509 (vorgelegt 1776).

2) J. L. Lagrange, Mécanique analytique, 2. éd., t. I, Paris 1812, Statique, sect. V, Chap. 3, § II: De l'équilibre d'un fil ou d'une surface flexible et au même temps extensible et contractible, Oeuvres, t. 11, S. 156; S. Germain, Recherches sur la théorie des surfaces élastiques, Paris 1820 (verfaßt 1815). Diese Untersuchungen waren veranlaßt durch Chladnis Entdeckungen über die Klangfiguren (Akustik, Leipzig 1802).

hatten, ließen sich nicht ohne Weiteres auf den Fall beliebiger bestimmender Größen übertragen; hierauf beziehen sich wohl die Klagen über die Unfruchtbarkeit langer Bemühungen in dem schon angeführten Briefe an Olbers vom 19. Februar 1826.

Im Sommer oder Herbst des Jahres kam Gauß auf den Gedanken, die auf die Ebene abwickelbaren Flächen heranzuziehen. Diese sind einerseits dadurch gekennzeichnet, daß das Krümmungsmaß verschwindet, andererseits aber dadurch, daß für sie

$$E dp^2 + 2 F dp\, dq + G dq^2 = dt^2 + du^2,$$

das heißt gleich dem Produkt der beiden vollständigen Differentiale $d\lambda = dt + i du$ und $d\mu = dt - i du$ ist. Gauß verschaffte sich jetzt (W. VIII, S. 446, Handbuch 16 Bb, S. 114) die Bedingungsgleichung dafür, daß

$$E dp^2 + 2 F dp\, dq + G dq^2 = d\lambda\, d\mu$$

wird. Es ergab sich als linke Seite ein Ausdruck, der aus den Koeffizienten E, F, G und deren ersten und zweiten partiellen Ableitungen nach p und q zusammengesetzt ist, und man durfte vermuten, daß er sich vom Krümmungsmaß nur um einen unwesentlichen Faktor unterscheidet.

Damit war Gauß in den Besitz des Zählers gelangt, der bei dem allgemeinen Ausdruck für das Krümmungsmaß auftritt, und nachdem er so das Ergebnis kannte, glückte es ihm auch, die unmittelbare Ableitung der Formel zu finden, die im art. 11 der Disq. gen. angegeben wird. In der Tat stehen die Rechnungen über das „Krümmungsmaß der Flächen bei allgemeinem Ausdruck derselben" im Handbuch 16 Bb, S. 128—131, also einige Seiten hinter der vorher erwähnten Aufzeichnung über die auf die Ebene abwickelbaren Flächen.

Von dem höheren Standpunkte aus betrachtet, den Gauß jetzt gewonnen hatte, verlor der ursprüngliche Beweis für die Erhaltung des Krümmungsmaßes in seinen Augen an Wert, ja noch mehr, der Satz von der Winkelsumme des geodätischen Dreiecks, der dafür den Ausgangspunkt gebildet hatte, bekam jetzt seine Stelle als eine Folgerung aus dem Hauptsatze von dem Krümmungsmaß, wenn man ihn nämlich auf geodätische Polarkoordinaten anwendet (Disq. gen. art. 20).

Die Verallgemeinerung des Legendreschen Theorems, zu der wir uns nunmehr wenden, hätte Gauß schon in die Neuen allgemeinen Untersuchungen aufnehmen können, denn es war ihm im

November 1825 gelungen, sie auf die elegante Gestalt zu bringen, die er in den artt. 25 bis 28 der Disq. gen. mitteilt, und er würde es sicherlich getan haben, wenn er nicht Ende 1826 die Arbeit an dem Entwurf abgebrochen hätte. Bei jener Verallgemeinerung wird die Lehre von den kürzesten Linien mit der Lehre vom Krümmungsmaß verbunden, auf die sich die beiden Hauptabschnitte jener Abhandlung beziehen, und so erscheint der Satz von der Zurückführung kleiner geodätischer Dreiecke auf ebene Dreiecke als die Krönung des Gebäudes der allgemeinen Lehre von den krummen Flächen. Zugleich aber bildet er in echt Gaußscher Art den Übergang zu den Anwendungen. Gauß hat sich hierüber in dem Briefe an Olbers vom 1. März 1827 folgendermaßen ausgesprochen: „Jene Abhandlung enthält zur unmittelbaren Benutzung in meinem künftigen Werk über die Messung eigentlich nur ein paar Sätze, nämlich:

1) was zur Berechnung des Exzesses der Summe der 3 Winkel über 180° in einem Dreiecke auf einer nicht sphärischen Fläche, wo die Seiten kürzeste Linien sind, erforderlich ist,

2 wie in diesem Fall der Exzeß ungleich verteilt werden muß, damit die Sinus den Seiten gegenüber proportional werden.

In praktischer Rücksicht ist dies zwar ganz unwichtig, weil in der Tat bei den größten Dreiecken, die sich auf der Erde messen lassen, die Ungleichheit in der Verteilung unmerklich wird; aber die Würde der Wissenschaft erfordert doch, daß man die Natur dieser Ungleichheit klar begreife. Und so kann man allerdings hier, wie öfters, ausrufen: Tantae molis erat! um dahin zu gelangen. — Wichtiger aber als die Auflösung dieser 2 Aufgaben ist es, daß die Abhandlung mehrere allgemeine Prinzipien begründet, aus denen künftig, in einer speziellern Untersuchung, die Auflösung von einer Menge wichtiger Aufgaben hergeleitet werden kann" (W. IX, S. 378).

32.

Weitere Untersuchungen über krumme Flächen.

In der Selbstanzeige der Disq. gen. sagt Gauß, der Zweck der Abhandlung sei, neue Gesichtspunkte für die Lehre von den krummen Flächen zu eröffnen und einen Teil der neuen Wahrheiten, die dadurch zugänglich werden, zu entwickeln (W. IV, S. 341). Daß dort nur ein Teil der Ergebnisse, zu denen er gelangt war, dargestellt ist, wird auch in den Briefen an Bessel, Olbers und Schumacher ausgesprochen, die in der vorhergehenden Nummer an-

geführt sind, ja es wird einmal geradezu eine zweite Abhandlung über die krummen Flächen in Aussicht gestellt (Brief an Olbers vom 1. März 1827, W. IX, S. 377).

Auch in den Disq. gen. finden sich Andeutungen über weitergehende Untersuchungen. So werden im art. 6 Erörterungen über die allgemeinste Auffassung des Inhalts von Figuren auf eine andere Gelegenheit verschoben. Ferner unterscheidet Gauß im art. 13 zwischen den Eigenschaften einer krummen Fläche, die von ihrer gerade angenommenen Form abhängen, und jenen, die erhalten bleiben, in welche Form die Fläche auch gebogen wird. Hierfür nennt er das Krümmungsmaß, die Lehre von den kürzesten Linien und einiges andere, dessen Behandlung er sich vorbehalte.

Zu den Gegenständen, die im art. 13 gemeint sind, gehört vor allem die „Seitenkrümmung" von Kurven auf krummen Flächen, die Gauß schon in der Zeit zwischen 1822 und 1825 eingehend untersucht hatte (W. VIII, S. 386—395). Eine solche Kurve besitzt zunächst eine absolute Krümmung, die durch den reziproken Wert des auf die übliche Art erklärten Krümmungshalbmessers gegeben wird. Wenn man aber den Krümmungshalbmesser in zwei Komponenten, nach der Flächennormale und senkrecht dazu, zerlegt, so werden in deren reziproken Werten die Maße der Normalkrümmung und der Seitenkrümmung gewonnen. Die kürzesten Linien auf der Fläche haben die Eigenschaft, daß ihr Krümmungshalbmesser in die zugehörige Flächennormale fällt, und ihnen kommt daher die Seitenkrümmung Null zu. Sie entsprechen auch in dieser Hinsicht den geraden Linien der Ebene, und in einer Geometrie der auf einer krummen Fläche liegenden Figuren, bei der an die Stelle der Geraden die Kürzesten treten, ist bei einer Kurve die relative Krümmung, das heißt das Verhältnis des geodätischen Kontingenzwinkels zum Linienelement der Kurve, gleich der Seitenkrümmung zu setzen. Bald nach dem Erscheinen der Disq. gen. hat übrigens Minding ähnliche Auffassungen veröffentlicht[1]).

Im Laufe der Untersuchung überträgt Gauß den Namen der Seitenkrümmung auf das über die Kurve erstreckte Integral der ursprünglichen Seitenkrümmung. Er hatte dabei wohl die Verallgemeinerung des Satzes von der Winkelsumme des geodätischen Dreiecks im Auge, die später von Bonnet angegeben worden ist[2]).

1) F. Minding, Ueber die Kurven kürzesten Perimeters auf krummen Flächen, Crelles Journal, Bd. 5, 1830, S. 297.

2) O. Bonnet, Mémoire sur la théorie générale des surfaces, Journal de l'école polytechnique, t. 19, cah. 32, 1848, S. 131.

Hiernach ist die Gesamtkrümmung eines beliebigen auf einer krummen Fläche liegenden Dreiecks gleich dem Unterschiede der Winkelsumme gegen zwei Rechte, vermindert um das über die Begrenzung erstreckte Integral der Seitenkrümmung (im ursprünglichen Sinne des Wortes).

Die Erklärung der kürzesten Linien als der Kurven von der Seitenkrümmung Null ist auch insofern wichtig, als die Rechnungen, die Gauß daran anschließt, einen Einblick in die Kunstgriffe gewähren, die ihn zu den eleganten Formeln im art. 22 der Disq. gen. geführt haben.

Ob Gauß die Geometrie der Figuren auf einer krummen Fläche noch weiter ausgebaut, ob er im besonderen den Zusammenhang zwischen der Geometrie auf den Flächen konstanten Krümmungsmaßes und der nichteuklidischen Geometrie der Ebene erkannt hat, ist nicht mit Sicherheit zu entscheiden. Nahe genug mußte er für jemand liegen, der schon 1794 wußte, daß dort das Verhältnis des Dreiecksinhaltes zu der Abweichung der Winkelsumme von zwei Rechten eine Konstante ist (W. VIII, S. 266). Auch die Bemerkungen, daß die Untersuchungen über die krummen Flächen so vielfach in andere Teile der Mathematik eingriffen (Brief an Bessel vom 20. November 1826, W. IX, S. 362), daß sie tief in die Metaphysik der Raumlehre eingriffen (Brief an Hansen vom 11. Dezember 1825, Gauß-Archiv) in Verbindung mit der Tatsache, daß Gauß bald nach Vollendung der Disq. gen. die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wieder aufgenommen hat (Brief an Bessel vom 27. Januar 1829, W. VIII, S. 200), lassen sich zu Gunsten einer solchen Annahme geltend machen. Ferner wird in einer Aufzeichnung aus dem Jahre 1846 (W. VIII, S. 257) die einer nichteuklidischen Geometrie eigentümliche absolute Konstante mit k bezeichnet, wo k die Quadratwurzel aus dem Krümmungsmaß bedeuten würde. Bemerkenswert ist auch eine Wendung in einem aus demselben Jahre 1846 stammenden Briefe an Gerling: „Der Satz, den Ihnen Hr. Schweikart erwähnt hat, daß in j e d e r Geometrie die Summe aller äußern Polygonwinkel von 360^0 um eine Größe verschieden ist (nämlich größer als 360^0 in der Astralgeometrie, wie Schw. sie aufgefaßt hat), welche dem Flächeninhalt proportional ist, ist der erste, gleichsam an der Schwelle liegende Satz der Theorie, den ich schon im Jahr 1794 als notwendig erkannte" (Brief vom 2. Oktober 1846, W. VIII, S. 266); Gauß unterscheidet also die Auffassung Schweikarts von der seinigen, bei der in j e d e m Falle die Winkelsumme des Dreiecks von 180^0 verschieden ist, sodaß bei ihm neben die

Geometrie, bei der die Winkelsumme kleiner als 180° ist, noch eine zweite tritt, bei der die Winkelsumme größer als 180° wird. Wenn man beachtet, wie vorsichtig Gauß bei solchen Andeutungen zu Werk ging (vgl. S. 31), so wird man auch auf diese Stelle Gewicht zu legen haben.

Schließlich verdient erwähnt zu werden, daß in einer spätestens 1827 niedergeschriebenen Aufzeichnung die durch Drehung der Traktrix entstehende krumme Fläche negativen konstanten Krümmungsmaßes (Pseudosphäre) als das „Gegenstück der Kugel" bezeichnet wird (W. VIII, S. 265). Gauß erwähnt die Pseudosphäre im Zusammenhang mit der Verbiegung von Drehflächen in Drehflächen. Aber noch mehr, die von ihm aufgestellten Formeln führen zu dem Satz, daß bei der Pseudosphäre (und nur bei ihr) alle diese Drehflächen einander kongruent sind, und hierin liegt, daß man ein geodätisches Dreieck, unter Bewahrung dieser Eigenschaft, auf der Pseudosphäre ebenso verschieben kann wie ein sphärisches Dreieck auf der Kugel. Hat Gauß deshalb den Namen „Gegenstück der Kugel" gewählt? Jedenfalls hat er den krummen Flächen von negativem konstanten Krümmungsmaß seine Aufmerksamkeit zugewendet. In den schönen Untersuchungen, die Minding, angeregt durch die Disq. gen., angestellt hat, sind auch diese Ergebnisse über die Biegung der Drehflächen und über die Pseudosphäre enthalten[1]).

Auf die Biegung krummer Flächen bezieht sich auch eine wahrscheinlich Ende 1826 niedergeschriebene kurze Bemerkung, in der Gauß die Beziehung, die bei zwei Biegungsflächen zwischen den sphärischen Abbildungen mittels paralleler Normalen besteht, zu einem Ansatz für die Lösung des allgemeinen Problems der Abwicklung krummer Flächen auf einander benutzt, der erst im Jahre 1900 aus dem Nachlaß im achten Bande der Werke (S. 447—448) veröffentlicht worden ist. Es wäre zu wünschen, daß dieser Gedanke von Gauß, der ihm eigentümlich ist, vollständig durchgeführt würde.

Zum Schluß sei noch berichtet, daß die philosophische Fakultät der Universität Göttingen im Jahre 1830 auf Veranlassung von Gauß die Preisfrage stellte: Determinetur inter lineas duo puncta jungentes ea, quae circa datum axem revoluta gignat superficiem minimam. Sie wurde von seinem Landsmann, Schüler und späteren

---

1) F. Minding, Ueber die Biegung gewisser Flächen, Crelles Journal, Bd. 18, 1838, S. 367; Wie sich entscheiden läßt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar seien oder nicht, ebenda, Bd. 19, 1839, S. 378; Über die kürzesten Linien krummer Flächen, ebenda, Bd. 20, 1840, S. 324.

Mitarbeiter auf der Sternwarte, Goldschmidt, beantwortet, dem auch der Preis zugefallen ist[1]).

33.

Bedeutung und Wirkung der Disquisitiones generales.

In den Disquisitiones generales wird nur ein Geometer mit Namen erwähnt: Euler. Fast alles, was dieser über die Krümmung der Oberfläche gelehrt habe, sagt Gauß im art. 8 der Disq., sei in den von ihm gegebenen Sätzen I bis IV enthalten; augenscheinlich sind Eulers 1763 verfaßte Recherches sur la courbure des surfaces[2]) gemeint. Die Untersuchungen von Gauß berühren sich aber noch in einer Reihe anderer Punkte mit denen Eulers, und wenn es auch unentschieden bleiben muß, ob Gauß die betreffenden Abhandlungen gekannt hat oder nicht, so scheint es doch um so mehr angebracht, die Berührungspunkte festzustellen, als dadurch die Fortschritte, die wir Gauß verdanken, in ein helleres Licht treten.

Es möge zunächst an die in den vorgehenden Nummern erwähnten Arbeiten Eulers zur konformen Abbildung, über die kürzesten Linien und über die Abwicklung krummer Flächen auf die Ebene erinnert werden. Für die kürzesten Linien kommen außer der grundlegenden Abhandlung vom Jahre 1729 noch zwei Veröffentlichungen in Betracht. In der einen vom Jahre 1755 hatte Euler die Anfänge einer sphäroidischen Trigonometrie entwickelt, einer Lehre von den Dreiecken, deren Seiten kürzeste Linien eines Drehellipsoides sind; auch hatte er vorgeschlagen, daß man solche Dreiecke in der Geodäsie benutzen solle[3]). In der zweiten, erst 1806 gedruckten Abhandlung, die am 25. Januar 1779 der Petersburger Akademie vorgelegt worden war, kommt er auf die allgemeine Lehre von den kürzesten Linien zurück und stellt deren Differentialgleichungen für den Fall auf, daß die krumme Fläche durch irgend eine Gleichung zwischen den kartesischen Koordinaten gegeben wird, während man früher immer vorausgesetzt hatte, daß die Gleichung nach einer Koordinate aufgelöst sei.

1) B. Goldschmidt, Determinatio superficiei minimae rotatione curvae data duo puncta jungentis circa datum axem ortae, Göttingen 1831.

2) Histoire de l'Acad., année 1760, Berlin 1767, Mémoires S. 119.

3) L. Euler, Éléments de la trigonométrie sphéroidique tirés de la méthode des plus grands et plus petits, Histoire de l'Acad., année 1753, Berlin 1755, Mémoires S. 258.

Die Einsicht, daß die drei kartesischen Koordinaten gleichberechtigt sind, kommt bei Euler aber auch dadurch zum Ausdruck, daß er bei den Untersuchungen über die Abwicklung krummer Flächen die drei Koordinaten sogleich als Funktionen zweier Hilfsgrößen ansetzt. Wie Kommerell mit Recht bemerkt[1]), liegt hierin der erste Schritt zu der Auffassung der krummen Flächen als selbständiger Gebilde, die erst Gauß mit vollem Bewußtsein ihrer Bedeutung durchgeführt hat. Ebenso hat er, geleitet von dem allgemeinen Begriff der Abbildung, jene Parameterdarstellung zur Grundlage seiner allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen gemacht.

Endlich ist eine 1775 verfaßte, 1786 gedruckte Arbeit über Raumkurven[2]) zu erwähnen, in der Euler die Eigenschaften solcher Kurven in der Umgebung eines Punktes untersucht, indem er durch den Mittelpunkt der Einheitskugel Parallelen zu den Tangenten zieht, ganz ähnlich wie Gauß im art. 2 der Neuen allgemeinen Untersuchungen bei ebenen Kurven den Einheitskreis verwendet. Bei Gauß findet sich, wie schon erwähnt wurde, die Beziehung der Richtungen im Raume auf die Punkte der Einheitskugel schon in einer auf das Ende des Jahres 1799 zu setzenden Notiz (Scheda Ac, Varia, begonnen Nov. 1799, S. 3). In der Selbstanzeige der Disq. gen. sagt Gauß: „Dies Verfahren kommt im Grunde mit demjenigen überein, welches in der Astronomie in stetem Gebrauch ist, wo man alle Richtungen auf eine fingierte Himmelskugel von unendlich großem Halbmesser bezieht“ (W. IV, S. 342); man darf daher annehmen, daß der Gedanke der Abbildung auf die Einheitskugel (Himmelskugel) der Astronomie seinen Ursprung verdankt.

Die Abbildung einer krummen Fläche auf die Einheitskugel mittels paralleler Normalen ist schon vor Gauß betrachtet und mit der Lehre von den Doppelintegralen in Zusammenhang gebracht worden, ganz ähnlich wie es dieser selbst in einer Notiz über die Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoides tut, die wohl bald nach 1813 verfaßt ist (W. VIII, S. 367), und zwar von O. Rodrigues in einer 1815 veröffentlichten Abhandlung[3]). Dieser hat auch schon

1) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. IV, Leipzig 1908, Abschnitt XXIV: Kommerell, Analytische Geometrie des Raumes und der Ebene, S. 529.

2) L. Euler, Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi, Acta Petrop., t. 6 pro anno 1782: I, 1786, S. 19, 37.

3) O. Rodrigues, Sur quelques propriétés des intégrales doubles et des rayons de courbure des surfaces, Correspondance sur l'école polytechnique, t. 2, 1815

erkannt und genau auf dieselbe Weise wie Gauß im art. 7 der Disq. gen. bewiesen, daß das Verhältnis der Abbildung eines Flächenelementes auf die Einheitskugel zu dem Flächenelement gleich dem Produkte der zugehörigen Hauptkrümmungen ist. Er folgert daraus, daß das Doppelintegral, das Gauß als Gesamtkrümmung eines Flächenstückes bezeichnet hat, den Inhalt der Area auf der Kugelfläche angibt, die durch jene Abbildung erhalten wird, und da einer geschlossenen Fläche die ganze, einfach oder mehrfach bedeckte Oberfläche der Kugel entspricht, so ergibt sich der Wert des zugehörigen Doppelintegrales gleich einem positiven oder negativen Vielfachen von 2π.

Auf einen zweiten Geometer wird in den Neuen allgemeinen Untersuchungen und in den Disq. gen. hingedeutet. Auf Monge bezieht sich nämlich die Bemerkung, daß die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die auf die Ebene abwickelbaren Flächen „bisher nicht mit der erforderlichen Strenge bewiesen war“ (W. IV, S. 344; vgl. W. IV, S. 237 und VIII, S. 437). Daß es sich um Monge handelt, ergibt sich aus dem Briefe an Olbers vom Juli 1828 (W. VIII, S. 444)[1]; Gauß sagt hier mit Recht, daß bei Monge das Vorhandensein gerader Linien, nach denen die Fläche gebrochen wird, erschlichen sei. Im übrigen haben die Untersuchungen des französischen Geometers, die mehr die Untersuchung besonderer Flächenklassen betreffen, auf Gauß keinen Einfluß gehabt, und dasselbe gilt auch für dessen darstellende Geometrie, die Gauß 1813 mit anerkennenden Worten besprochen hat (W. IV, S. 359).

Wenn man noch die Anregung hinzunimmt, die Gauß durch das Legendresche Theorem über die Zurückführung der kleinen sphärischen Dreiecke auf ebene Dreiecke erfahren hat, so ist alles erschöpft, was sich aus der Zeit vor 1827 mit seinen Forschungen über die allgemeine Lehre von den krummen Flächen in Zusammenhang bringen läßt, teils auf deren Gang einwirkend, teils nur im Strom der Entwicklung auftauchend und wieder untergehend.

Wie groß der Eindruck war, den die Disq. gen. sogleich bei ihrem Erscheinen machten, geht aus den Briefen von Bessel und Schumacher hervor. Mit den daran anknüpfenden, bedeutenden

S. 162; abgedruckt im Bulletin de la société philomatique, année 1815, S. 34; vgl. P. Stäckel, Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien, Leipziger Berichte 1893, S. 456.

1) Der darin erwähnte, „ungezogene Ausfall“ von Fayolle steht im Philosophical Magazine, new series, vol. 4, London 1828, S. 436; er ist abgedruckt im Briefwechsel G.-O., 2, S. 508.

Arbeiten Mindings beginnt eine lange Reihe von Arbeiten, deren Ausgangspunkt die Untersuchungen von Gauß bilden. Es muß jedoch hier genügen, einige noch nicht erwähnte Abhandlungen herauszugreifen, die in besonders engen Beziehungen zu den Disq. gen. stehen, und die Wirkung der Grundgedanken auf die weitere Entwicklung in aller Kürze zu schildern; dabei soll die Geodäsie ganz aus dem Spiele bleiben und für sie auf den schon erwähnten Aufsatz von Galle verwiesen werden.

Schon Euler hatte in seiner Abhandlung über die Krümmung der Flächen nach einem passenden Maße (juste mesure) für die Krümmung solcher Gebilde gefragt, einem Maße, das sich der Krümmung der Kurven an die Seite stellen lasse, und unter Hinweis auf die Sattelflächen erklärt, daß es auf diese Frage keine einfache Antwort gebe; man müsse vielmehr die Gesamtheit der Krümmungen in Betracht ziehen, die den zu einem Punkte gehörigen Normalschnitten zukommen[1]). Später war bei Untersuchungen über biegsame Flächen, besonders über die Gestalt von Flüssigkeitshäutchen, das arithmetische Mittel der beiden Hauptkrümmungen aufgetreten, das schon in der von Lagrange (1765) begründeten Lehre von den Minimalflächen eine Rolle spielte. Sophie Germain hat dafür 1831 den Ausdruck mittlere Krümmung vorgeschlagen[2]); in einem Briefe an Gauß vom 28. März 1829 bemerkt sie, dieser verfahre geometrisch, sie selbst mechanisch, denn die elastische Kraft, welche die Fläche in ihre ursprüngliche Gestalt zurücktreibt, sei der mittleren Krümmung proportional (Brief im Gauß-Archiv). Nach Sturm[3]) läßt sich die mittlere Krümmung auf eine ähnliche Art wie das Gaußsche Krümmungsmaß erklären; beschreibt man nämlich um einen Flächenpunkt eine Kugel und bildet die in die Fläche eingeschnittene Kurve mittels

---

1) Diese richtige Einsicht hat Euler nicht davor bewahrt, bald darauf, 1769, in der Dioptrik (Lib. I, § 4, Opera omnia, ser. 3, vol. 3, S. 8) zu behaupten, ein Flächenelement lasse sich stets als sphärisch ansehen, und damit in einen Fehler zurückzufallen, den schon Leibniz begangen hatte (Brief an Joh. Bernoulli vom 29. Juli 1698, Commercium epistolicum, Lausanne und Genf 1745, t. 1, S. 387, Leibnizens Mathematische Schriften, herausgegeben von C. J. Gerhardt, 1. Abt., Bd. 3, Halle 1855, S. 526). Auch d'Alembert hat sich dieses Fehlers schuldig gemacht (Artikel Surfaces courbes in der Encyclopédie méthodique, Abteilung Mathematik, Bd. II, Paris 1784, S. 464).

2) S. Germain, Mémoire sur la courbure des surfaces, Crelles Journal. Bd. 7, 1831, S. 1.

3) R. Sturm, Ein Analogon zu Gauß' Satz von der Krümmung der Flächen, Math. Annalen, Bd. 21, 1883, S. 379.

paralleler Normalen auf die Einheitskugel ab, so ist der Grenzwert des Verhältnisses der Umfänge beider Kurven gleich der mittleren Krümmung. Später hat Casorati[1]) das Wort „Krümmung“ beanstandet, weil man auch den Flächen vom Gaußschen Krümmungsmaße Null eine gewisse Krummheit zuschreiben müsse, und als ein der Anschauung besser entsprechendes Maß das arithmetische Mittel der Quadrate der Hauptkrümmungen vorgeschlagen. „Demgegenüber ist zu bemerken, daß es für eine Fläche überhaupt keinen Ausdruck geben kann, der dem für die Krümmung einer Kurve völlig entsprechend und zugleich erschöpfend wäre. Es lassen sich vielmehr von verschiedenen Gesichtspunkten aus für die Flächenkrümmung mehr oder minder kennzeichnende Ausdrücke aufstellen, die ebenfalls als Grenzwerte anzusehen sind“[2]). Jedenfalls hat sich unter ihnen der Gaußsche Ausdruck durch die Fruchtbarkeit seiner Anwendungen ausgezeichnet.

Im Laufe der Zeit hat sich immer klarer die Wichtigkeit der Formeln im art. 11 der Disq. gen. herausgestellt, vermöge deren die zweiten Ableitungen der kartesischen Koordinaten eines Punktes der Fläche als lineare homogene Funktionen der ersten Ableitungen und der Richtungscosinus der Normalen dargestellt werden. Weingarten hat gezeigt, wie man aus ihnen fast unmittelbar die bei dem Biegungsproblem auftretende partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine der kartesischen Koordinaten ableiten kann[3]). Auf dem von Gauß gebahnten Wege weitergehend, haben Mainardi[4]) und Codazzi[5]) der Gaußschen Gleichung zwischen den Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung zwei Gleichungen hinzugefügt, in denen auch noch die ersten partiellen Ableitungen der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung auftreten, und Bonnet[3])

1) F. Casorati, Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune, Acta math. 14, 1890, S. 95; vgl. auch R. v. Lilienthal, Zur Theorie des Krümmungsmaßes der Flächen, ebenda, 16, 1892, S. 143.

2) R. v. Lilienthal, Die auf einer Fläche gezogenen Kurven, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. III, Teil 3, S. 172 (1902).

3) J. Weingarten, Ueber die Theorie der auf einander abwickelbaren Oberflächen, Festschrift der Technischen Hochschule zu Berlin, 1884.

4) Mainardi, Su la teoria generale delle superficie, Giornale dell' Istituto lombardo, t. 9, 1857, S. 394.

5) D. Codazzi, Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio, Ann. di mat. (2), 1, 1867, S. 293; 2, 1868, S. 101, 269; Mémoire relatif à l'application des surfaces les unes sur les autres, Mém. prés. par divers sav. 2. série, t. 27, Paris 1883 (vorgelegt 1859).

6) O. Bonnet, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée, Journal de l'école polytechnique, t. 25, cah. 42, 1867, S. 31.

hat bewiesen, daß umgekehrt durch die Angabe von Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung, die den drei Fundamentalgleichungen genügen, die Fläche, abgesehen von ihrer Lage im Raume und einer Spiegelung, vollständig bestimmt wird.

Schließlich mögen noch Untersuchungen erwähnt werden, die bei Lebzeiten von Gauß angestellt worden sind und eine Verallgemeinerung seines Lehrsatzes über die Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks bezweckten. Jacobi[1]) hat im Jahre 1836 den Satz auf Dreiecke ausgedehnt, die von beliebigen Raumkurven gebildet werden, wobei nur vorausgesetzt werden muß, daß in den Ecken die beiden sich schneidenden Kurven dieselbe Hauptnormale haben; die Abbildung auf die Einheitskugel erfolgt mittels der Hauptnormalen der Kurven, die ja bei den geodätischen Linien mit den Normalen der Fläche zusammenfallen. Er hat dafür einen von dem Gaußschen Lehrsatze unabhängigen, einwandfreien Beweis gegeben. Bedenklich war jedoch eine Bemerkung, die er dem Beweis vorausschickte, daß nämlich die Verallgemeinerung des Gaußschen Lehrsatzes sich ohne Mühe (sine negotio) ergebe, wenn man beachte, daß jede Raumkurve als geodätische Linie einer gewissen Fläche angesehen werden dürfe. Dies stimmt zwar für eine einzelne Raumkurve, allein es ist, wie Clausen[2]) zeigte, im Allgemeinen bereits unmöglich, eine krumme Fläche zu bestimmen, die zwei sich in einem Punkte schneidende und dort dieselbe Hauptnormale besitzende Raumkurven als geodätische Linien in sich faßt[3]). In seiner Erwiderung[4]) gibt Jacobi, „um einige unbegründeten Zweifel über die Richtigkeit des Theorems zu beseitigen", einen vereinfachten Beweis und bemerkt nebenbei, aus den Darlegungen von Clausen folge, daß sein Theorem allgemeiner als das Gaußsche sei, womit er stillschweigend jene Bemerkung sine negotio) preisgibt.

Wir wenden uns nunmehr zu den Wirkungen, welche die Disquisitiones generales circa superficies curvas vom Jahre 1828

1) C. G. J. Jacobi, Demonstratio et amplificatio nova theorematis Gaussiani de curvatura integra trianguli in data superficie e lineis brevissimis formati, Crelles Journal, Bd. 16, 1837, S. 344; Werke, Bd. 7, S. 26.

2) Th. Clausen, Berichtigung eines von Jacobi aufgestellten Theorems, Astron. Nachrichten, Bd. 20, Nr. 457 vom 29. Sept. 1842.

3) Vgl. auch die Briefe von Schumacher an Gauß vom 1. Sept., 9. Nov. und 4. Dez. 1842 und dessen Antwort vom 3. Sept. 1842, Br. G.-Sch. IV, S. 82, 92, 101, 83.

4) C. G. J. Jacobi, Ueber einige merkwürdige Curventheoreme, Astronom. Nachrichten, Bd. 20, Nr. 463 vom 15. Dez. 1842; Werke Bd. 7, S. 34.

im Lauf des neunzehnten Jahrhunderts ausgelöst haben. Wenn man die gesamte Entwicklung der mathematischen Wissenschaften während dieses Zeitraums ins Auge faßt, so sind es zwei Punkte, in denen die Untersuchungen von Gauß zur Flächentheorie entscheidend eingegriffen haben. Erstens ist Gauß, während man bis dahin in der Geometrie nur endliche Gruppen von Transformationen betrachtet hatte, dazu übergegangen, eine unendliche Gruppe (im Sinne von S. Lie) zu Grunde zu legen, zweitens hat er die Lehre von den krummen Flächen als die Geometrie einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in einer Weise behandelt, die der allgemeinen Lehre von den mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten den Weg bahnte.

F. Klein[1]) hat das allgemeine Problem der geometrischen Forschung mit den Worten formuliert: „Es ist eine Mannigfaltigkeit und in ihr eine Transformationsgruppe gegeben. Man entwickle die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie." Nachdem die Gruppe der Bewegungen und Spiegelungen den Ausgangspunkt der geometrischen Forschung gebildet hatte, war man zu den Gruppen linearer Transformationen übergegangen, die der projektiven Geometrie eigentümlich sind, und hatte auch andere endliche Gruppen, wie die der Transformationen durch reziproke Radien, herangezogen. Ein Ansatz zur Betrachtung unendlicher Gruppen war allerdings schon in der Geometria Situs gemacht worden, aber die Fragestellung war hier zu allgemein, als daß man Anhaltspunkte für weitere Untersuchnngen gewinnen konnte; ergeben sich doch als Invarianten lediglich ganze Zahlen. Dagegen haben die Transformationen der binären quadratischen Differentialformen zu einer reichgegliederten Invariantentheorie geführt. Das Gaußsche Krümmungsmaß ist das erste Glied in der Kette solcher Invarianten. Ihm gesellt sich sogleich, als Beispiel kovarianter Bildungen, die Seitenkrümmung hinzu. Auch findet sich im art. 21 der Disq. gen. bei der Lehre von den geodätischen Linien schon der Differentialparameter erster Ordnung. Für die Weiterführung nach der Seite der Flächentheorie ist besonders Minding zu nennen[2]). Untersuchungen aus der theoretischen Physik veranlaßten Lamé[3]), bei krummlinigen Koordinaten

1) F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Programm, Erlangen 1872, Math. Annalen, Bd. 43, 1893, S. 67.

2) F. Minding, Wie sich entscheiden läßt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar seien oder nicht, Crelles Journal, Bd. 19, 1839, S. 370.

3) G. Lamé, Leçons sur les fonctions transcendantes et sur les surface isothermes, Paris 1857.

für Punkte des Euklidischen Raumes die Differentialparameter erster und zweiter Ordnung aufzustellen, und nachdem im Jahre 1867 Riemanns Habilitationsvortrag vom 10. Juni 1854: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, veröffentlicht worden war, hat Beltrami[1]) die allgemeine Lehre von den Differentialparametern quadratischer Differentialformen mit beliebig vielen Veränderlichen entwickelt. Gleichzeitig damit sind die Untersuchungen von Christoffel[2]) und Lipschitz[3]) über die Transformation solcher Differentialformen. Damit wurde der Forschung ein Feld erschlossen, das noch heute nicht abgeerntet ist.

Mit der Verallgemeinerung auf beliebig viele Veränderliche kommen wir zu dem Gesichtspunkt der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten.

Für Gauß hatten die mehrdimensionalen Räume eine metaphysische Bedeutung. Es handelt sich hier um Spekulationen, die im 18. Jahrhundert weit verbreitet waren und die auch ins 19. hinüberreichen[4]). „Gauß, nach seiner öfters ausgesprochenen innersten Ansicht, betrachtete die drei Dimensionen des Raumes als eine spezifische Eigentümlichkeit der menschlichen Seele; Leute, welche dieses nicht einsehen könnten, bezeichnete er einmal in seiner humoristischen Laune mit dem Namen Böoter. Wir können uns, sagte er, etwa in Wesen hineindenken, die sich nur zweier Dimensionen bewußt sind; höher über uns stehende würden vielleicht in ähnlicher Weise auf uns herabblicken, und er habe, fuhr er scherzend fort, gewisse Probleme hier bei Seite gelegt, die er in einem höhern Zustande später geometrisch zu behandeln gedächte“ (Sartorius, S. 81). Solche Gedanken reichen wohl bis in die Jugend zurück, denn in dem Briefe an Graßmann vom 14. Dezember 1844 (W. X 1, S. 436) sagt Gauß, dessen Tendenzen in der Ausdehnungslehre begegneten teilweise den Wegen, auf denen er selbst nun seit

1) E. Beltrami, Sulla teorica generale dei parametri differenziali, Memorie dell'Acc. di Bologna, zweite Reihe, Bd. 8, 1869, S. 551, Opere matematiche II, S. 74.

2) E. B. Christoffel, Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, Journal f. r. u. a. Math. Bd. 70, 1869, S. 46; Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. I, S. 352.

3) R. Lipschitz, Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Differentialen, Journal f. r. u. a. Mathematik, Bd. 70, 1869, S. 71, Bd. 71, 1870, S. 274, 288, Bd. 72, 1870, S. 1; Bemerkungen zu dem Prinzip des kleinsten Zwanges, ebenda, Bd. 82, 1877, S. 316 (im Anschluß an Riemanns 1876 veröffentlichte Pariser Preisarbeit vom Jahre 1861).

4) Man vgl. etwa F. Zöllner, Naturwissenschaft und christliche Offenbarung, Leipzig 1881, sowie die zahlreichen Veröffentlichungen von H. Scheffler in Braunschweig.

fast einem halben Jahrhundert gewandelt sei; dabei beruft er sich auf die Selbstanzeige vom Jahre 1831, an deren Schluß von „Mannigfaltigkeiten von mehr als zwei Dimensionen“ gesprochen wird (W. II, S. 178). Auch zeigt der Brief Wachters an Gauß vom 12. Dezember 1816 (W. X 1, S. 481), daß bei dessen Besuch im April 1816 von Räumen mit beliebig vielen Abmessungen die Rede gewesen war.

Die Äußerung von Gauß, über die Sartorius berichtet hat, fällt in die Zeit zwischen 1847 und 1855. Daß Gauß sich gerade in den letzten Jahren seines Lebens eingehend mit mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten beschäftigt hat, läßt auch eine Stelle in den Beiträgen zur Theorie der algebraischen Gleichungen vom Jahre 1849 erkennen: „Im Grunde gehört der eigentliche Inhalt der ganzen Argumentation [beim Beweise der Wurzelexistenz] einem höhern, von Räumlichem unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstrakten Größenlehre an, dessen Gegentand die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Größenkombinationen sind, einem Gebiet, welches zur Zeit noch wenig angebauet ist und in welchem man sich auch nicht bewegen kann ohne eine von räumlichen Bildern entlehnte Sprache“ (W. III, S. 79). In einer bald darauf, im Wintersemester 1850/51, gehaltenen Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate hat Gauß Gelegenheit genommen, seinen Zuhörern einige Gedanken über solche „Mannigfaltigkeiten von mehreren Dimensionen“, allerdings unter Beschränkung auf die verallgemeinerte Maßbestimmung des Euklidischen Raumes, mitzuteilen (W. X1, S. 473—481)[1]).

Die von Gauß begehrte Lehre von den nach der Stetigkeit zusammenhängenden Größenkombinationen hat bekanntlich Riemann in seinem Habilitationsvortrage vom 10. Juni 1854 begründet; er hat sich dabei für die Konstruktion des Begriffes einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ausdrücklich auf die vorher genannten Veröffentlichungen von Gauß (Selbstanzeige vom Jahre 1831, Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen vom Jahre 1849) berufen und bei der weiteren Untersuchung über die in den Mannigfaltigkeiten waltenden Maßverhältnisse als Grundlage die Disquisitiones generales circa superficies curvas bezeichnet. Durch Riemann haben also die Gedanken, deren Keime sich in der Gaußschen Abhandlung finden, ihre volle Entfaltung erfahren. In den folgenden Jahrzehnten hat sich deren Bedeutung in immer höherem Maße herausgestellt, nicht allein für die Mathematik,

1) Vgl. P. Stäckel, Eine von Gauß gestellte Aufgabe des Minimums, Heidelberger Berichte, Jahrgang 1917, 11. Abhandlung.

sondern auch für die analytische Mechanik und schließlich für die Grundlagen der theoretischen Physik.

34.
Bibliographischer Anhang.

Die von Gauß Ende 1822 an die Kopenhagener Societät der Wissenschaften eingesandte Abhandlung über die Abbildung krummer Flächen hatte zwar den Preis erhalten, allein die Gesellschaft überließ es den Preisträgern, für die Veröffentlichung zu sorgen, und so ist die Preisschrift erst 1825 im dritten und letzten Heft der von Schumacher als Ergänzung der Astronomischen Nachrichten herausgegebenen Astronomischen Abhandlungen erschienen. Sie ist abgedruckt in den Werken, Bd. IV, 1873, 2. Abdruck 1880, S. 189—216. Eine Übersetzung ins Englische, wahrscheinlich von Francis Baily (1764—1844), ist 1828 erschienen:

General solution of the problem: to represent the parts of a given surface on another given surface, so that the smallest parts of the representation shall be similar to the corresponding parts of the surface represented. By C. F. Gauß. Answer to the Prize Question proposed by the Royal Society of sciences at Copenhagen. The philosophical magazine, new series, vol. 4, London 1828, S. 104—113, 206—215.

Im Jahre 1894 ist die Abhandlung von A. Wangerin neu herausgegeben worden; sie findet sich im Hefte 55 von Ostwald's Klassikern der exakten Wissenschaften: Ueber Kartenprojection, Abhandlungen von Lagrange (1779) und Gauß (1822), Leipzig 1894, S. 57—81.

Die Abhandlung über die allgemeine Lehre von den krummen Flächen hat Gauß am 8. Oktober 1827 der Göttinger Sozietät vorgelegt. Eine von Gauß selbst verfaßte Anzeige erschien am 5. November 1827 in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen, Stück 177, S. 1761—1768; sie ist abgedruckt in den Werken, Bd. IV, S. 341—347. Eine Übersetzung der Selbstanzeige ist schon 1829 von Francis Baily herausgegeben worden:

Account of a paper by Prof. Gauß, intitled: Disquisitiones generales circa superficies curvas, communicated to the Royal Society of Göttingen on the 8th of october 1827, The philosophical magazine, new series, vol. 3, London 1828, S. 331—336.

Man vgl. hierzu den Brief von Olbers an Gauß vom 2. Juli 1828 und dessen Antwort Ende Juli 1828 (Br. G.-O. 2, S. 508, 511, zum Teil abgedruckt W. VIII, S. 444—445).

Die Abhandlung selbst ist 1828 in den Denkschriften der Göttinger Sozietät erschienen:

(1) Disquisitiones generales circa superficies curvas, auctore Carolo Friderico Gauß, Societati regiae oblatae d. 8. Octob. 1827. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores, Commentationes classis mathematicae. T. VI (ad annos 1823—1827). Gottingae 1828, S. 99—146.

Es gibt Sonderabzüge mit den Seitenzahlen 1 bis 50 und einer besonderen Titelseite, die den Vermerk: Gottingae, Typis Dieterichianis, 1828 trägt.

Der lateinische Text wurde in der fünften, von Liouville besorgten Ausgabe des Werkes: G. Monge, Application de l'analyse à la géometrie, Paris 1850, S. 505—546 abgedruckt unter dem Titel:

(2) Recherches sur la théorie générale des surfaces courbes, par M. C. F. Gauß.

Es folgen zwei Übersetzungen ins Französische:

(3) Recherches générales sur les surfaces courbes par M. Gauß. Traduit du latin par M. T[iburce] A[badie], ancien élève de l'École polytechnique, Nouvelles annales de mathématiques, t. 11, Paris 1852, S. 195—258.

(4) Recherches générales sur les surfaces courbes, par M. C.-F. Gauß, traduites en français, suivies de notes et d'études sur divers points de la théorie des surfaces et sur certaines classes de courbes, par M. E. Roger, Paris 1855.

Nach H. D. Thompson (siehe Nr. 9) ist von (4) eine weitere Ausgabe Grenoble 1870, Paris 1871 erschienen.

(5) Die Werke von Carl Friedrich Gauß, herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen bringen die Disq. gen. im vierten Bande, Göttingen 1873, S. 217—258; ein zweiter, unverändeter Abdruck ist 1880 herausgekommen.

Es gibt zwei Übersetzungen ins Deutsche. Die erste ist ein Teil des Werkes: O. Böklen, Analytische Geometrie des Raumes, zweite Auflage, Stuttgart 1884, dessen zweiter Teil den Doppeltitel führt:

(6) Disquisitiones generales circa superficies curvas von C. F. Gauß, ins Deutsche übertragen, mit Anwendungen und Zusätzen. Die Fresnelsche Wellenfläche.

Die Übersetzung steht S. 197—232. Die erste Auflage, Stuttgart 1861, enthält die Übersetzung der Disq. gen. noch nicht.

Zweitens ist zu nennen:

(7) Allgemeine Flächentheorie (Disquisitiones generales circa

superficies curvas) von Carl Friedrich Gauß (1827). Deutsch herausgegeben von A. Wangerin. Heft 5 von Ostwald's Klassikern der exakten Wissenschaften, Leipzig 1889, 62 S.; zweite revidierte Auflage, Leipzig 1900, 64 S.

In den Budapester Mathematisch-physikalischen Blättern hat Nikolaus Szíjártó eine Übersetzung ins Magyarische veröffentlicht:
(8) A felületek általános elmélete. Irta Gauß Károly Frigyes. Fordította Szíjártó Miklós. Mathematikai és physikai lapok, Band 6, Budapest 1897, S. 45—114.

Eine Übersetzung ins Englische enthält das Buch:
(9) Karl Friedrich Gauß, General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825. Translated with notes and a bibliography by J. C. Morehead and A. M. Hiltebeitel. The Princeton University Library, 1902.

Die Einleitung von H. D. Thompson gibt bibliographische Notizen. Es folgt S. 1—44 die Übersetzung der Disq. gen. Beigegeben sind Übersetzungen der Selbstanzeige und der 1900 im achten Bande der Werke aus dem Nachlaß herausgegebenen Neuen allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen.

Inhaltsverzeichnis.
